Juin 2017 : MathC2+

Les SANGAKU : des maths et des dessins

IREM Grenoble :
M. Althuser, Cité Scolaire Jean Prévost, Villard de Lans
C. Kazantsev, B. Wack, Université Grenoble Alpes
avec l'aide de B. Lacolle, collaborateur bénévole Université Grenoble Alpes

et pour la visite du FABLAB :
Jérôme Maisonnasse (Laboratoire LIG)

1 Déroulement de l'atelier

Au japon, les SANGAKU étaient des figures géométriques gravées sur des tablettes de bois, figures suggérant des propriétés géométriques simples, ou de vraies énigmes.

L'objectif de cet atelier est d'étudier quelques SANGAKU simples, de les dessiner puis d'en faire graver certains avec un outil laser.

Afin de réaliser ces dessins et ses découpes, il nous faut nous initier à l'utilisation d'un langage de **dessin vectoriel** simple : nous choisirons **SVG**.

La première partie se déroulera en salle informatique pour l'étude des propriétés géométriques et les dessins. Puis nous nous rendrons au FABLAB pour des démonstrations, entre autres, de gravages et de découpes.

Réplique d'un Sangaku
Préfecture de Kanagawa

Note - On trouvera de nombreux exemples de SANGAKU dans le livre :
"SANGAKU : Le mystère des énigmes géométriques japonaises", *Géry Huvent*, DUNOD.

2 L'outil de dessin et de découpe : les images vectorielles

Les dessins que vous allez faire sont très simples : il serait plus facile de les réaliser avec un logiciel de dessin, mais notre objectif est de rentrer au cœur du processus de dessin et de montrer la démarche depuis des "instructions élémentaires" que vous allez manipuler jusqu'à la visualisation, l'impression sur une imprimante ou la découpe sur une machine spécialisée.

Les dessins seront construits à partir de **segments, polygones** et de **cercles**.

Dans cet atelier on pourra :
- **visualiser** un dessin dans un **navigateur WEB**,
- **découper, graver** dans un matériau le dessin avec **une machine de découpe laser** dans le cadre d'un FABLAB.

3 Des images numériques pour l'ordinateur

3.1 Deux formats d'images : Image bitmap et Image vectorielle

Image bitmap = tableau de points, les pixels :

— avantages : proche de l'utilisation à l'écran, ou à l'imprimante
— inconvénient : volumineuse, transformations géométriques difficiles (zoom par exemple)

Image vectorielle = des ordres de tracé :

— avantages : moins volumineuse, transformations faciles (zoom par exemple)
— inconvénients : nécessite un outil supplémentaire pour la liaison avec l'écran ou l'imprimante

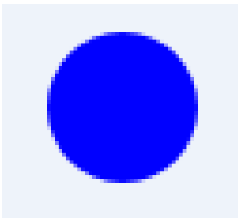
3.2 Illustration des problèmes de "zoom"

Les images initiales :

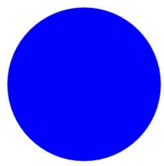
Format "Bitmap"

"Format vectoriel"

Les images "zoomées" :



Format "Bitmap"



"Format vectoriel"

4 Image Vectorielle : des ordres graphiques

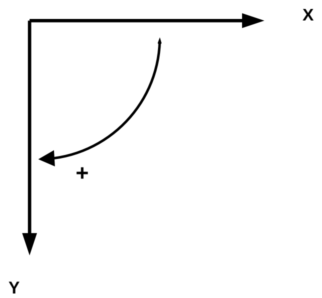
Une **image vectorielle** est constituée **d'ordres de dessin** :
— peu d'ordres graphiques, **correspondant au mouvement d'un crayon**,
— mais capables par composition de faire des dessins complexes.

Nous utiliserons des ordres graphiques exprimés par du texte naturel, le langage **SVG (Scalable Vector Graphics)** (même s'il est en anglais).

Nos fichiers seront des fichiers avec l'extension **.svg** :
— **lus, modifiés comme des fichiers de texte**, à ouvrir avec un éditeur élémentaire comme **Blocs-notes** (clic bouton droit de la souris "ouvrir avec bloc-notes"), ou **Worpad**,
— l'**image** correspondante sera visualisée par un navigateur internet comme **Internet Explorer** (ou **FIREFOX**), à ouvrir avec **Internet Explorer** (clic bouton droit de la souris "ouvrir avec Internet Explorer" (ou **FIREFOX**)),
— nos dessins pourront être compris par **une découpeuse laser**.

5 Le repère

Pour le mathématicien l'orientation du repère est inhabituel : **origine en haut à gauche**, axe des x vers la droite (c'est habituel), **mais axe des y vers le bas**. Ce type de repère est courant dans le domaine du dessin par ordinateur.



Nos images seront dans un cadre de dimension 600×600 (unités utilisateur) et notre fichier texte de base permettant de construire un dessin sur l'ensemble la page sera **modele.svg** :

```
<?xml version="1.0" standalone="no"?>
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg" version="1.1"
width="600" height="600">
...
...
</svg>
```

Les 3 premières lignes et la dernière seront toujours présentes et non modifiées.

6 Tracer des segments, des polygones

Pour tracer des segments, des lignes polygonales, des polygones fermés, la méthode est la même, tout d'abord donner les éléments géométriques : premier point, puis la séquence des autres points.

Par exemple pour mettre un cadre sur le bord de notre zone de dessin on désignera par : `d="M 0,0 600,0 600,600 0,600 0,0"` la ligne polygonale commençant au point $(0, 0)$ puis joignant les points $(600, 0)$ $(600, 600)$ $(0, 600)(0, 0)$.

```
<path
d="M 0,0 600,0 600,600 0,600 0,0"
/>
```

L'inconvénient est que ce rectangle est par défaut rempli de la couleur noire. Pour le rendre transparent, nous ajoutons modifier la commande `fill= "none"` :

```
<path
d="M 0,0 600,0 600,600 0,600 0,0" fill="none"
/>
```

Mais du coup nous ne le voyons plus et nous allons tracer son bord en noir en complétant l'instruction par `stroke="black"`.

```
<path
d="M 0,0 600,0 600,600 0,600 0,0" fill="none" stroke="black"
/>
```

Par exemple pour tracer notre grand rectangle en jaune avec un bord rouge, nous utiliserons le programme :

```
<?xml version="1.0" standalone="no"?>
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg" version="1.1"
width="600" height="600">
<path
d="M 0,0 600,0 600,600 0,600 0,0" fill="yellow" stroke="red"
/>
</svg>
```

que vous trouverez dans : **cadre.svg**

On ouvrira le fichier **cadre.svg**, dans un éditeur de texte pour pouvoir l'éditer et le modifier, et aussi dans un navigateur WEB pour visualiser la figure produite.

On pourra utiliser les couleurs : "yellow", "red","blue", "green", "orange",...

6.1 Tracer un cercle

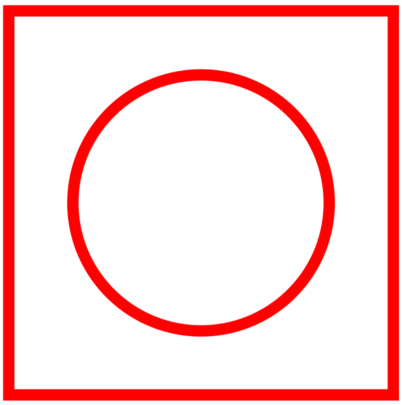
La forme de l'instruction est de la même forme : il faut donner les éléments géométriques (centre, rayon) puis des paramètres de remplissage ou de bord, par exemple (dans **cercle.svg**) :

```
<circle
cx="300" cy="300" r="200" fill="yellow" stroke="red"
/>
```

7 Du dessin au découpage laser

Pour la **découpeuse laser**, tout trait en **rouge pur ("red")** fera l'objet d'un découpage. Pour adapter à la machine il faudrait même spécifier une largeur de découpe correspondant au faisceau laser de `0.01 mm`. Ceci nous permet d'introduire un nouveau paramètre de largeur de trait qui est `stroke-width=" "` et qui définit la largeur d'un trait.

Dans le fichier `decoupe.svg` représenté ci-contre, la largeur du trait est de de `5mm` mais dans le fichier donné à la découpe il faudrait spécifier `stroke-width="0.01mm"`. Dans la pratique, les couleurs sont converties en niveau de gris par la découpeuse laser.



8 Une première propriété géométrique pour les SANGAKU

Il n'y a aucun codage présent sur ces peintures SANGAKU, mais toutes les propriétés qui semblent vraies le sont, par exemple : angles droits, longueurs égales...

8.1 Un premier SANGAKU

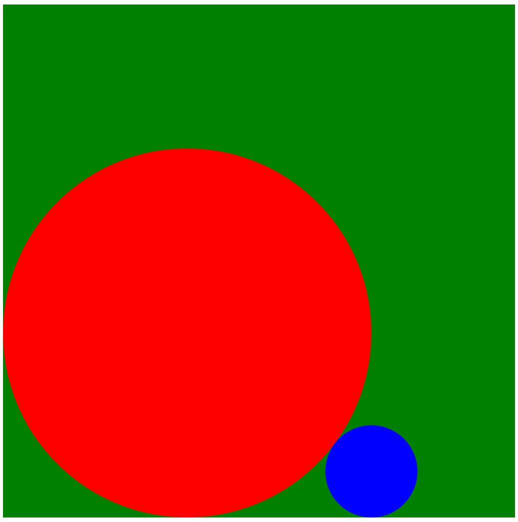
Exercice 1 *Construire le SANGAKU ci-contre, en haut, où le grand carré vert à pour sommets :*

$$(0,0)\ (600,0)\ (600,600)\ (0,600),$$

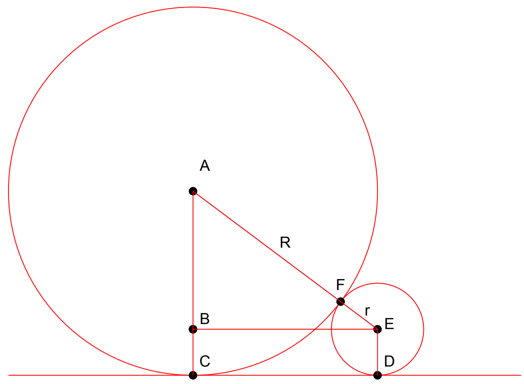
où les rayons des grands et petits cercles sont respectivement :

$$R = 216, r = 54,$$

et où les cercles sont tangents entre eux, et tangents à la ligne horizontale du bas.



Pour vous aider, ce premier SANGAKU correspond à la figure géométrique ci-contre. On peut démontrer que $CD^2 = 4rR$.

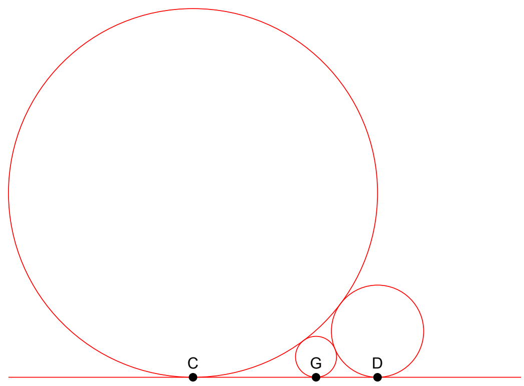


8.2 La propriété des trois cercles tangents

Exercice 2 *Soit les trois cercles C_1, C_2, C_3 de rayons décroissants R_1, R_2, R_3, tangents entre eux, et à la droite horizontale du bas, comme indiqué sur le dessin.*

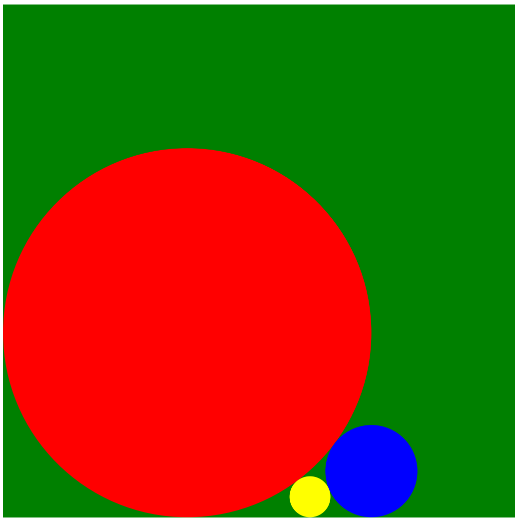
Démontrer la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}}.$$



Exercice 3 *Application numérique : montrer que* $R_1 = 216, R_2 = 54, R_3 = 24$, *vérifient la propriété et calculer* CG*et* GD.

8.3 Un deuxième SANGAKU



Exercice 4 *Construire la figure ci-contre, où le grand carré vert à pour sommets :*

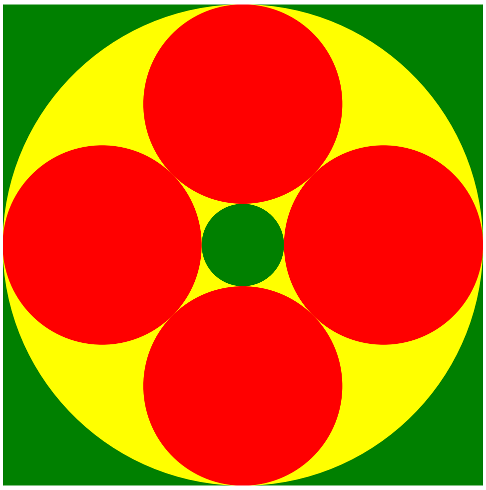
$$(0,0)\ (600,0)\ (600,600)\ (0,600)$$

et où les rayons des grands moyens et petits cercles sont respectivement :

$$R_1 = 216, R_2 = 54, R_3 = 24.$$

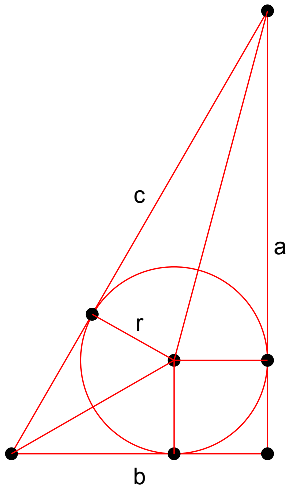
9 Encore des cercles et des SANGAKU

9.1 Cinq cercles dans un grand cercle



Exercice 5 *Réaliser la figure ci-contre. Les cercles sont tangents entre eux et on prendra par exemple le grand cercle de rayon* $R = 300$.

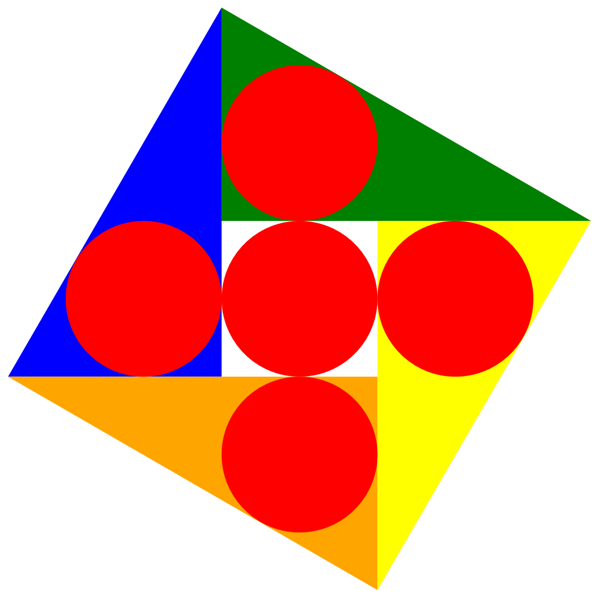
9.2 La propriété : le rayon du cercle inscrit à un triangle rectangle



Exercice 6 - A faire à la maison ou en fin de séance si vous avez le temps - *Soit un triangle rectangle dont l'hypothénuse a pour longueur c et les deux autres cotés a et b. Démontrer que le rayon du cercle inscrit au triangle rectangle est :*

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

9.3 Un SANGAKU plus complexe



Exercice 7 *Dans la figure ci-contre, le triangle rectangle en haut à gauche, correspond à celui de l'exercice précédent, avec les mêmes notations. En supposant cette figure réalisable, que tous les triangles rectangles sont égaux, montrer que :*

$$a = b + 2r$$

puis que :

$$a = \frac{c}{2} + 2r, b = \frac{c}{2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore en déduire une équation du second degré en l'inconnue $X = \frac{r}{c}$.

Mettre cette équation sous forme canonique et en déduire que :

$$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Exercice 8 *On donne les coordonnées des sommets du triangle bleu dont les cotés hors hypoténuse sont horizontaux et verticaux :*

$$(200, 0)(200, 346)(0, 346).$$

Terminer la figure en supposant que $200^2 + 346^2 \approx 400^2$ et $\sqrt{3} \approx 1.73$.