STRATEGIES DE RESOLUTION DE PROBLEMES D'ELEVES LIBANAIS EN FIN DE SCOLARITE OBLIGATOIRE ET AU DEBUT DE L'ECOLE SECONDAIRE

Naim EL-ROUADI
Université de Balamand, Liban
Anna SIERPINSKA
Université Concordia, Montréal, Canada

Résumé. Cette étude porte sur l'activité de résolution de problèmes d'élèves libanais des deux dernières classes de l'enseignement de base et de la première année du secondaire. Le problème de recherche donné aux élèves portant sur le partage en parts inégales d'une dette payée à deux personnes, proportionnellement à leurs contributions. Les auteurs présentent une analyse détaillée des raisonnements arithmétiques et algébriques produits par les élèves et proposent d'expliquer certaines stratégies par des effets de contrat didactique, en relation avec le thème de la proportionnalité dans le curriculum libanais.

Mots-clés. Résolution de problèmes, stratégies de résolution, solutions arithmétiques, solutions algébriques, partage proportionnel, contrat didactique, coutumes, normes institutionnelles.

I. Introduction

Les nouvelles tendances dans l'enseignement des mathématiques soulignent l'importance de développer, chez les élèves, l'activité de résolution de problèmes. Les écoles privées au Liban ont l'ambition de suivre cette orientation.

Le but de notre recherche, effectuée au Liban, était d'identifier les stratégies de résolution de problème chez un échantillon d'élèves des écoles privées à la fin de leur scolarité obligatoire (15-16 ans) et au début du cycle secondaire. L'instrument de recherche était un « problème de partage » complexe (l'inconnue y était camouflée) pour lequel les élèves ne disposaient pas de procédure toute faite ou de modèle de résolution.

La question centrale de cet article est de déterminer dans quelle mesure, grâce à cette approche, les élèves vont devenir capables de résoudre un problème complexe susceptible d'être rencontré en dehors de l'institution scolaire.

Dans un premier temps, nous présentons les fonctions des problèmes dans l'enseignement des mathématiques au Liban. Dans la partie III, nous formulons la problématique et les hypothèses inhérentes à la recherche. Nous détaillons, dans la partie IV, une analyse a priori du problème, qui comporte un premier volet, mathématique (solutions possibles : arithmétiques et algébriques) et un second volet, didactique (caractère et spécificités du problème dévolu aux élèves). Nous décrivons ensuite le contexte de la passation du problème et proposons une analyse des productions des élèves en termes de stratégies. Nous concluons cet article par une discussion de la validité et de la pertinence des résultats obtenus.

Notre interprétation des résultats du travail des élèves s'est appuyée sur les concepts théoriques de *contrat didactique* (Brousseau, 1997) et de *coutume* (Balacheff, 1988 ; Balacheff, 1999). Ces concepts nous ont paru particulièrement fructueux dans le cadre de la perspective institutionnelle sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques proposée dans la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2002).

L'intérêt de cette recherche dépasse le contexte culturel dans lequel elle a été effectuée. La compétence de la résolution des problèmes est soulignée dans les programmes scolaires de plusieurs pays, dont la France. Cependant, le développement de cette compétence chez les élèves continue à être jugé insatisfaisant. Les raisons de cet état des choses peuvent être différentes d'un pays à l'autre. Dans cet article nous proposons quelques explications pour le Liban. Les résultats d'une recherche basée sur le même type de situation pourraient être différents en France, en raison du fait que le thème de proportionnalité – important dans la résolution du problème – tient une place plus grande dans le curriculum français. Néanmoins, il est très probable que ce problème poserait un défi aussi grand aux élèves français que cela a été le cas pour les élèves libanais, car la notion de « partage équitable » n'est pas facile.

II. Fonctions et statut des problèmes dans l'enseignement des mathématiques au Liban

II.1. Les fonctions des problèmes dans l'enseignement des mathématiques

Le problème étudié, support de cette recherche, s'inscrit dans la tendance récente de mettre la résolution des problèmes au cœur des réformes des programmes scolaires dans certains pays. Le curriculum libanais en cours (Ministère de l'Education Nationale. Liban, 1997) va dans ce sens en indiquant que « la résolution de problèmes est peut-être la plus significative dans l'enseignement des mathématiques ».

Pour la notion de « problème », nous avons retenu la caractérisation proposée dans le cours de Robinault (2008) sur la Théorie des Situations Didactiques. Un problème doit donc demander plus qu'un rappel de connaissances ; il indique qu'un problème doit se « distingue[r] d'une activité d'exécution. ».

Le curriculum officiel libanais insiste, dans son « Introduction » à la section « Mathématiques », sur l'enseignement non pas des « mathématiques toutes faites » mais sur la construction des connaissances mathématiques dans des processus de mathématisation des « situations réelles »:

> « [I]l ne s'agit plus d'apprendre des mathématiques toutes faites mais de les faire par soi-même. A partir de situations réelles dans lesquelles les élèves soulèvent des questions, posent des problèmes, formulent des hypothèses et les vérifient, l'esprit de cette science s'implante et s'enracine». (Ministère de l'Education Nationale. Liban, 1997, p. 246)

Les élèves sont censés rencontrer ces « situations réelles » en résolvant des problèmes qui deviennent le point de départ pour la construction de tout savoir mathématique nouveau : le curriculum libanais considère la « résolution de problèmes » comme étant

> « l'activité la plus significative dans l'enseignement des mathématiques. D'une part tout savoir mathématique nouveau doit être construit à partir de situations-problèmes. D'autre part, l'élève doit apprendre à utiliser différentes stratégies pour surmonter les difficultés et arriver à résoudre un problème. Pour cela il doit être capable de : sérier, classifier, quantifier, retrouver des modèles mathématiques, manier des techniques de simulation, construire et utiliser des algorithmes, prendre des décisions, vérifier, appliquer, mesurer, employer des techniques heuristiques, traiter des informations ». (Ministère de l'Education Nationale. Liban, 1997, p. 247)

Il parait clairement que ce curriculum souligne le nécessaire dépassement des difficultés des situations-problèmes pour construire des connaissances mathématiques nouvelles mais, dans la même mesure, celle de préparation des élèves à utiliser les mathématiques dans la résolution des problèmes en dehors des mathématiques. En fait, le curriculum stipule que « Les sujets traités ne sont pas jugés d'après leur intérêt théorique mais pratique ». Il s'agit donc du développement de toute une panoplie de compétences liées à la résolution de problèmes en général.

Il s'agit d'assurer le transfert des connaissances mathématiques à la résolution de problèmes dans les situations que les élèves pourraient rencontrer en dehors de l'école, plus que de l'avancement substantiel de leurs connaissances des notions ou méthodes de pensée mathématiques. Prenant au sérieux le but d'un tel mode d'enseignement, ces problèmes devraient être des tâches de long terme, exigeant des élèves une recherche des ressources en dehors de ce qui est donné dans le texte même du problème (Meirieu, 1987 ; 2007).

Le problème devrait être aussi ouvert à des interprétations alternatives car c'est souvent le cas des problèmes d'en dehors de la salle de classe. Mais, dans la réalité scolaire,

> « la situation-problème peut être réduite à une sorte de petite manipulation de type plus ou moins ludique au terme de laquelle on met l'élève en situation de découvrir ce qui est complètement ficelé, totalement déterminé, sans que celui-ci n'ait, par exemple, la possibilité de réfléchir à la stratégie qu'il utilise. [On] voit souvent la situation-problème devenir un petit exercice de dix à vingt minutes, d'introduction à une séquence, qui peut avoir un impact mais qui ne donne pas sa vraie portée à cette notion. » (Meirieu 2007, p. 6).

Or si l'institutionnalisation vient trop vite, les effets de contrat prennent le dessus sur la réflexion et l'utilisation rationnelle des outils mathématiques dont les élèves disposent. Nous avons vu les conséquences de cet état des choses dans les résultats de la recherche menée par le premier auteur au Liban.

II.2. La place du raisonnement dans le curriculum libanais

Le curriculum libanais cite le raisonnement mathématique comme un objectif primordial en indiquant que

> « la formation à la construction d'arguments et à leur évaluation, le développement de la pensée critique, la formation au raisonnement mathématique sont des intentions majeures de ce curriculum. Pour cela l'occasion doit être offerte aux élèves pour : observer, abstraire, douter, prévoir, conjecturer, généraliser, synthétiser, interpréter, démontrer ». (Ministère de l'Education Nationale. Liban, 1997, p. 247)

Vu la place des situations-problèmes dans le même curriculum, on peut supposer qu'il s'agit de développer la compétence de raisonnement dans le contexte de la résolution des problèmes. Cependant, le curriculum reste très vague sur les moyens d'y arriver. En fait, après les déclarations générales partiellement mentionnées ci-dessus, le curriculum devient une liste de concepts et techniques mathématiques « à couvrir » dans l'enseignement avec le nombre d'heures qui peuvent être consacrées à chacun d'eux.

Par exemple, en 7^{e} année, les élèves sont censés recevoir, sur le thème de la proportionnalité, 30 heures d'enseignement sur « Grandeurs directement proportionnelles » ; en 8^{e} année – 5 heures sur « Grandeurs inversement proportionnelles » et, en 9^{e} année – 10 heures sur « Fonctions linéaires et proportionnalité ». Les objectifs concernant l'algèbre sont formulés de la même manière. Deux « sujets » algébriques sont mentionnés – « Expression algébrique » et « Equations et inéquations » – et les élèves doivent recevoir un nombre prescrit d'heures d'enseignement sur des sujets tels que « Calcul sur des expressions algébriques », « Identités remarquables », « Expressions littérales sous forme fractionnaire », etc. Aucune mention n'est faite des situations-problèmes et de la manière dont elles pourraient être mises en œuvre pour construire les notions et techniques énumérées.

En particulier, par rapport au domaine numérique travaillé à l'école élémentaire, le curriculum ne recommande pas la distinction de types de problèmes selon les différents modèles de raisonnement dans leur résolution, comme ceux décrits, par exemple, par Vergnaud dans ses études sur les « structures additives » et « structures multiplicatives » (Vergnaud & Durand, 1976 ; Vergnaud, 1983 ; Vergnaud, 1991). Ce manque d'indications, dans le curriculum libanais, sur la nécessité de travailler en classe la distinction des types de structures en jeu dans différents problèmes, conduit, dans la pratique de l'enseignement, à laisser les élèves dépourvus de stratégies de raisonnement devant les « situations-problèmes » qui leur sont proposées. Les élèves n'ont le choix qu'entre un tâtonnement par essai et erreur et l'imitation du modèle en cours dans la classe. Comme nous allons voir, ils n'établissent que rarement une stratégie adéquate à la situation-problème.

Le curriculum ne contient pas non plus d'indications sur les moyens de développement des raisonnements dans le domaine algébrique, lorsque les élèves passent de l'école élémentaire à l'école secondaire.

> L'objectif de l'enseignement des mathématiques à la fin du cycle de la scolarité obligatoire est de : « schématiser des situations et utiliser et appliquer les mathématique dans différents domaines » (Ministère de l'Education Nationale. Liban, 1997, p. 257).

Cette formulation suggère que l'approche « par la modélisation » pour l'enseignement d'algèbre serait privilégiée dans le curriculum libanais – pour utiliser la classification du champ des problèmes de l'algèbre élémentaire proposée par Grugeon (1997). Cette approche, d'après Chevallard (1989) dont les propos sont évoqués par Grugeon dans sa caractérisation de l'approche, met

> « à l'œuvre des éléments essentiels de l'activité algébrique : l'activité de symbolisation (utilisation des lettres pour désigner des quantités inconnues ou variables mais aussi pour désigner des paramètres, variables du système étudié dont les valeurs sont supposées connues afin d'étudier des solutions générales) et l'usage réglé de systèmes de signes à travers une pluralité coordonnée de systèmes sémiotiques » (Grugeon 1997, p. 172)

Cependant, le curriculum libanais ne rend pas explicites ces « éléments essentiels de l'activité algébrique » comme étant des objectifs d'enseignement particulièrement dignes d'attention dans le passage du mode de pensée arithmétique à l'école élémentaire au mode algébrique à l'école secondaire.

L'introduction de l'algèbre par le biais de la résolution des problèmes, pour assurer un passage de l'arithmétique à l'algèbre qui ait du sens pour l'élève, a été étudiée par Bednarz & Janvier et celle-ci est considérée comme une « perspective significative » (Bednarz & Janvier, 1996, p. 115). Les auteurs partent de l'hypothèse, que, dans cette approche, l'algèbre est introduite comme un déplacement de la résolution locale à une résolution générale d'un problème et doit être basée sur un bon établissement du raisonnement arithmétique. Cela implique que, dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, les stratégies arithmétiques vont apparaître, lors de la résolution de problèmes, autant comme des supports (appui sur des connaissances antérieures) que comme des obstacles (incapacité à passer de procédures numériques à la résolution algébrique). Pour aider les élèves à se débrouiller dans ces situations difficiles et surmonter les obstacles, les auteurs proposent (p. 119-136) des éléments (outils) pour l'introduction simple d'un raisonnement algébrique à partir du raisonnement arithmétique. L'existence des difficultés spécifiques dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre n'est pas prise en compte dans le curriculum libanais et les élèves, encore une fois, sont laissés à eux-mêmes lorsqu'ils sont confrontés à la résolution des problèmes « par l'algèbre ».

Les situations-problèmes sont aussi évoquées comme contexte de choix dans le développement des schémas de pensée logique sous-jacents à tout raisonnement mathématique. Par exemple, dans une allocution du doyen du groupe 'Mathématiques' de l'Inspection Générale de l'Education nationale en France, J. Moisan, nous pouvons lire :

> « Un des objectifs essentiels de l'enseignement d'arithmétique est le développement des qualités de logique et d'aptitude au raisonnement. Pour qu'il puisse construire ses schémas logiques, il est indispensable :
>
> • de mettre l'élève en situation de recherche, personnelle ou en groupe, dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes ;
>
> • d'instaurer le débat mathématique dans la classe de telle sorte que les méthodes trouvées puissent être examinées et confrontées. La vérité ne doit pas descendre de la bouche de l'enseignant mais s'imposer logiquement à tous. » [1]

Le curriculum libanais est muet sur ce point aussi : il n'y a aucune indication sur les possibilités de construction de schémas logiques dans les processus du développement de stratégies de résolution de problèmes de types différents.

III. Problématique et hypothèses

Le curriculum libanais n'offre pas aux enseignants de moyens didactiques spécifiques leur permettant de mettre la résolution de problèmes au centre de l'enseignement des mathématiques. Par conséquent il y a rupture entre les déclarations idéologiques sur la nature et l'usage des connaissances mathématiques dont les élèves sont censés disposer et

1 Moisan J. (2004), L'enseignement des mathématiques de l'école au collège : continuités et ruptures. Texte téléchargé le 6 décembre 2010 depuis Google.

l'organisation des contenus à enseigner. Cette dernière se limite à l'énumération des « thèmes » à enseigner et du nombre d'heures correspondant.

La réalisation d'un programme d'enseignement par résolution de problèmes nécessiterait une explicitation des grandes lignes d'une organisation didactique possible (Chevallard, 2002) de ces contenus. Sans cela, le programme risque de mener les enseignants à croire qu'une organisation didactique spécifique n'est pas nécessaire et qu'il suffit d'apprendre aux élèves les techniques du calcul numérique (et ensuite algébrique) et de leur proposer, par la suite, des situations-problèmes pour qu'ils développent, par eux-mêmes, à partir de ces techniques, une compétence à résoudre des problèmes de toutes sortes, y compris des problèmes qu'ils pourraient rencontrer en dehors de la salle de classe.

L'expérience de résolution de situations-problèmes apparaîtrait alors comme une stratégie didactique « auto-suffisante » pour atteindre les objectifs escomptés de l'enseignement des mathématiques (transfert, capacités de raisonnement tant dans le domaine numérique et algébrique, pensée critique, etc.), sans la nécessité d'un enseignement plus structuré et plus explicite de cette activité. La recherche présentée a pour but de mettre à l'épreuve cette hypothèse.

La problématique est la suivante : face à une situation-problème, pour laquelle les apprenants ne disposent pas d'un modèle de résolution, quels types de démarche vont-ils adopter, quelles formes de raisonnement vont-ils produire, quelles connaissances vont-ils mobiliser ?

L'élève va-t-il utiliser des procédures par essai-erreur en appliquant des techniques récemment étudiées ou, comme le suggère l'hypothèse ci-dessus, va-t-il employer son esprit critique et créatif, développé par son expérience des situations-problèmes, pour élaborer une stratégie adéquate en produisant un raisonnement mathématique basé sur ses connaissances antérieures ? Il est possible, a priori, que les démarches réelles des élèves, vis-à-vis d'un problème concret donné, ne soient pas aisément classifiables dans une ou dans l'autre catégorie. Il s'agit donc de voir quelles sont les stratégies que les élèves utilisent, et comment on pourrait les classifier et les expliquer.

Dans la section suivante, nous présentons le problème qui a été utilisé comme instrument de la recherche. Ensuite nous décrirons l'échantillon d'élèves libanais qui ont participé dans la recherche en résolvant ce problème.

IV. Présentation et analyse a priori du problème de recherche

IV.1. Le problème

L'énoncé du problème utilisé dans cette recherche est le suivant :

> Carole, Georges et Chantal décident de célébrer une fête à l'école. Carole achète 2 sacs de bonbons et Chantal en achète 3. Georges a oublié d'apporter les siens. Chaque sac contient le même nombre de bonbons de même qualité. Les trois élèves se partagent les bonbons d'une manière égale entre eux. Georges a payé à Carole et Chantal une somme de $ 2.5 pour les bonbons qu'ils se sont partagés. Quelle somme d'argent Carole et Chantal doivent-elles recevoir ?

Ce problème est du type des problèmes classiques dits « de compagnie », courants dans les mathématiques de la Renaissance. Radford (2003) en cite un, provenant du *Trattato d'aritmetica* de Paolo dell'Abbaco (14e siècle) :

> Deux travailleurs mangent à côté d'une fontaine. Un des travailleurs a 5 pains, l'autre en a 4. Un marchand se joint à eux. Après avoir mangé les trois ensemble, le marchand part et laisse 5 soldi aux travailleurs. 'Je demande' – dit Paolo dell'Abbaco – combien (d'argent) revient à chacun ?' (Radford, 2003)

IV.2. Analyse a priori du problème sur le plan mathématique

Le problème présente surtout des difficultés de modélisation. Il y a deux types de quantités – les sacs de bonbons et les sommes d'argent – mais l'énoncé du problème ne révèle aucune relation entre les deux. Tout est à déduire de la situation qui, elle aussi, est complexe car elle comprend plusieurs phases : achat, partage, paiement d'une dette. L'achat n'est pas « égal » : deux personnes achètent des quantités différentes de biens. Le partage, par contre, est *équitable* (une conception difficile en soi) mais on partage entre plus de personnes que d'acheteurs mettant ainsi une personne en position d'endetté. L'endetté remet sa dette aux acheteurs et les laisse se débrouiller pour se la partager d'une façon équitable.

L'interprétation du problème repose sur la perception de certains indices dans l'énoncé : le nombre des sacs de bonbons n'est pas le même pour Carole, Chantal et Georges (2 sacs, 3 sacs, et aucun sac, respectivement) ; par contre, il y le même nombre de bonbons dans chaque sac, les bonbons sont de même qualité et chacun des trois amis reçoit le même nombre de bonbons. Ce caractère « juste » du partage suggère que Carole et Chantal doivent se partager la somme de $2.5 de façon à respecter des normes implicites telles que : « Consommation égale équivaut à paiement égal » (donc chacun doit payer la même somme de $2.5), et « Celle qui a donné le moins de bonbons à Georges doit recevoir la moindre partie de la somme de $2.5 et inversement ».

Essayons d'imaginer comment les élèves pourraient se représenter ce problème.

Les élèves de l'école élémentaire tenteraient, bien sûr, une solution arithmétique. Une manière naïve et erronée serait de penser qu'il s'agit simplement de diviser la somme versée par Georges proportionnellement aux contributions de Carole et Chantal, donc dans une proportion de 2 sur 3. Ainsi Carole devrait prendre deux cinquièmes de $2.5 (soit $1) et Chantal trois cinquièmes de $2.5 (soit $1.5). La solution est erronée parce que le partage doit être proportionnel non pas à ce que chacune a dépensé, mais à l'argent que Georges *doit* à chacune des filles, sous la condition que tous les trois contribuent la même somme aux dépenses totales.

En principe, nous pourrions nous attendre, de la part des élèves, à des solutions basées sur l'idée de partage proportionnel. Cependant, vu le peu d'attention consacré au partage proportionnel dans le curriculum libanais, les chances de l'apparition de solutions correctes de ce type ne sont pas très grandes. De plus, l'usage commun dans l'enseignement de ce qu'on appelle « la règle de trois » dissimule en quelque sorte le sens du concept de proportionnalité. Il s'agit, pour les élèves, de simplement compléter des tableaux de proportionnalité, de calculer le rapport de proportionnalité, de trouver la quatrième proportionnelle, de calculer un pourcentage, ou de donner une mesure réelle sachant l'échelle sur la carte géographique. Le curriculum libanais ne traite pas du concept de proportionnalité en dehors de ces thèmes.

On devrait s'attendre donc plutôt à ce que les élèves utilisent, pour résoudre le problème, un « tableau de proportionnalité » et appliquent « la règle de trois ». Une solution correcte à laquelle on pourrait s'attendre pourrait être la suivante :

> Si le paiement est à égalité entre les trois amis, alors chacun paye \$2.5
> Le nombre de sacs achetés est 5.
> La somme totale d'argent payée est donc 3 × \$2.5 = \$ 7.5
> Tableau de proportionnalité entre nombre de sacs de bonbons et le prix à payer :
> 5 → 3 × \$2.5
> 2 → ?
> 3 → ?
> Par la règle de trois, on obtient :
> Carole a déjà payé (2 × 3 × \$2.5)/5 = \$3
> Chantal a déjà payé (3 × 3 × \$2.5)/5 = \$4.5.
> Or la part de chacun des trois amis est \$2.5, alors
> Carole doit récupérer, de la somme déjà payée \$3 - \$2.5 = \$0.5
> Chantal doit récupérer, de la somme déjà payée \$4.5 - \$2.5 = \$2

Auprès des élèves qui ont déjà commencé l'apprentissage de l'algèbre, donc à partir de la dernière année de la scolarité obligatoire, nous pourrions anticiper des solutions « par l'algèbre ». Une telle solution pourrait ressembler à une version partiellement « algébrisée » de la solution arithmétique ci-dessus, où le tableau de proportionnalité et la règle de trois seraient remplacés par une équation. Par exemple :

> Soit x le prix d'un sac de bonbons.
> Le prix de 5 sacs est donc $5x$.
> La somme doit être repartie équitablement entre les trois amis, donc
> chacun des trois amis doit payer le tiers de cette somme, donc $5x/3$.
> Comme chacun paye \$2.5, nous obtenons l'équation $5x/3 = 2.5$
> Donc $x = 1.5$
> Le prix de 2 sacs (Carole) est $2x$, donc \$3.
> Le prix de 3 sacs (Chantal) est $3x$, donc \$4.5.
> [Le reste de la solution est le même que dans la solution arithmétique].

Tenant compte de leur expérience en mathématiques à l'école secondaire et l'importance qu'on y attribue à la résolution des problèmes « par l'algèbre », c'est-à-dire – au sens que ce terme a normalement à l'école – par la représentation des relations entre les données par une ou des équations (Bednarz & Janvier, 1996, p. 118), on peut s'attendre à ce que beaucoup d'élèves tentent une résolution algébrique.

Apparaîtra alors la difficulté d'identifier une ou des inconnues. Le choix n'est pas évident : les inconnues ont été camouflées dans une situation complexe, où l'on partage une quantité inconnue de bonbons en trois parties égales et une somme d'argent connue en deux parties inégales dans une proportion qui n'est pas connue. Une proportion (et non pas un nombre) en tant qu'inconnue, ce n'est pas quelque chose d'ordinaire dans les cours de mathématiques, du moins au Liban, surtout au niveau du cycle complémentaire. Les élèves vont peut-être choisir le prix d'un sac de bonbons en tant qu'inconnue (le prix d'une unité de marchandise est souvent une inconnue dans les problèmes scolaires), mais ce prix ne résoudra pas directement le problème car le partage n'est pas proportionnel aux dépenses qu'on encouru Carole et Chantal mais à leur contributions à Georges. On peut se passer du calcul de la proportion du partage de la dette rendue mais il n'est pas évident comment le faire.

L'analyse du problème montre bien que l'on peut également se passer de l'algèbre. En principe, le seul moyen de rendre la solution algébrique épistémologiquement nécessaire serait de remplacer au moins certaines des données par des paramètres, car l'algèbre a été inventée pour résoudre des classes de problèmes et non pas des problèmes particuliers [(Charbonneau, 1996), p. 15-16]. En cas extrême, on pourrait formuler le problème de façon suivante :

> Carole, Georges et Chantal décident de célébrer une fête à l'école. Carole achète a sacs de bonbons et Chantal en achète b. Georges a oublié d'apporter les siens. Chaque sac contient le même nombre de bonbons de même qualité. Les trois élèves se partagent les bonbons d'une manière égale entre eux. Georges a payé à Carole et Chantal une somme de \$ c pour les bonbons qu'ils se sont partagés. Quelle somme d'argent Carole et Chantal doivent-elles recevoir ?

La résolution de ce problème mènerait aux formules de partage de la somme c pour Carole en : $[(2a - b)/(a + b)].c$ et en : $[(2b - a)/(a + b)].c$ pour Chantal. Cette solution permettrait d'expliciter les contraintes à respecter pour que le problème ait du sens dans le contexte donné. En effet, pour que ces résultats aient du sens comme quantités de sacs et sommes d'argent, il faut qu'ils soient positifs, ce qui implique les inégalités $b < 2a < 4b$. On voit que lorsque a et b sont égaux (ils sont positifs par le contexte du problème), les inégalités sont satisfaites. Les valeurs 2 pour a, 3 pour b sont bonnes (c'était le cas du problème utilisé dans la recherche). Les paires 3 et 2, ainsi que 3 et 4 ; 4 et 3 ; 4 et 5 ; 5 et 3 ; 5 et 4 sont bonnes elles aussi, comme, en principe, une infinité d'autres, mais les valeurs plus grandes ne seraient pas très réalistes en termes de sacs de bonbons achetés par des écoliers. Il faudrait changer de contexte.

Remarquons cependant que de telles considérations ne sont pas intéressantes pour les élèves ; elles le seraient peut-être pour les enseignants qui voudraient comprendre la structure abstraite du problème pour construire plusieurs problèmes concrets de ce type pour leurs élèves. Donc, l'utilisation de l'algèbre pour la résolution du problème par les élèves serait inévitablement un « effet de contrat » et pas le résultat d'une nécessité épistémologique.

IV.3. Analyse a priori du problème sur le plan didactique

Ce problème de recherche est « déconnecté » (Bednarz & Janvier, 1996 p. 123), c'est-à-dire que les relations pertinentes entre les données ne peuvent pas être directement établies. L'inaccessibilité aux relations est exacerbée par le fait que le sens du « partage équitable » n'est pas exprimé en termes quantitatifs dans le problème ; l'élève a la tâche justement de le modéliser en termes quantitatifs. Les problèmes déconnectés ont moins de chances d'être réussis que les problèmes connectés et la complexité du processus de modélisation est reconnue dans beaucoup de recherches (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007).

La situation de partage inéquitable, dont il est question dans le problème, est certainement « une situation à caractère concret, qui permet effectivement à l'élève de formuler hypothèses et conjectures » même si l'élève ne réussit pas à résoudre le problème correctement.

Le caractère implicite des inconnues et des relations quantitatives pertinentes en fait un problème éloigné des classiques rencontrés à l'école. Ainsi, il a une chance, en effet, de se présenter aux élèves comme une sorte « d'énigme », facilitant sa dévolution. Comme le problème présent met les élèves devant des difficultés, parce qu'ils n'ont pas de procédure désignée pour la résolution, ils doivent se montrer créatifs et inventer une stratégie, à travers le travail de compréhension de la situation et de sa modélisation.

Comme nous l'’avons vu dans l'analyse mathématique, le problème peut être résolu avec les seuls outils arithmétiques et le raisonnement proportionnel travaillés à l'école élémentaire.

Nous avons déjà mentionné certaines difficultés possibles chez des élèves : dans la solution arithmétique, penser qu'il serait « équitable » de partager la somme proportionnellement à la quantité des sacs que chacune des deux filles a *acheté* et partager la somme dans une proportion de 2 à 3 ; dans la solution algébrique, écrire une équation permettant de calculer les dépenses de Carole et Chantal mais ne pas savoir comment utiliser cette information pour calculer les sommes dues. Une autre difficulté envisageable est le fait d'introduire plusieurs inconnues, suivant un modèle vu en classe, et d'être incapable de les gérer pour répondre à la question posée. D'un point de vue plus systémique, une difficulté majeure bien connue des élèves est de ne pas prendre en compte l'ensemble des contraintes du problème. De plus, les élèves peuvent être bloqués par l'effort d'appliquer telles quelles les stratégies travaillées en classe sans chercher à développer par eux-mêmes une stratégie propre aux conditions du problème donné.

Dans cette étude, il s'agit de résoudre un problème de recherche complexe contenant plusieurs variables interdépendantes (nombre de sacs de bonbons, prix du sac, la part de chaque fille dans les $2.5 rendus par le garçon, et la relation implicite que « consommation égale correspond à payement égal ») et pouvant être traité de plusieurs façons. Il faut organiser les données et leur traitement en vue de développer une stratégie de résolution dans un processus impliquant une autorégulation des actions guidée par les interactions (rétroactions) entre les résultats des calculs et raisonnements et les données du problème. Or, ces habiletés ne sont pas développées au même degré dans les cycles complémentaire et secondaire. Ainsi, dans les classes du cycle complémentaire, les élèves sont habitués à utiliser des moyens *ad hoc* pour résoudre des problèmes, basés, en particulier, sur des raisonnements analogiques et des représentations contextuelles. Au secondaire, leur « boîte à outils » commence à contenir des éléments structurels et fonctionnels appropriés à la résolution des classes de problèmes. On réfléchit aussi beaucoup plus sur les effets des actions possibles avant de s'engager dans l'une ou l'autre. Au cycle complémentaire, l'engagement dans l'action prend presque toute la place ; la perspective sur ce que l'on fait est toujours locale et utilitaire plus que générale et théorique. Ces aspects ont leur source tant dans les hypothèses sur le développement cognitif des jeunes qui sous-tendent les programmes de l'éducation que dans le fait que la population des classes complémentaires comprend non seulement ceux qui se dirigent vers les études universitaires mais aussi ceux qui vont quitter l'école après le cycle complémentaire et se préparer à un métier.

Dans la section suivante nous rendons compte de l'expérience auprès des élèves.

V. Le cadre de l'expérimentation

Le problème a été donné à 402 élèves de six collèges-lycées de secteur privé au Liban pendant leur cours de mathématiques. Au moment de l'expérience, 141 des élèves faisaient leur huitième année de scolarité obligatoire : enseignement de base 8e année, EB8) et donc étaient âgés de 14-15 ans ; 113 élèves, âgés de 15-16 ans faisaient leur 9e et dernière année de scolarité obligatoire (EB9), et 148 élèves (16-17) faisaient leur première année d'école secondaire (SEC1).

Les écoles ayant participé dans notre recherche étaient comparables en ce qui concerne le niveau d'éducation de leurs enseignants ; ils étaient tous des diplômés des universités (Licence en Mathématiques ou BSc (« Bachelor of Science ») en Mathématiques et Sciences). Ils avaient aussi tous suivi des sessions de formation continue exigées par les directions de leurs établissements et avaient une expérience professionnelle remarquable. Nous allons mentionner certaines différences entre les écoles bien qu'elles n'aient pas été prises en compte dans notre explication des solutions des élèves. Trois écoles étaient urbaines et trois – rurales. Dans une seule des six écoles la langue d'enseignement était le français ; dans toutes les autres c'était l'anglais. Aucune de ces deux langues n'était la langue maternelle des élèves. Les manuels scolaires utilisés dans les écoles étaient variés. A part la langue (anglaise ou française), les manuels différaient par leurs origines : pays, maisons d'éditions et auteurs.

Les élèves avaient 30 minutes pour résoudre le problème individuellement et sans poser de questions à leurs enseignants.

VI. Les résultats de l'expérimentation

Dans les classes EB8 l'échec sur le problème était total. Le taux de réussite dans les classes EB9 était de 6% et dans les classes SEC1, de 9%. Malgré les attentes donc, les différences systémiques entre les approches au savoir et les ambitions des élèves dans les deux cycles d'enseignement n'ont pas joué un grand rôle dans la capacité des élèves à résoudre un problème situationnel pour lequel les élèves ne disposent pas d'un modèle de résolution.

Une différence remarquable entre les élèves de la classe EB8 et les deux autres est la présence des tentatives de solution arithmétique seulement dans EB8. La plupart des solutions représentent des tentatives de solution par l'algèbre, qui, comme nous l'avons vu, n'est pas une stratégie très économique du point de vue cognitif, ce qui peut expliquer l'échec quasi-total des élèves sur le problème.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques détails sur les solutions des élèves aux différents niveaux de scolarité.

VI.1. Les solutions des élèves de la classe EB8

Deux types de solutions ont pu être discernés parmi les élèves de la classe EB8 : solutions arithmétiques (fréquence 118/141) et solutions algébriques (11/141). Douze élèves ont rendu une feuille blanche.

VI.1.1 Solutions arithmétiques

Certains élèves ont essayé de calculer le prix d'un sac de bonbons. Cette inconnue n'a pas beaucoup d'importance dans le problème, mais le prix unitaire est souvent demandé ou utile dans les problèmes typiques scolaires à structure multiplicative [cf. (Vergnaud, 1983)] et c'est pour cette raison que beaucoup d'élèves ont pu y penser. Dans les solutions que nous avons classifiées comme « arithmétiques », le prix d'un sac de bonbons a été trouvé à l'aide de la « règle de trois », appliquée à un « tableau de proportionnalité » :

5 sacs	$ 2.5
1 sac	?

Le raisonnement sous-jacent est, bien entendu, erroné par rapport à la situation du problème : c'est comme si Georges payait toutes les dépenses. Mais l'énoncé du problème parle d'un partage « équitable » des bonbons et de coûts. Donc, avec ses $2.5, Georges ne payait que 5/3 des sacs de bonbons. Le tableau de proportionnalité correct devrait donc présenter, dans la case gauche en haut, 5/3 et non pas 5.

Certains élèves (45/141) en sont restés à ce calcul. Au problème donné, ils ont ainsi substitué un problème beaucoup plus simple, mais familier.

D'autres (25/141) ont essayé de trouver quand même le partage de la somme de $2.5 entre Carole et Chantal. Ceux-là ont continué à raisonner selon la même hypothèse erronée (Georges paie toutes les dépenses), assumant la proportionnalité du partage aux nombres de sacs de bonbons *achetés* par les deux filles : Carole, qui a acheté 2 sacs, obtient 2 fois le prix unitaire d'un sac ($0.5 selon leurs calculs), donc $1, et Chantal, qui en a acheté 3, obtient 3 fois le prix unitaire, donc $1.5.

Cette solution, quoiqu'erronée, est encore assez sophistiquée en comparaison avec un troisième type de solution arithmétique où les élèves (48/141) ont simplement divisé la somme de $2.5 par deux ($1.25 pour Carole et $1.25 pour Chantal), ignorant presque toutes les contraintes de la situation présentée dans l'énoncé du problème.

VI.1.2 Solutions algébriques

Dans les classes EB8, les élèves qui ont eu recours à des solutions algébriques choisissaient le nombre de bonbons dans un sac comme leur variable nommée « x ». Ils concluaient que, dans 5 sacs, il y a $5x$ bonbons. Dix des onze élèves qui commençaient leur solution ainsi (fréquence dans cette classe : 10/141) continuaient en écrivant et résolvant l'équation $5x = 2.5$, obtenant $x = 0.5$. Certains en restaient là, d'autres multipliaient la valeur obtenue de x par 2 et par 3 pour calculer les parts, en dollars, de Carole et Chantal, respectivement.

L'équation $5x = 2.5$ n'a pas de sens en tant qu'identité de deux quantités car, à gauche, nous avons un nombre de bonbons, et à droite, une somme d'argent. Nous supposons que, pour les élèves, soit une équation est une expression formelle qui n'a pas besoin d'avoir un sens, soit que « = » est un signe dont le sens dépend du contexte ; donc c'est un « indice » au sens de la classification de Peirce de signes en indices, icônes et symboles (Peirce, 1955, p. 104). Dans ce cas, ce signe peut indiquer le prix de ce qui est à sa gauche : $5x$ bonbons *coûtent* $2.5.

Ainsi, bien que les élèves utilisent la lettre x et le signe d'égalité dans leurs solutions, ils pensent toujours en termes de règle de trois et leurs solutions ne sont pas essentiellement différentes des solutions arithmétiques.

Un seul élève[2] des classes EB8 s'est engagé dans une analyse plus approfondie du problème en essayant de prendre en compte la condition du partage équitable impliquant que les \$2.5 de Georges ne couvraient qu'un tiers des bonbons et donc les bonbons ont coûté \$7.5 en tout. Il a utilisé la lettre x dans sa solution pour la quantité des bonbons dans un sac, comme les autres élèves d'EB8. Cet élève n'est pas arrivé à résoudre le problème non plus, mais sa solution se démarquait très clairement des autres et nous la présentons ici en entier pour montrer que le problème n'était pas tout à fait hors d'atteinte des élèves des classes EB8. Notre présentation est fidèle au sens de la solution originale qui était écrite en français avec quelques mots seulement en langue arabe.

> Carole a acheté 2 sacs de bonbons.
> Chantal a acheté 3 sacs de bonbons.
> Carole et Chantal ont ensemble 2 sacs + 3 sacs = 5 sacs de bonbons.
> Georges a oublié d'apporter des bonbons c'est-à-dire il n'a rien acheté.
> Chaque sac contient le même nombre de bonbons alors ($5x$) est le nombre total de bonbons.
> Le nombre de bonbons est divisé par les 3 élèves Carole, Chantal et Georges $5x$ / 3.
> Georges a payé \$2.5 pour Carole et Chantal qui lui ont donné la somme des bonbons. Puisqu'on sait que chacun des 3 élèves a la même somme de bonbons, Georges a payé \$2.5 alors que Carole et Chantal ont payé \$2.5.
> Donc ensemble ils ont payé 2.5 × 3 = \$7.5
> Et comme on sait que Carole acheté 2 sacs, alors elle a payé une somme d'argent moins que Chantal.
> Et comme on sait que Chantal a acheté 3 sacs, alors Chantal a payé plus d'argent que Carole.
> *(Solution d'un élève d'EB8)*

VI.2. Les solutions des élèves de la classe EB9

Les solutions purement arithmétiques sont apparues dans les classes EB9 avec une fréquence de 35/113. Quatre élèves ont présenté une feuille blanche. Les autres ont produit des solutions algébriques. Certains élèves ont essayé de modéliser le problème avec une, deux ou trois inconnues.

Les solutions avec une inconnue étaient souvent (11/113) semblables à celles qui sont apparues chez les élèves d'EB8. Il y avait néanmoins (23/113) des solutions où les faits que chacun a payé la même somme et que \$2.5 ne couvre qu'un tiers du coût total des bonbons ont été pris en compte. Cependant, la modélisation du partage des \$2.5 proportionnellement à ce que Georges *devait* à chaque fille posait toujours beaucoup de difficulté et souvent le partage était conçu comme proportionnel à la quantité de bonbons *achetés* par chacune d'elles. Par exemple, dans la solution suivante, l'élève commence par construire une équation avec l'inconnue étant le prix d'un sac de bonbons. Cette équation est correcte (ce qui n'était pas le cas dans les solutions d'EB8) : \$2.5 est compris comme étant le prix d'un tiers des cinq sacs de bonbons. Ensuite, l'élève calcul le prix d'achat de 2 (Carole) et 3 (Chantal) sacs de bonbons. Pour calculer la part de \$2.5 due à chacune des filles, l'élève fait l'erreur de

2 C'était une fille, mais nous utilisons le masculin générique car nous n'avons pas différencié les résultats suivant le sexe des élèves.

simplement diviser les prix d'achat par trois sans égard à leur contribution inégale et l'hypothèse de partage équitable.

> Soit x le nombre d'argent des bonbons dans un sac (sic ! - erreur de français)
> $(x(3+2))/3 = 2.5$ donc $x = (2.5 \;\; 3)/5$ et $x = 1.5$
> Carole a acheté deux sacs alors elle a payé $2 \times 1.5 = 3$
> Chantal a acheté trois sacs alors elle a payé $3 \times 1.5 = 4.5$
> Georges a payé à Carole 3/3 = \$1
> Georges a payé à Chantal 4.5/3 = \$1.5
> *(Solution d'un élève d'EB9)*

C'est une solution erronée, mais l'erreur est, en quelque sorte, rationnelle, « logique ». Le raisonnement est incorrect, mais c'est un raisonnement quand même. Une petite intervention suffirait à l'élève pour le corriger : on pourrait dire que le raisonnement correct était dans sa « zone de développement proximal », pour utiliser le concept bien connu de Vygotsky. Beaucoup de solutions (27 sur 113) étaient malheureusement très éloignées du raisonnement correct. Les élèves produisaient des variables et des équations qui avaient peu de sens, comme s'ils s'efforçaient seulement de produire des textes « à allure mathématique », comme ceux qu'ils percevaient être attendus d'eux dans les cours de mathématiques, sans y voir des outils de résolution du problème. C'était peut-être leur interprétation du contrat didactique en force dans l'expérience (Brousseau, 1997) ou leur effort de suivre les « normes » de l'institution d'enseignement des mathématiques à laquelle ils appartenaient (Hardy, 2009). Voici deux exemples de telles solutions (nous avons ajouté la numérotation).

1. Soit x le prix d'un sac de bonbons acheté par Carole
2. Soit y le prix d'un sac de bonbons acheté par Chantal
3. Soit m le prix des bonbons de Georges
4. Carole = $2x$
5. Chantal = $3y$
6. Georges = m
7. $2x + 3y = m$
8. $2x + 3y = \$2.5$
9. $2x = 2.5 - 3y$
10. $2x = - 0.5\, y$
11. $x = 0.5\, y/2$
12. x = 0.25y

(Solution d'un élève d'EB9)

Dans cette solution, l'élève ne prend pas en compte la condition donnée dans l'énoncé du problème que chaque sac contenait le même nombre de bonbons de même qualité (sinon il n'aurait pas pris des variables distinctes x et y pour les prix unitaires des sacs achetés par les deux filles). Les équations dans les lignes 7 et 8 de la solution suggèrent que l'élève sait que : $m = 2.5$ mais, soit il pense que Georges paie pour tous les bonbons, soit il perd le sens des expressions algébriques qu'il écrit et s'engage dans une manipulation formelle. Ses manipulations n'aboutissent à rien ; l'élève ne retourne plus à la situation du problème. Les manipulations contiennent aussi des erreurs. Dans la ligne 10 de la solution, l'élève « réduit » deux termes qui ne sont pas semblables : $2.5 - 3y$ devient $- 0.5y$. Le signe négatif disparaît dans la ligne suivante soit parce que l'étudiant voit que le prix ne peut pas être négatif, soit pour d'autres raisons. L'élève a clairement des difficultés en algèbre et c'est peut-être justement son effort de rester fidèle à ce qu'il perçoit comme les termes du contrat didactique qui le prive du pouvoir d'utiliser son bon sens et sa pensée rationnelle à lui (exactement comme le légendaire « Gaël » dont le cas a été à l'origine du concept même de contrat didactique (Brousseau & Warfield, 2001).

Dans l'exemple suivant, représentatif de 31/113 de solutions dans les classes EB9, l'élève choisit de prendre comme inconnue, qu'il nomme x, le nombre de bonbons dans un sac, mais forme une équation où x aurait plus de sens comme le *prix* d'un sac de bonbons. L'élève résout presque la même équation deux fois, prenant grand soin des transformations de passage, et vérifiant encore, à la fin, la solution. Ici aussi, l'algèbre prend toute la place et l'élève ne prend pas assez de temps pour analyser la situation. Contrairement cependant à la solution précédente, la suivante fait un retour à la situation après les calculs algébriques, mais ne prend en compte que l'état avant le partage.

> Soit x le nombre de bonbons dans un sac :
> $5x/3 = 2.5$
> $x = (2.5 \times 3)/5$
> $x = 1.5$
> $2x + 3x = 2.5 \times 3$
> $5x = 7.5$
> $x = 7.5/5$
> $x = 1.5$
> Avant le partage :
> Carole : $2 \times 1.5 = 3$
> Chantal : $3 \times 1.5 = 4.5$
> *(Solution d'un élève d'EB9)*

VI.3. Les solutions des élèves des classes SEC 1

La plupart des élèves dans les classes SEC 1 ont introduit des lettres dans leurs solutions, ce qui leur donnait une « allure algébrique ».

Beaucoup d'élèves (54/148) n'ont calculé que le prix d'un sac de bonbons. La plupart de temps, ils l'ont obtenu en résolvant l'équation $5x/3 = 2.5$. Une part presque égale d'autres (56/148) ont continué en calculant le prix d'achat de deux et trois sacs de bonbons, payés par Carole et Chantal, mais se sont arrêtés là.

L'erreur de décrire la variable x comme « le nombre de bonbons dans un sac » était moins fréquente (23/148) que dans les classes EB8 et EB9.

Ce n'est que dans les classes SEC1 que des solutions correctes sont apparues. Dans ces solutions, les élèves se sont finalement rendu compte que le partage équitable doit se faire proportionnellement à ce que Georges devait à chaque fille et non à ce que chacune a payé en achetant les bonbons. La nature du raisonnement dans ces solutions est essentiellement arithmétique (proportions), mais la notation utilisée pour l'exprimer est algébrique (équations) et présentant des non-sens relatifs aux quantités des deux côtés du signe d'égalité.

Par exemple, un des élèves a écrit (la numérotation des lignes a été ajoutée par les auteurs) :

1. x est le nombre de bonbons dans un sac, somme $5x$, chacun possède $5x/3$
2. Carole a donné $2x - 5x/3 = x/3$
3. Chantal a donné $3x - 5x/3 = 4x/3$
4. D'où : Georges a reçu $x/3 + 4x/3 = 5x/3$
5. $5x/3 \rightarrow 2.5$ d'où $x/3 = 2.5/5 = 0.5$
6. Carole reçoit 0.5
7. Chantal reçoit 2 *(Solution d'un élève de SEC 1)*

L'erreur de notation apparaît dans l'équation de la ligne 5 de la résolution : $x/3$ représente un nombre de bonbons alors que 2.5/5 représente une somme d'argent. Mais la flèche entre $5x/3$ et 2.5 suggère que l'élève considère une correspondance proportionnelle entre les nombres de bonbons et les montants. Donc, en fait, le raisonnement de l'élève serait mieux exprimé par un tableau de proportionnalité : comme $x/3$ est 5 fois moindre que $5x/3$, son coût va aussi être 5 fois moindre, donc il sera 2.5/5 = 0.5.

Nombre de bonbons	Coût (en $)
$5x/3$	$2.5
$x/3$	?

La combinaison de la place importante donnée aux équations dans l'enseignement secondaire à l'école libanaise avec attention insuffisante au sens du signe d'égalité, tant du point de vue structurel que sémantique (par rapport aux quantités impliquées), a pu être à la source de la formalisation incorrecte des relations dans le problème.

VII. Discussion de la validité et de la pertinence des résultats

Nous résumons les résultats dans le tableau des erreurs (Tableau 1) et celui des stratégies (Tableau 2).

Erreur	EB8 (N=141)	EB9 (N=113)	SEC 1 (N=148)	TOTAL (N= 402)
1- Manipulations arithmétiques ou algébriques sans aboutir à une conclusion relative aux conditions du problème.	141 (100%)	34 (30%)	15 (10%)	190 (47%)
2- Partage de $2,5 en deux parties égales	48 (34%)	8 (7%)	6 (4%)	62 (15%)
3- Georges couvre toutes les dépenses	45 (32%)	11 (10%)	0	56 (14%)
4- Équations de type: nombre de bonbons = somme d'argent	10 (7%)	8 (7%)	0	18 (5%)
5- Partage de $2,5 proportionnel aux sommes payées à l'*achat,*respectivement de 2 et 3 sacs de bonbons	0	31 (27%)	23 (16%)	54 (13%)
6- Solution réduite au calcul du prix unitaire d'un sac de bonbons	0	23 (20%)	54 (36%)	77 (19%)

Tableau 1. Erreurs dans les solutions

Les trois premières lignes du Tableau 1 indiquent une décroissance de la fréquence de certains types d'erreurs avec le niveau de scolarité. Comme nous l'avons indiqué dans « Le cadre de l'expérience », l'importance de réflexion critique sur les résultats de son travail croît avec le niveau de scolarité et juste « faire des manipulations » (erreur 1) ne suffit plus. L'erreur 2 du partage de $2.5 en deux parties égales reflète une lecture négligente et irréfléchie du texte du problème.

La fréquence de l'erreur, très prononcée dans EB8 (un tiers des élèves), diminue fortement en EB9 et disparaît au niveau secondaire. Le partage égal et l'hypothèse de la générosité remarquable de Georges facilitent beaucoup la solution du problème. Nous étions tentés de justifier cette explication en faisant appel au concept de « l'effet de contrat » (Brousseau & Warfield, 2001) – un problème qui doit être résolu en un temps restreint (30 minutes) doit nécessairement être facile – mais il s'agit ici aussi de l'interprétation que pourraient avoir les élèves des *coutumes* (Balacheff, 1988 ; Balacheff, 1999) ou *normes institutionnelles* au sens de (Ostrom, 2005) : les problèmes résolus en classe sont, d'habitude, *normalement*, possibles à résoudre en un ou deux pas. Le concept de coutume est beaucoup mieux adapté à rendre compte du mode de régulation du fonctionnement social de la classe, en même temps qu'il peut permettre de cerner le domaine de validité du contrat didactique. Peut-être aussi cette différenciation du contrat, auquel nous voyons un caractère local, élément clé du processus de dévolution, et de la coutume, qui régule le fonctionnement social de la classe dans la durée, permettra-t-elle de mettre un terme aux « malheurs du concept de contrat didactique » (dont parle Brousseau : Balacheff, 1988).

Une expérience plus longue avec des problèmes scolaires typiques peut augmenter la « conscience institutionnelle » des élèves. Ceci expliquerait, en particulier, les fréquences croissantes de l'erreur 6, qui pourrait être basée sur la croyance en caractère normatif de la stratégie, « dans les problèmes d'achat et vente, il faut toujours trouver le prix unitaire ».

L'erreur 5 (partage proportionnel aux quantités achetées) n'est pas apparue dans les classes EB8, car c'est une erreur déjà assez sophistiquée ; pour la commettre, il faut avoir pensé au partage proportionnel non-trivial (à parties inégales). Parmi ceux qui y ont pensé, l'erreur diminue en fréquence entre EB9 et SEC1. Comme les erreurs 2 et 3, ceci peut s'expliquer par une lecture plus attentive et réfléchie du problème par les élèves du secondaire.

La fréquence de l'erreur 4, où le signe d'égalité est posé en contradiction avec la sémantique des quantités comparées, est minime déjà en EB8 et diminue en EB9 pour disparaître en SEC1. Le signe d'égalité a donc déjà un sens d'identité pour la plupart des élèves en fin de scolarité obligatoire.

Le raisonnement arithmétique sur la proportionnalité, assez fréquent en EB8, l'est beaucoup moins en EB9 et disparaît au secondaire (Tableau 2). C'est l'utilisation d'une équation qui l'emporte de plus en plus avec le niveau de scolarité. L'efficacité de cet outil, comme nous l'avons vu dans le Tableau 1, laisse beaucoup à désirer. Le fait qu'en classe EB9, 74 des 113 élèves ont essayé de produire une solution algébrique pourrait s'expliquer par l'effet du contrat, car, au temps de l'administration du problème, le cours portait sur les systèmes d'équation à deux ou trois inconnues. Mais une norme plus générale pourrait être aussi en jeu : dès que l'on étudie une technique en classe, tous les problèmes doivent être résolus par cette technique. Ceci montre que l'hypothèse opératoire est valide.

Stratégie	EB8 (N=141)	EB9 (N=113)	SEC 1 (N=148)	TOTAL (N= 402)
Un tableau de proportionnalité apparaît dans la solution	60 (43%)	11 (10%)	0	71 (18%)
Une équation apparaît dans la solution	10 (7%)	74 (66%)	133 (90%)	217 (54%)
Une équation apparaît mais le raisonnement est basé sur la proportionnalité	0	10 (9%)	23 (16%)	33 (8%)
Le prix unitaire comme inconnue ; calcul par tableau de proportionnalité	0	34 (30%)	0	34 (8%)
Le prix unitaire comme inconnue ; calcul par une équation	0	31 (27%)	110 (74%)	141 (35%)
Nombre de bonbons dans un sac comme inconnue ; calcul par équation	0	7 (6%)	48 (32%)	55 (14%)

Tableau 2. Stratégies utilisées dans les solutions

Notre recherche montre la force des normes institutionnelles perçues par les élèves, et une tendance massive à interpréter comme typique tout problème présenté en classe, au risque de complètement changer son sens.

Si les élèves utilisent des lettres et le signe d'égalité dans une équation de manière formelle sans égard aux quantités qui y apparaissent ou comme une sorte de « sténographie » pour représenter des tableaux de proportionnalité, alors il est clair que l'algèbre telle qu'ils l'apprennent à l'école ne fonctionne pas, pour eux, comme outil de résolution de problèmes. Ceci montre que la finalité de l'enseignement de l'algèbre comme outil de résolution d'une classe de problèmes de même nature (ou type) n'est pas atteinte. Le traitement de la situation-problème située dans la zone délimitant le champ de l'arithmétique et le champ conceptuel de l'algèbre pose à des apprenants (dans la tranche d'âge déjà citée) des difficultés qu'ils cherchent de surmonter malgré la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Cela nécessite, de leur part, le recours à de multiples processus mentaux allant de la mémorisation au raisonnement, tout en analysant l'énoncé, afin de le modéliser en utilisant les informations pertinentes.

VIII. Conclusion

Dans ses déclarations, sinon dans ses actes, l'école d'aujourd'hui a l'ambition d'aider les élèves à développer des « compétences » (mathématiques et « transversales ») plutôt que d'acquérir des savoirs qui se laissent verbaliser, opérationnaliser et mettre dans des textes. Mais pour les élèves, la tâche principale est celle de devenir compétent en exerçant son métier d'élève et donc de se débrouiller dans les situations scolaires : discerner les règles ou lois (explicites), deviner les normes (implicites) du comportement d'élève et de se construire des stratégies permettant de survivre ou même réussir à obtenir ce que l'institution promet à ses « bons sujets ».

Nous revenons ainsi à la question éternelle de la didactique des mathématiques : comment enseigner les mathématiques institutionnalisées afin que les élèves apprennent les mathématiques et non seulement à fonctionner dans l'institution scolaire ? L'optimisme de ceux qui croient à l'existence d'une réponse positive à cette question repose sur la mise à l'écart d'une contradiction fondamentale : on n'échappe aux règles et normes d'une institution qu'au risque d'être classifié « mauvais sujet » et de manquer d'obtenir le seul produit que l'institution scolaire peut garantir, à savoir, certificat ou diplôme.

Bibliographie

BALACHEFF, N. (1988). Le contrat et la coutume : deux registres des interactions didactiques. *Actes du 1er Colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Marseille: La Pensée Sauvage.

BALACHEFF, N. (1999). Contract and custom: Two registers of didactical interactions. *The Mathematics Educator,* **9**(2), 23-28.

BEDNARZ, N., & Janvier, B. (1996). A problem-solving perspective on the introduction of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dortrecht: Kluwer.

BLUM, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education.* New York: Springer.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dortrecht: Kluwer.

BROUSSEAU, G., & WARFIELD, V. (2001). *Le cas de Gaël.* Téléchargé sur la page de Guy Brousseau: http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/CasdeGael.pdf

CHARBONNEAU, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 15-37). Dortrecht: Kluwer.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x,* **19**, 43-75.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.

GRUGEON, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multi-dimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(2), 167-210.

HARDY, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level calculus courses. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 341-358.

MEIRIEU, P. (1987). *Apprendre... oui mais comment.* Paris: ESF.

MEIRIEU, P. (2007). Interview de Philippe Meirieu: Vingt ans après. *Echanger, 81*, 5-8.

Ministère de l'Education Nationale. Liban. (1997). Décret numéro 10227: Curriculum national. *Journal Officiel*.

OSTROM, E. (2005). *Understanding institutional diversity.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

PEIRCE, C. (1955). *Philosophical writings of Peirce. Selected and edited, with an introduction by Justus Buchler.* New York, NY: Dover Publications (first published in 1940 by Routledge and kegan Paul, Ltd.).

RADFORD, L. (2003). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics 52*(2), 123-150.

ROBINAULT, K. (2008). *Théorie des Situations Didactiques 2. Cours Master 2.* Retrieved décembre 1, 2010, from Université Lyon 2, Master, Spécialité recherche, Didactique et Interactions: (http://icar.univ-lyon2.fr/equipe2/master/data/cours_A3S/Theorie_des_situations_2.pdf)

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 128-175). Orlando, FL: Academic Press, Inc.

VERGNAUD, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Bern: Peter Lang.

VERGNAUD, G., & DURAND, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie 36*, 28-43.