Dans les années soixante-dix Georges Reeb (1920-1993)
découvre l’analyse non standard dans un livre.

Il partage cette découverte avec Jacques Harthong.

Ils se questionnent ensemble sur le sens du terme
« non standard »

Ils trouvent des réponses dans l’histoire

et la philosophie des mathématiques,

en particulier dans l’intuitionnisme de

Brouwer (1881-1966) .

Mes Questions

- Pour le mémoire:
  - *Quel argument philosophique peut on mettre derrière l'Analyse Non Standard ?*
  - *En quoi se justifie un rapprochement avec la philosophie intuitionniste de Brouwer ?*

- Aujourd'hui avec vous:
  - *Je veux vous présenter ce petit bout d'histoire*
  - *Relever ce qui y est exemplaire et peut-être symptomatique d'un regard dogmatique sur les mathématiques*
  - *Réfléchir à comment favoriser le développement d'un regard ou une posture personnel sur les maths*

L'ANALYSE NON STANDARD

Une refonte rigoureuse du calcul infinitésimal

- Travailler avec des nombres formellement finis, plus petits ou plus grands que n'importe quel nombre standard.

- La version de Leibniz du 17ème siècle était attaquée sur son manque de rigueur.

  Les «fantômes de quantités disparues » (Berkeley, 1734)

- Le formalisme des limites en « Ɛ - ∂ » lui porta le coup de grâce.

Si $b = a + dx$ alors $|a - b| = |dx|$ et pour tout $\epsilon > 0$ on a $|a - b| < \epsilon$ donc $a = b$.

Fondation de l’Analyse Non Standard

- 1961: Abraham Robinson créé l’ANS
  - formalisation d’un calcul infinitésimal à partir de la théorie des modèles
  - Exploitation des « anomalies » de Skolem pour faire apparaître des « intrus »

- 1977: Edward Nelson simplifie l’ANS
  avec l’Internal Set Theory (IST)
  - Une vision purement syntaxique:
    un nouveau prédicat « st » et trois axiomes
  - IST contient ZFC

Une méthode qui a des applications

- Un regard qualitatif et de nouvelles procédures déductives.
- Des problèmes résolus, en particulier dans les mathématiques appliquées, (perturbations avec des équations différentielles: économie, mécanique quantique)
- Des résolutions simplifiées. Des procédures « orientées ordinateur » simplifiées. Car on peut « passer » du continu au discret.
- Quelques résultats (effets canards, moiré, phénomène de *peaking*, ...)

« une moyenne sur un ensemble assez grand à l’échelle du pas des réseaux considérés, mais assez petit pour refléter une propriété locale »

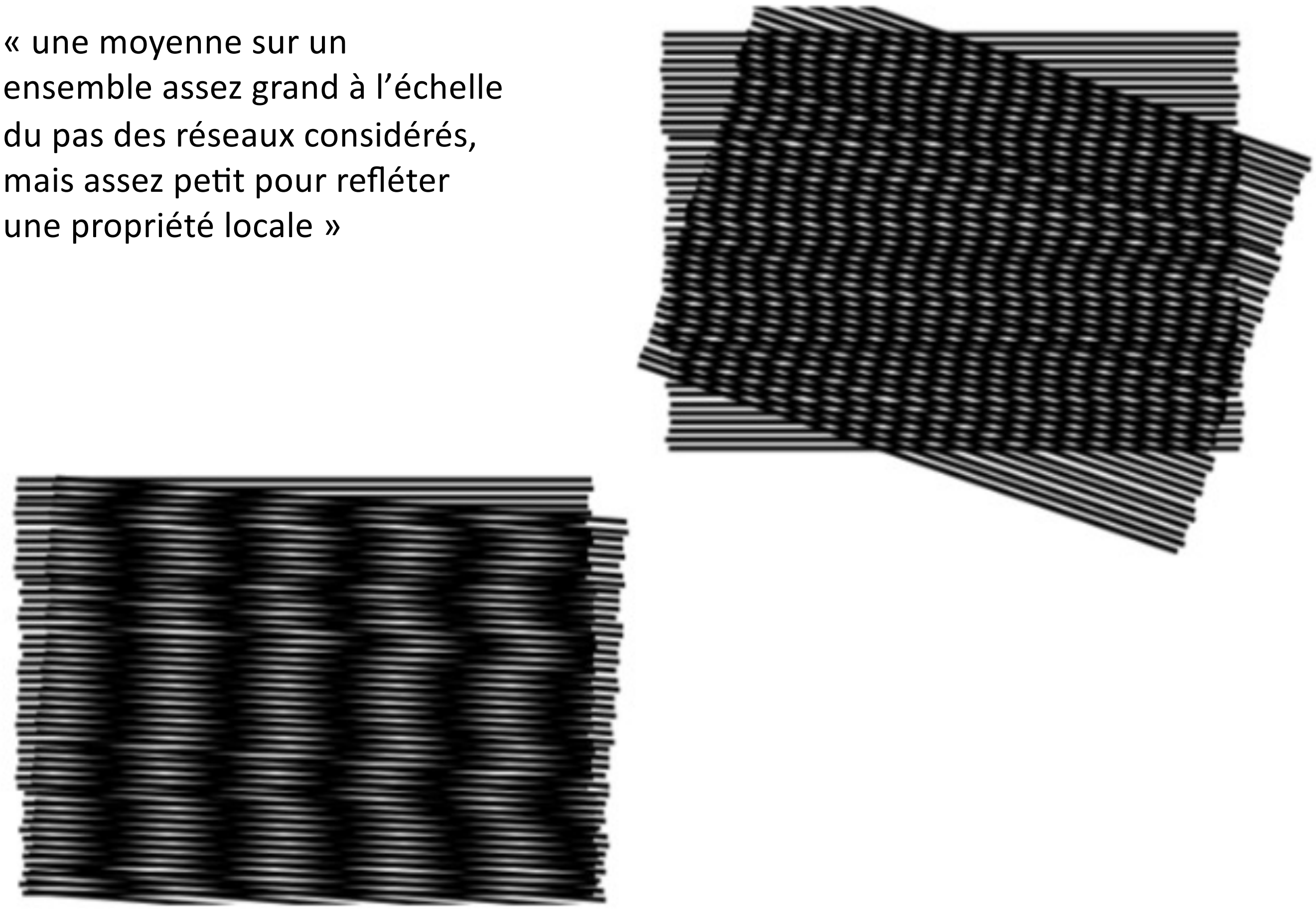

Fig 1. "Bandes" de Moiré (Image provenant de Lobry et Sari (2007))

Et pourtant marginale …

- Très peu connue, au point que ses utilisateurs continuent de la justifier …
- … alors que de nombreux domaines des sciences pourraient y jeter un œil.
- Pas enseignée, même si certains pensent qu’elle a des vertus didactique. (Sullivan, 1976 ; Keisler, 2012)

… souvent dédaignée et controversée

- C’est compliqué !
- Pourtant les logiciens y voit la première réalisation concrète de leur science.
- L’ANS n’apporte rien de plus que les mathématiques classiques.
- Des résultats, mais peu de résultats.
- Sociologie: à l’époque, les maths, c’est Bourbaki.

Ce que révèle l'accueil de l'ANS hier et encore aujourd'hui

- Début des années 80: L'affaire de l'UPR « fondement des sciences »

  Une « branche marginale » contestée par la commission

- Milieu des années 90: la création des Archives Poincaré

  « On compte sur toi pour ne pas ramener l'ANS à Nancy »

- Pendant mon mémoire, lors d'une réunion interdisciplinaire

  Surprise: Peut-on aujourd'hui évoquer sérieusement l'ANS ?

Quelques raisons.

- Pour Robinson, il est trop difficile de revenir « en arrière » sur une histoire « jugée »
- L'histoire des sciences souvent vue comme une somme des progrès
- Un paradigme majoritaire de la « Science Normale » au sens de Kuhn (1972)
- Il serait caricatural de penser le rejet de l'ANS tient uniquement à une forme de fermeture.

QUELS ARGUMENTS PHILOSOPHIQUES POUR CETTE FORMALISATION DE L'INFINI ?

Leibniz

Des nombres idéaux, fictions utiles qui peuvent servir *« comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme* $\sqrt{2}$ *) »*

« On ne diffère [pas] *du style d'Archimède »*

(Leibniz , 1701)

Source wikipedia

Robinson : un point de vue formaliste, pragmatique.

- « Infinitesimal quantities seems to appeal naturally to our intuition » (1966)

- « infinities are meaningless » (principe descriptif), mais pas moins que les nombres standards irrationnels construits formellement par Dedekind ou Cauchy.

- « but we have to continue our business » (principe prescriptif)

  « axioms implies no ontological committments »

- Les mathématiques sont une partie du langage « finalement arbitraires et seulement régulées par leur utilité à copier le monde empirique» (1970)

L’IST selon Nelson

- Un formalisme pur (i.e. sans aucun lien avec l’intuition) n’a pas lieu d’être.

  « Theorems are not about nothing » (2000)

- Pas d’ajout d’objet ontologique, le prédicat prend un « sens emploi »

- Constructivisme radical : « il n’y a pas d’autres nombres que ceux que les êtres humain construisent à l’occasion »

- « Le sens se trouve dans le travail et le monde des mathématiciens qui est humain, historique et collégial » (2000)

Quel sens pour les nombres non standard ?

- Les formalismes utilisés restent opaques :
  - Les nombres non standard sont issus d’une « anomalie » ou de choix axiomatiques.
  - Ils ne peuvent pas être rendus constructifs.

- Peut-on leur donner un sens au-delà du « sens emploi » ?

Le Constructivisme Non Standard de Reeb

« Les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ».

- Justification intuitionniste de l'existence des nombres non standard.

- Agir en constructiviste dans ZFC :

  Reeb veut reconstruire l'ANS à partir de son slogan.

- L'IST est une idéalisation de sa conception intuitive des entiers:

  Les nombres non standards sont « naturellement » candidats à s'intercaler entre l'infini potentiel des entiers naïfs et l'infini actuel de $\mathbb{N}$

L'INTUITIONNISME DE BROUWER

Brouwer dans l’histoire

- Il s’oppose à Hilbert dans la querelle sur les fondements (1920-1930)

- Formalisme : une mathématique non contradictoire

- Intuitionnisme/Constructivisme:
  - *Construction de l’esprit humain qui se base sur l’intuition*
  - *Un nombre doit pouvoir être construit et donc être accessible*
  - *Corolaire : Refus du tiers exclu sur des ensembles infinis*

Exemple de démonstration non constructive

Considérons par exemple la proposition suivante :

(P) : Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

La preuve classique de sa vérité est la suivante.

(i) Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, et dans ce cas nous avons les deux candidats a et b en question (tous deux égaux à $\sqrt{2}$).

(ii) Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel et dans ce cas nous poserons $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ alors $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ est donc rationnel et nous avons les deux candidats en question.

« la mathématique est une activité de l'esprit,
indépendante du langage,
qui a son origine dans l'intuition du temps »

- Les objets mathématiques existent par l'acte mental du mathématicien.

- Brouwer introduit le temps du mathématicien dans les mathématiques
  - *deux-ité*
  - *sujet créateur et suites de choix*
  - *Nombre pendulaire: un objet qui peut acquérir une propriété au cours de sa « croissance »*

Exemple de nombre pendulaire de Brouwer

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 & \text{tant que } P \text{ n'est pas décidée} \\ \alpha_k = \dfrac{1}{2^k} & \text{pour } k > n \text{ si } P \text{ est décidée entre } \alpha_{n-1} \text{ et } \alpha_n \end{cases}$$

Un tel nombre n’est ni rationnel ni irrationnel

Desiderata pour les infinitésimaux

(van Atten 2018)

- Le continu n’est ni intuitif, ni géométrique.
  - *« L’intuition mathématique est incapable de créer autre chose que des ensembles dénombrables d’individus »*
  - un point n’existe pas a priori, il est construit par le mathématicien.
- Les raisonnements doivent être constructifs.
- Les infinitésimaux devraient être de nature géométrique.

Premières conclusions

- L’analyse non standard n’est pas une théorie intuitionniste.

- Même s’il existe des connexions « techniques » …

  (Modèles de Robinson et modèle de logique intuitionniste, van Dalen 1988)

- … et des nombres non archimédiens en mathématique intuitionniste.

- Reeb ne prétend pas cela, il veut:

PORTER UN «REGARD INTUITIONNISTE » SUR L'ANS

Un « constructivisme non standard »

- Une vision **quasi-empiriste** des mathématiques :
  - les théories formelles sont falsifiables.
  - rapprocher les mathématiques des sciences naturelles via la méthode constructive: « ce qu'il y a de scientifique dans la mathématique, c'est l'articulation entre la théorie et cette réalité » (Harthong, Reeb, 1984)

- Il veut concilier intuitionnisme et **formalisme « bien compris »** :
  - « L'intuitionnisme est une entreprise complémentaire dont le but est d'établir des faits mathématiques indépendants de tout formalisme, afin de les comparer aux vérités établies par la théorie »
  - Le formalisme est nécessaire pour idéaliser les vues intuitives

Argument d’existence des nombres non standard

- L’intuitionnisme soulève une inadéquation entre entiers naïfs et entiers naturels: refuser le tiers exclus c’est accepter que « les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ ».

- Un candidat pendulaire non standard « à la Brouwer » :

$$\begin{cases} a = 0 & \text{si le théorème de Fermat n'est pas décidé} \\ a = x + y + z + n & \text{si on trouve } x, y, z, n \text{ tels que } x^n + y^n = z^n \end{cases}$$

Analyse critique

- a n’est pas commensurable avec les nombres standards, il est insaisissable.
- Pourquoi serait-il nécessairement supérieur à tous les entiers naïfs ?
- Cela revient à accepter que « l’inconnu » puisse formaliser l’infini.

Divergences avec Brouwer

- Reeb s'appuie sur un raisonnement « à la Brouwer » qu'il sort de son contexte.

- Leur appréhension de la réalité mathématique est différente.

Un regard ou une posture ?

- ***L'idée intérieure*** de Reeb selon Harthong: une posture antidogmatique.

« il s'agit d'un sentiment strictement personnel, qui permet au mathématicien de juger, de manière absolument subjective, ce qui est intéressant pour lui, ce qui est *sa voie* »

- Reeb raconte « à l'envers », parce que l'on ne l'a « pas cru à l'endroit », (Diener et Reeb, 1989). Mais du coup il semble recoller les morceaux.

- La richesse des idées de Reeb ne gagne pas à se revendiquer de l'intuitionnisme.

L'idée intérieure de Reeb

- « Utiliser les idées de Robinson pour calculer comme les physiciens » (Harthong, 1994)
  « Faire des mathématiques avec des yeux de géomètres (Lutz, 1994)

- À l'instar de Poincaré:
  Résoudre des problèmes qui se posent et pas seulement ceux que l'on se pose.

- Être « de ceux qui ne croient pas qu'on puisse une fois pour toutes enfermer la mathématique dans un dogme figé » (Harthong, Reeb, 1984)

Implique forcément un biais

- Posture anti-establishment : lutte contre la suprématie des normaliens

- Vous avez dit provocateur ?

  « Le rêve de Georges était de lancer une idée (…) qui n'émane pas des institutions établies (…) mais aurait même rencontré leur hostilité, de sorte qu'ensuite, éventuellement, son succès les fasse enrager. » (Harthong, 1994)

BON D’ACCORD, ELLE EST SYMPA TON HISTOIRE (QUOIQU’UN PEU COMPLIQUÉE) MAIS ON EN FAIT QUOI ?

OSONS LA POLITIQUE ! FAISONS DE LA PHILOSOPHIE !

De la politique en mathématiques ?
Ou comment se débarrasser des discours alternatifs

- Hilbert vs Brouwer

- « L'école intuitionniste, dont le souvenir n'est sans doute pas destiné à subsister qu'à titre de curiosité historique » (Bourbaki, 1960)

- Réaction vis-à-vis de l'ANS

- René Thom et la théorie des catastrophes

« Toute méthode [qui encourage l'uniformité] (…) impose un conformisme obscurantiste, et parle de vérité; elle mène à des dégradations des capacités intellectuelles et de la puissance d'imagination, et parle de profonde perspicacité; **elle détruit le don le plus précieux des jeunes – leur immense puissance d'imagination – et parle d'éducation.** »

« La variété des opinions est indispensable à une connaissance objective. »

Paul Feyerabend,

Contre la méthode, Esquisse d'une théorie anarchiste de la connaissance. (1975)

La politique en mathématiques ?
Ne nous laissons pas écraser !

- Harthong dénonce « l'idéologie de l'expert », parce que c'est qu'ainsi qu'on forme les futurs mathématiciens: travailler selon une « mode », sans réfléchir à son fondement: être efficace sans s'embarrasser de questions existentielles.

- Un message qui s'applique aussi bien aux problématique de recherche et de formation dans l'enseignement !

- Attention toutefois à ne pas biaiser ses propres choix par une posture plus que par une réflexion.

DU REGARD À LA PRATIQUE

QUELLES PISTES ?

Pour une pratique scientifique réflexive

- Refuser le dogme et l’uniformisation: « définir c’est mettre en cage ».
- Considérer que les mathématiques font partie des sciences.
- Renoncer à ce que la science soit toute puissante : « il y a de la place pour le doute ! »
- Être ouvert à toute question et au fait qu’elle n’a pas forcément de réponse.

Pour une pratique créative
Les arts et les lettres n'ont pas le monopole !

- Parler des choix dans la pratique des mathématiques
  - *La modélisation (au sens de R. Cabassut) est une bonne piste pour ce travail*
  - *Ne pourrait-on pas jouer avec les définitions ?*

- Encourager la créativité (Patterns, Spirolatère, etc.)

- Croiser les regards (vive l'Irem ! Même si ça manque parfois de philo à mon goût ;)

Histoire et vulgarisation des mathématiques:
un mariage nécessaire, mais pas toujours heureux …

- Eviter les poncifs platoniciens sous prétexte de vulgarisation:

  Voyage au pays des maths: *« Il suffit d'un guide et de regarder le paysage »*

  « parce que l'infini <u>existe</u> en plusieurs tailles» ; ….

  Moi je préfère ***la philo en petit morceaux***

  (voir par exemple *« les escargots font-ils des maths ? »)*

- Eviter de succomber toujours au charme de l'anecdotique, du légendaire, que l'histoire des sciences et ses acteurs ne deviennent pas une nouvelle bible.

Philosophons en Mathématiques:
s’ouvrir, accepter la divergence de vue, écouter sans toujours savoir préalablement où l’on va.

Engager la discussion et la réflexion personnelle des élèves sur les concepts ?

Quelques sujets:

- *le statut du nombre*
- *l’infini*
- *la vérité*
- *la nature des objets géométriques*

… peut-être que tout cela nécessite un peu de formation/initiation ?

Et comme philosophie rime avec aporie,
je tiens à autodétruire mon plaidoyer en une sentence :

« Donc tu veux imposer le dogme de l'anti-dogme ? »