Un Problème d'optimisation

Version de travail, non finalisée et non testée

— Durée de l'activité : 2h00 (à poursuivre à la maison dans le cadre d'un devoir à la maison éventuellement)

— Pré-requis : Identités remarquables.

— Objectif : Calcul littéral, travail sur la notion de minimum (introduction ou consolidation), renforcer la conception de fraction en tant que nombre.

— Place du logiciel de calcul formel : Le logiciel réalise un travail technique fastidieux à la place de l'élève. Il est préférable de l'avoir déjà utilisé dans ce cadre (voir TP « Arithmétique et raisonnement avec Xcas » par exemple)

— Déroulement : Le professeur propose un des énoncés aux élèves. S'en suit une mise en commun des résultats. L'enseignant pose alors une question pour motiver la recherche de la plus petite valeur possible (note pour le lecteur, le minimum est 4). S'en suit une phase de recherche à l'issue de laquelle il est probable que le minimum apparaisse sous forme d'une conjecture et il est souhaitable que le recours au calcul littéral pour la démontrer soit mis en avant par les élèves. Si on souhaite utiliser la tableur pour aider à la conjecture, privilégier une génération aléatoire des nombres a et b.
La preuve étant délicate, l'enseignant doit accompagner les élèves.
Plusieurs pistes sont possibles.

— Quelques remarques :
- Pour l'enseignant, il sera utile de se référer à l'analyse a priori proposée dans un autre document sur le site de l'IREM.
- Plusieurs énoncés (plus ou moins ouverts) sont proposés.
- Pour ceux qui ont fini plus tôt, on peut demander de rendre le produit le plus grand possible.

■ **Première Partie :** L'objectif est de cette première partie est de faire conjecturer le minimum aux élèves

Enoncé 1 : Choisir des nombres strictements positifs. On s'intéresse au produit de leur somme par la somme de leurs inverses. Peut-on rendre ce produit le plus petit possible ?

ou

Enoncé 2 : On s'intéresse au produit de la somme de n nombres réels strictement positifs par la somme de leurs inverses. Pour n fixé, peut-on rendre ce produit le plus petit possible ?

Il faut amener les élèves à faire des essais (des pistes s'il n'y arrivent pas : utiliser un tableur, proposer un programme de calculs qui explicite le calcul à faire)
A ce stade, il faut faire émerger au niveau des élèves que pour comparer il faut un même nombre de réels et commencer par le cas le plus simple, c'est-à-dire deux nombres réels strictement positifs. On arrive alors à l'énoncé suivant :

L'objectif est de minimiser $S = (a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ où a et b sont des nombres réels > 0.

■ **Deuxième Partie :** Démonstration, proposition de déroulement, on y traite d'abord un "lemme" qui sera utile pour la suite.

1) Montrer que pour tous nombres réels a et b, si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.
<u>*Aide :*</u> *On rappelle que* $x \geqslant y \iff x - y \geqslant 0$.

2) **a)** Montrer que pour tous nombres réels a et b, si $a > 0$ et $b > 0$, alors $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.
b) Quelle(s) information(s) nous donne la question précédente concernant le minimum de S ?
c) Trouver deux réels a et b tels que $S = 4$. Conclure.

3) Vers une généralisation

a) Minimiser $S = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

— Développer S à l'aide de Xcas.

— Regrouper les inverses et conclure.

b) Minimiser $S = (a+b+c+d)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right)$ où a, b, c et d sont des nombres réels strictement positifs.
c) Quelle conjecture peut-on faire concernant le produit entre la somme de n réels strictement positifs et celle de leurs inverses ?