Deux exemples de situations de recherche pour la classe

Denise GRENIER,
Équipe *Combinatoire et Didactique* Institut Fourier
ERTé « Maths-à-modeler » et I.R.E.M. Université Joseph Fourier, Grenoble

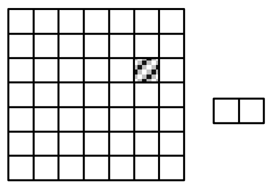
Introduction

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer des conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale ... Les *savoir-faire* associés sont constitutifs de la démarche scientifique et sont nécessaires pour faire des mathématiques. Ils ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes et nécessitent un vrai apprentissage sur le long terme.
Les programmes scolaires en mathématiques du primaire et du secondaire à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'expérimentation, la découverte et la qualité de l'activité scientifique en classe, liées à la possibilité d'étudier des conjectures, de raisonner et de prouver. Cependant, pour que les élèves puissent s'investir dans ce type de problème, il est essentiel que les notions mathématiques sous-sous-jacentes ne soient pas complexes pour eux.
L'équipe « combinatoire et didactique » de l'Institut Fourier et l'ERTé Maths-à-Modeler construisent et étudient depuis plusieurs années des situations de recherche pour la classe (SiRC), pour tous niveaux de connaissances. En voici deux exemples, la première est pertinente du primaire au doctorat, le seconde à partir du collège.

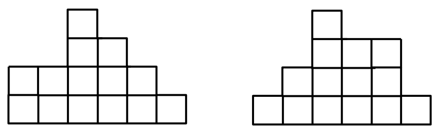
1. Pavage de polyminos

Les trois problèmes ci-dessous constituent à notre avis une situation fondamentale pour le raisonnement et la preuve. Elle est utilisée dans différents cursus d'enseignement depuis une quinzaine d'années. On en trouve des analyses détaillées dans Grenier et Payan (1998 et 2003) et Grenier (2006 et 2007). Chacun des trois problèmes contient un ou des paramètres laissés à la charge de l'élève (variables de recherche).

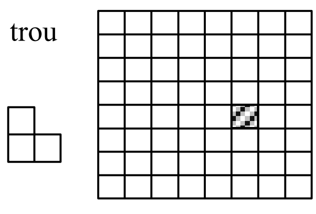
Problème P1. Etant donné un polymino (grille carrée) de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino.
Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou (case hachurée).



Problème P2. A quelles conditions un trapèze de taille quelconque est-il pavable par des dominos ? Voici deux exemples de trapèzes.



Problème P3. Etant donné un carré de taille 2^n, n quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des triminos coudés ?
Ci-contre, un cas particulier avec n=8 et une position particulière du trou (hachuré).



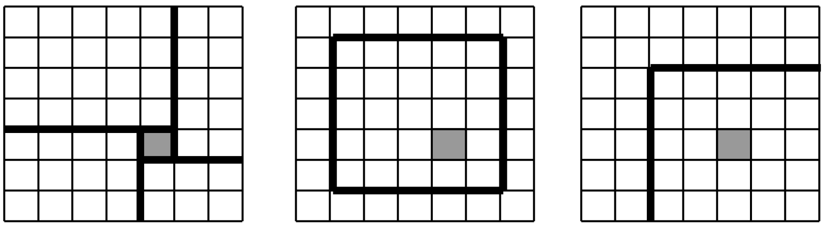
Eléments d'analyse didactique

Le problème P1 permet d'introduire un type de question peu familier de la grande majorité des élèves et des enseignants. La résolution de P1 permet d'introduire des définitions de base (pavage, pavé, aire), des outils spécifiques (partition, coloration) et d'établir des propriétés de base sur le pavage des polyminos qui serviront ensuite pour les problèmes P2 et P3. L'étude des carrés de petites dimensions (taille $n \leq 7$) conduit à faire des constats, puis établir des propriétés ou des conjectures, qui doivent être exprimées en terme de condition nécessaire (CN) ou suffisante (CS) et pour lesquelles on peut établir des preuves, plus ou moins complexes (preuve par exhaustivité des cas, preuve par l'absurde et « forçage », preuve d'existence en exhibant un exemple).

On aboutit la plupart du temps à la ***conjecture pour n quelconque*** suivante :

> *Repérons les cases par deux coordonnées entières, à partir d'un coin du polymino (par exemple le coin en bas à gauche), et en commençant par (1,1)).* ***Pour n quelconque, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une case ayant une position paire-paire ou impaire-impaire dans le polymino.***

La preuve de la condition suffisante peut se faire par induction ou par une partition du polymino, cette dernière étant compréhensible par des élèves de primaire. Exemple ci-dessous pour n=7.



La preuve de la condition nécessaire nécessite un autre outil (la coloration en damier) qui en général n'émerge pas des travaux de groupes.

Quelques aspects du travail mathématique que l'on peut faire avec ce problème

• Dans la preuve de la conjecture pour les premières valeurs de n, puis n quelconque, les outils (coloration et notion de « polymino équilibré ») pour établir la CN ne sont pas les mêmes que ceux qui servent à établir la CS (décomposition ou récurrence). Pour cela, P1 est un bon problème pour discuter de la différence entre une CS et une CN, alors qu'il s 'agit d'une CNS (condition nécessaire et suffisante).

• La recherche des implications entre les trois propriétés relatives à des polyminos « aire paire », « équilibré[1] » et « pavable par des dominos » conduit dans le cas général à des implications strictes. Pour les carrés ou rectangles sans trou, tout est équivalent. Pour les carrés ou rectangles tronqués d'une case, une équivalence et une implication stricte.

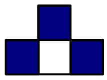
• La notion d'adjacence joue ici un rôle fondamental pour résoudre P1. Elle permet de transformer la coloration en un outil de preuve efficace. Dans nos expérimentations, nous avons constaté que la résolution de P1 permet de la faire émerger lors des essais successifs de pavage. En effet, pour un polymino non pavable, on peut observer qu'à chaque fois, les tentatives avortées de pavage s'arrêtent sur deux cases isolées de même couleur.

• Plusieurs prolongements du problème P1 émergent chez les élèves : la résolution de la question de départ amène d'autres questions (par exemple, la question du pavage des rectangles sans trou par des dominos).

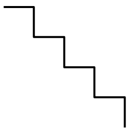
[1] C'est-à-dire ayant le même nombre de case blanches que de cases noires dans une coloration en damier (Grenier 2006)

Problème P2. Pavage d'un trapèze par des dominos

L'analyse de ce problème est détaillée dans Grenier 2006. Nous rappelons ici les résultats essentiels. En réutilisant des propriétés et des outils établis lors de la résolution du problème P1, en particulier la propriété 4, on peut affirmer que « Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit pavable par des dominos est qu'il soit équilibré (il est donc d'aire paire) ».
Mais existe t-il des trapèzes d'aire paire et non équilibrés ? La réponse est oui, il y a des exemples simples, dont celui-ci :



En étudiant des cas particuliers de trapèzes, d'aires petites, on peut établir facilement la propriété suivante: « Si un trapèze a tous ses paliers ou toutes ses colonnes paires, alors il est pavable ». La preuve est évidente.
On peut aussi établir que « tout trapèze ayant uniquement des marches de 1 sur 1 de chaque côté est non pavable ».



Après un temps de recherche et de manipulation, on arrive à la ***conjecture*** suivante.

Tout trapèze équilibré est pavable par des dominos.

La preuve de cette conjecture est difficile. Souvent, des preuves fausses sont données, provenant d'un raisonnement inductif incomplet. Cependant, l'étude expérimentale conduit à la recherche d'un algorithme de pavage, seul moyen de se convaincre de la possibilité ou non de paver un trapèze donné. En fait, la preuve est basée sur un algorithme qui consiste à « déconstruire » le trapèze d'une manière précise conduisant à une preuve par induction. Nos expérimentations montrent que l'intervention de l'enseignant ou de celui qui gère la situation est en général nécessaire dans cette dernière phase. Cette preuve est très intéressante pour comprendre ce qu'est un algorithme et aussi ce qu'est le raisonnement inductif. Il est détaillé dans Grenier 2006.

Problème P3. Pavage d'un carré de taille 2^n avec des triminos en L

Ce problème a été décrit dans Grenier et Payan (1998). Nous n'en donnerons ici que quelques éléments. On peut établir très facilement que la condition «pour un polymino quelconque, l'aire est un multiple de 3 » est nécessaire. La preuve est évidente. En revanche, il est difficile de savoir si cette condition est suffisante ici (elle ne l'est pas sur le carré 3x3, mais 3 n'est pas une puissance de 2) . L'étude de petits cas (n=2 ou 3) conduit à la ***conjecture*** suivante :

Tout polymino carré de taille 2^n est pavable, quelle que soit la position du trou.

On peut faire une par induction, plus ou moins formelle selon les niveaux. Mais il existe aussi une preuve accessible sans la récurrence, basée sur une partition du polymino en polyminos plus petits (rectangles sans trous) pavables.

Ce dernier problème met en jeu des aspects de la récurrence non usuels dans l'enseignement et qui se révèlent souvent déstabilisants, même au niveau L3. En particulier :
- P(n) est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction analytique de n
- P(n) s'exprime avec un « quel que soit » (la position du trou) qu'il faut gérer dans la recherche de l'hérédité
- La valeur initiale de la récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité (elle ne sort pas d'un chapeau !)
- La preuve fournit un algorithme de pavage (comme dans le problème P2), qui se révèle nécessaire, car si on pave au hasard, on a très peu de chance d'arriver au bout.

2. La chasse à la bête (optimisation dans les entiers)

Cette situation, inventée (dans un objectif de vulgarisation) à l'occasion d'une thèse en mathématiques discrètes[2] et régulièrement proposée par l'équipe maths-à-modeler, a été étudiée dans le cadre d'un mémoire de master2 de didactique (Chassan, 2009), dans des classes de primaire (CE2, CM1 et CM2) et dans un groupe de PE2. Elle est intégrée dans des cursus optionnels à l'Université.
Le problème général est le suivant.

> On se donne un grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), ***pour chaque type de bêtes,*** quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? On ne mélange pas les types de bêtes.

Le matériel fourni est le même que pour la situation des pavages, et le champ choisi dans cette situation est un carré 5x5. Les pièges sont des uniminos (recouvrent une case), les bêtes sont des dominos et les deux types de triminos.

Ces problèmes sont accessibles dès le primaire et restent pertinents jusqu'à la fin de l'université. L'optimum (minimum) cherché est un entier que l'on obtient par des encadrements successifs de plus en plus serrés. Comme on travaille dans les entiers, le nombre d'étapes est fini.

Eléments de résolution

Pour chercher l'optimum, il faut proposer un ensemble de pièges (nombre et positions sur le polymino), vérifier que cet ensemble est solution (c'est-à-dire protège bien le champ), puis étudier s'il réalise le minimum. L'expérimentation avec du matériel manipulable est nécessaire car celui-ci permet de changer facilement les positions et le nombre de pièges (indispensable pour résoudre le problème) sans que ce soit fastidieux.

Dominos

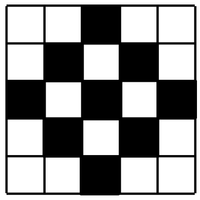
Deux solutions apparaissent très vite : l'une à 13 pièges, l'autre, meilleure, à 12 pièges (chacune correspondant à poser un piège une case sur deux, avec une case de départ différente). Elles sont toutes les deux minimales, c'est-à-dire que si on enlève un piège à la configuration, le champ n'est plus protégé. On peut donc mettre en évidence la différence entre ensemble minimal et ensemble minimum.
Il reste à prouver que 12 est le minimum (ou que 11 pièges ne suffisent pas à protéger le champ). Une preuve convaincante consiste à montrer que l'on peut poser 12 bêtes à la fois dans le champ sans chevauchement, ce qui implique que « 12 pièges sont nécessaires » pour le protéger. L'optimum cherché est donc N=12, et il s'obtient en deux étapes : N≤12, puisqu'on avait trouvé une solution à 12 pièges et N≥12, puisqu'on peut poser 12 dominos à la fois.

Ce premier problème permet de travailler les liens entre les expressions langagières *au plus n, au moins n, n suffisent, n sont nécessaires*, n *est une borne inf, n est une borne sup*, et les symboles ≤, ≥. Ce travail est poursuivi dans les deux autres problèmes.

[2](Eric Duchêne, thèse de l'UJF, 2006)

Triminos longs

L'optimum là aussi s'obtient par encadrements successifs par des entiers, la résolution consistant à réduire cet intervalle à une seule valeur. La recherche de solutions aboutit à différentes configurations. Il est relativement facile de trouver des solutions à 10 pièges, puis à 9 pièges.

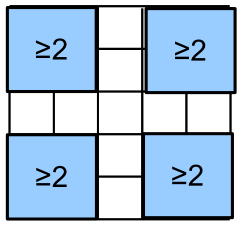


Voici une solution à 9 pièges, elle est minimale (si on enlève un piège, le champ n'est plus protégé). Pour savoir s'il existe une solution avec 8 pièges, il faut tout enlever et recommencer.

D'un autre point vue, si on cherche combien de bêtes peuvent se poser dans le même temps sur le champ , on trouve facilement la réponse « au moins 7 ». Il s'agit ensuite de trancher entre 7 et 8, ce qui peut prendre un peu de temps. Finalement, en cherchant un peu plus, on peut vérifier qu'il est possible de poser 8 triminos longs disjoints sur le polymino 5x5, ce qui prouve que N=8.

Triminos en L

Avec le même type de stratégie expérimentale, on obtient en général au bout d'un peu de temps l'intervalle $8 \leq N \leq 10$. Le nombre cherché est donc 8, 9 ou 10. La réduction de l'intervalle est ici plus difficile, car on ne peut poser plus que 8 bêtes à la fois sur un 5x5, le nombre de cases couvertes étant déjà au maximum (24 cases). On ne peut donc espérer augmenter la borne inférieure de cette manière.
Une méthode efficace consiste alors à utiliser le fait que cette bête « coûte cher », puisque pour protéger un carré 2x2, il faut au moins 2 pièges. On place le maximum de carrés 2x2 (évidemment disjoints, sinon on ne peut pas mener le raisonnement correctement), comme ci-contre par exemple. Il reste alors une zone en croix à protéger qui nécessite au moins un piège (on ne peut en dire plus ici). Mais on sait maintenant que 8 ne suffisent pas et N est 9 ou 10. En affinant le raisonnement, on peut prouver que N=10.



3. Les apprentissages en jeu dans les deux situations

Existence ou non de solutions. En classe, tout problème a une solution, souvent unique. Ici, dans la situation de pavage des polyminos, dans P1, l'existence de solutions dépend de la position de la case manquante (qui est une des variables de recherche), tandis que dans P2, des solutions existent dès que le polymino vérifie une condition (trapèze équilibré). P3, lui, admet des solutions dans tous les cas (quelle que soit la position de la case manquante).
L'existence d'une solution minimum dans la situation de la chasse à la bête se pose différemment : puisqu'on est dans les entiers, il en existe nécessairement un, mais lequel ?

Distinction entre « condition nécessaire » et « condition suffisante ». Dans ces problèmes, les CN ne sont pas toujours suffisantes et vice-versa. De plus, si une condition est une CNS, alors la preuve de sa nécessité peut être très différente de celle de sa suffisance (exemple typique dans le problème 1). On a vu aussi les liens entre les inégalités ≤/≥, borne sup/borne inf et CS/CN dans la chasse à la bête.

Différents types de preuve et outils de preuve non usuels. Le pavage des polyminos permet d'aborder des types de preuve variés : par l'absurde, par contraposée, par récurrence, mais aussi des preuves moins usuelles en classe : « par exhaustivité des cas », ou par « exhibition d'un exemple » (en réponse à une question d'existence). Enfin, on y rencontre des preuves d'un type nouveau, telles la structuration ou partition d'une figure, ou la coloration (liée à la coloration des graphes de grille).

Les notions mathématiques. Elles concernent essentiellement les propriétés de N, l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, avec des niveaux d'approche différents selon les problèmes : calcul d'aires, divisibilité de deux nombres, preuve par récurrence, encadrement d'un entier par des entiers.

Quelques références

Chassan G. (2009), *Apport des situations de recherche à l'apprentissage des « savoirs transversaux »*, mémoire de master2 didactique des sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble.
Grenier, D. (2008), *Expérimentation et preuves en mathématiques*, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).
Grenier, D. (2007), Des « situations recherche » pour la transition secondaire/université, actes du colloque EMF 2006 Sherbrooke.
Grenier, D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ*), Sherbrooke, juin 2006.
Grenier, D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.*
Grenier, D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Vous pouvez ausis visiter, pour d'autres situations originales pour la classe, les deux sites :

maths-à-modeler	mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/
et IREM de Grenoble	www-irem.ujf-grenoble.fr/