

La situation des réseaux de tri

Un exemple pour faire émerger le concept de généricité

Thibaut TROUVÉ

Séminaire d'automne de l'IREMI

12 décembre 2025

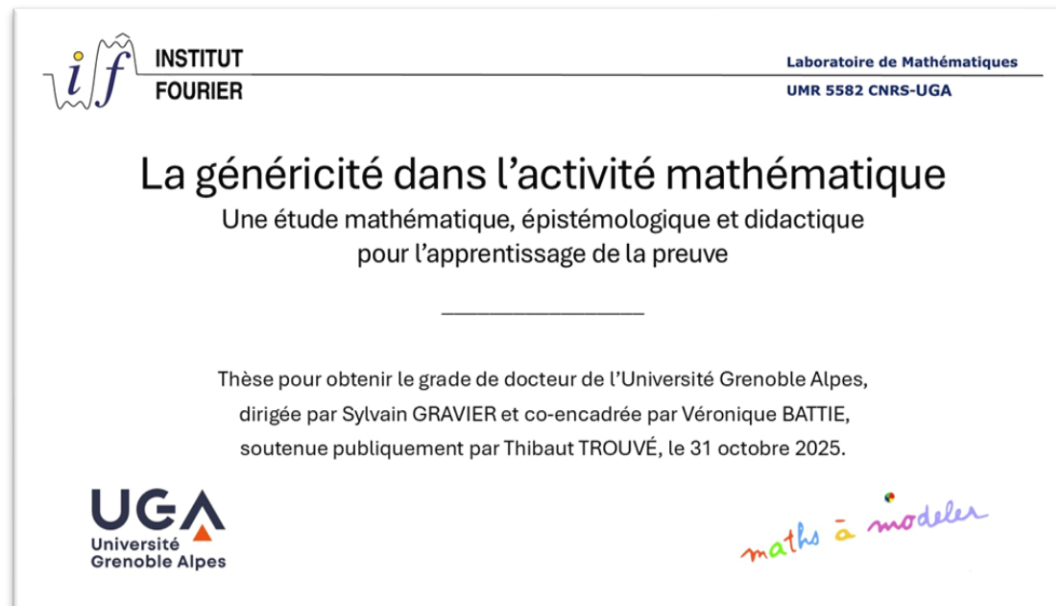
Des rencontres qui ont façonné ma recherche...

Avec **Michèle GANDIT** et **Sylvain GRAVIER** (UGA) en 2020

↪ *Situations de Recherche pour la Classe, preuve et problème de Wang*

Avec **Véronique BATTIE** (UCBL1) en 2022

↪ *preuves et exemples génériques*



Et maintenant : post-doctorat supervisé
par **Cécile OUVRIER-BUFFET** (UPEC)

↪ *SiRC, institutionnalisation, heuristiques*

Les trois dimensions de ma recherche de thèse

Construction d'une définition de la généricité

Dimension mathématique et épistémologique

↪ la généricité est un savoir transversal mobilisé dans la résolution de problème

Confrontation avec les travaux didactiques et l'institution scolaire

Dimension didactique

↪ la généricité ne vit pas dans l'institution scolaire et n'est pas identifiée par la recherche

Conception d'une situation d'apprentissage faisant émerger la généricité

Dimension mathématique et didactique

↪ la généricité peut émerger en situation de résolution de problèmes en L1.

Menu du jour

Objectif de cet exposé-atelier : vous présenter la situation des *Réseaux de tri* et ses enjeux d'apprentissage liés à la généricité.

Organisation de la séance :

1. Vivre la situation
2. Mise en commun
3. Apports mathématiques et didactiques sur la généricité

1.

Vivre la situation

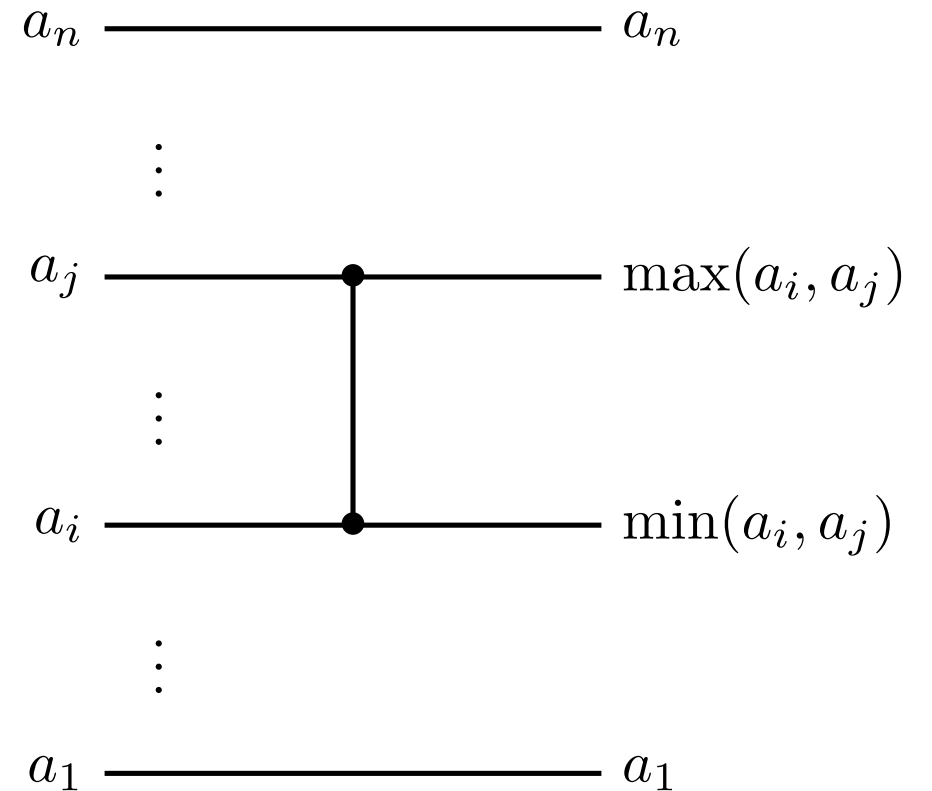
Environ 50 minutes, en groupes de 3

Énoncé du problème

Un *réseau* est un ensemble de n fils (représentés par des traits horizontaux) et de comparateurs (représentés par des traits verticaux), prenant en entrées des nombres $a_1, \dots, a_n$ où $a_i \in \mathbb{A}$.

Chaque comparateur réordonne les valeurs associées aux deux fils qu'il relie selon la règle suivante :

Un réseau est un *réseau de tri* s'il permet de trier par ordre croissant (le plus petit nombre est situé en bas) toutes les entrées possibles composées d'éléments de $\mathbb{A}$.



Énoncé du problème

Le problème général que l'on se pose est de savoir, étant donné un réseau, s'il s'agit ou non d'un réseau de tri.

Q1. Les réseaux $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$, $\mathcal{R}_6$ et $\mathcal{R}_7$ sont-ils des réseaux de tri ?

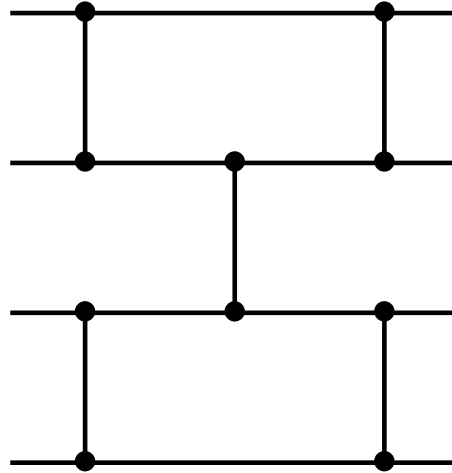
Q2. Plus généralement, donner des conditions pour qu'un réseau soit un réseau de tri.

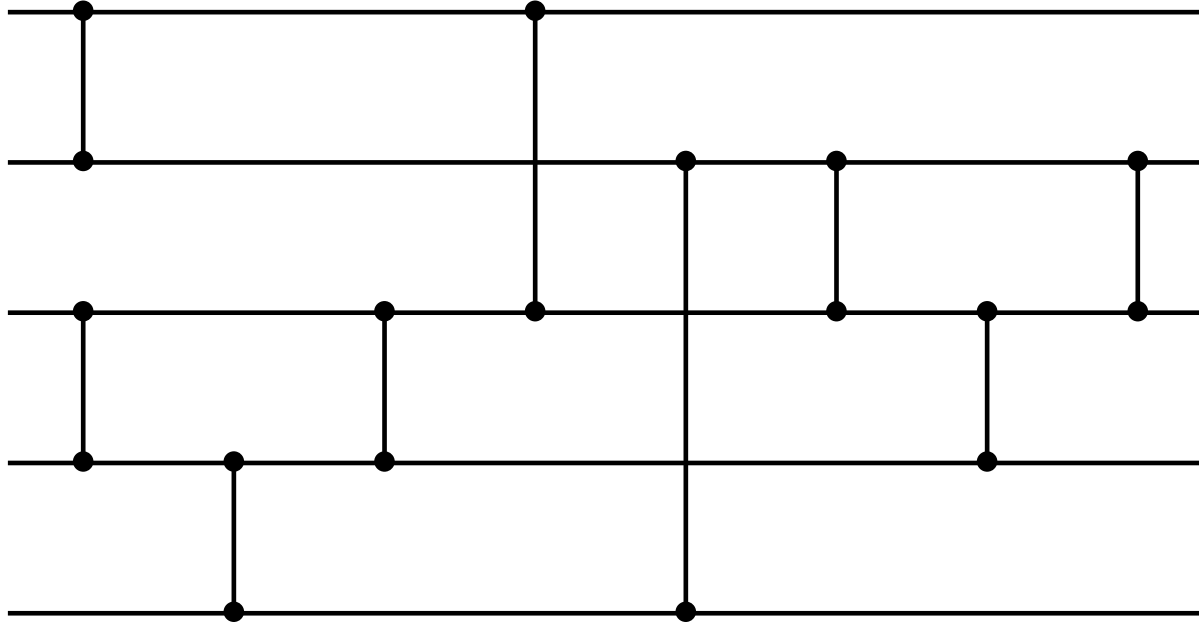
On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbb{A} = \{0,1\}$.

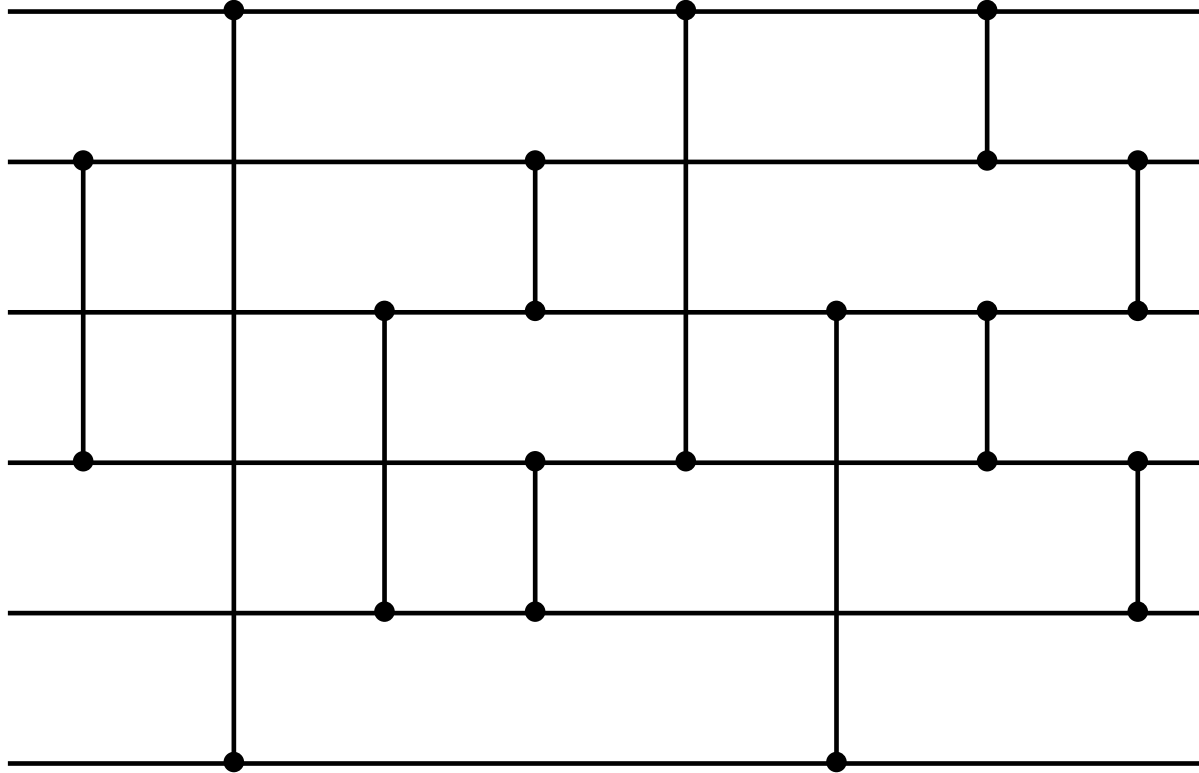
2. Mise en commun

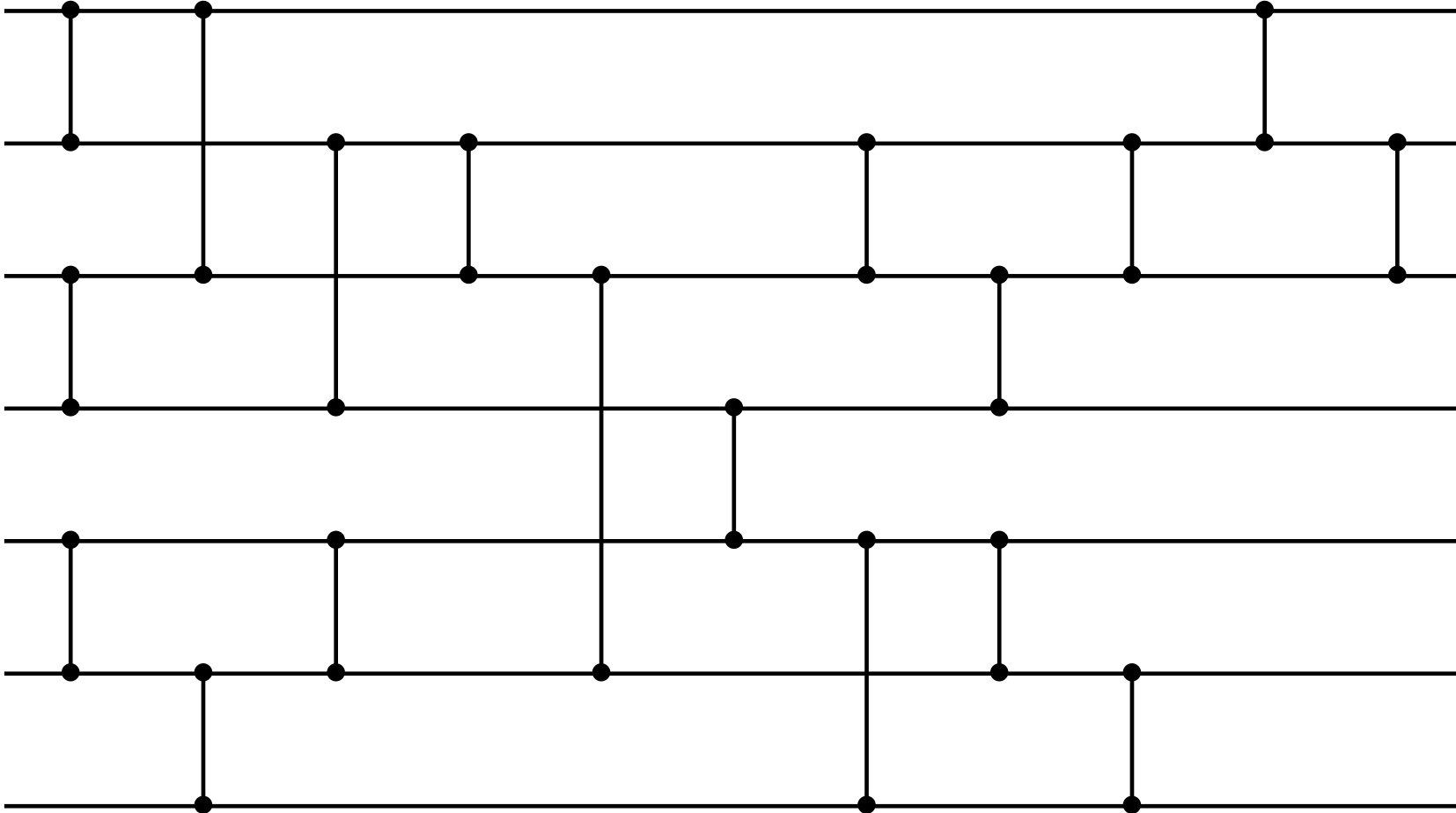
Mise en commun

Un mot sur le **cheminement**, les **idées clés** et les **résultats** de votre recherche

$\mathcal{R}_4$ 

$\mathcal{R}_5$ 

$\mathcal{R}_6$ 

$\mathcal{R}_7$ 

3.

Apports mathématiques et
didactiques sur la généricité

Sur le problème en jeu

Le problème de correction d'algorithmes de tri décrits par des réseaux

- $\in \{\text{problèmes de correction}\} \subset \{\text{problèmes de décision}\}$
- est lié à d'autres problèmes (construction ou optimisation de tels réseaux)
- relève de la recherche contemporaine (Knuth, 1998) en mathématiques discrètes

« les mathématiques discrètes (...) sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales » (Villani & Torossian, 2018, p. 36)

- est facile d'accès (Bell, *et al.*, 1998 ; MÉER, 2016) et sa résolution ne nécessite aucun prérequis notionnel

Bell, T., Witten, I. H., & Fellows, M. (1998). *Computer Science Unplugged... off-line activities and games for all ages*.

Knuth, D. E. (1998). *The Art of Computer Programming* (T. 3). Addison-Wesley.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016). *La machine à trier*. <https://eduscol.education.fr/document/16942/download>

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. <https://www.education.gouv.fr/media/11072/download>

Deux modes de validation disponibles...

Réalisation des quantificateurs

↪ tri : $\forall$ (exhaustivité des cas)

↪ $\neg$ tri : $\exists$ (exhibition d'une séquence non triée)

*En pratique, la réalisation des quantificateurs s'avère trop coûteuse en temps lorsque la taille du réseau devient grande : le nombre d'entrées est exponentiel en fonction du nombre de fils. **C'est ce qui favorise l'émergence de la généricité !***

Recherche puis invocation de conditions nécessaires et/ou suffisantes à un réseau de tri

↪ réseau vérifiant CS à un réseau de tri = réseau de tri

↪ réseau ne vérifiant pas CN à un réseau de tri = pas réseau de tri

...avec des résultats consistants accessibles !

Cette situation a été expérimenté dans différents contextes :

- atelier MATH.en.JEANS : avec des élèves allant de la seconde à la terminale)
- atelier Maths à Modeler : avec des élèves de seconde
- travail de thèse (Trouvé, [2025](#)) : avec des étudiants de L1 mathématiques

Tri & $\neg$ tri

Attention à l'empirisme naïf et à l'expérience cruciale (Balacheff, [1987](#))

CN & CS

Différentes *approches* adoptées et différents *niveaux de généralité* envisagés.

Des résultats parfois en dehors de ceux qui ont été évoqués aujourd'hui !

Spécificité & généricité

Cette nécessité d'aller vers le second mode de validation favorise

- le passage du **particulier** au **général** (au niveau des propositions)
- et donc le passage du **spécifique** au **générique** (au niveau des preuves)

La généricité s'entend par opposition à la spécificité.

La spécificité désigne ce qui est **propre** à un objet mathématique alors que la généricité désigne ce qui est **partagé** avec d'autres objets mathématiques.

*Exemple : 5 est le seul nombre premier dont le chiffre des unités est 5 (spécificité)
5 est un nombre premier (généricité)*

La généricité et la spécificité qualifient donc les *propriétés* d'un objet mathématique.

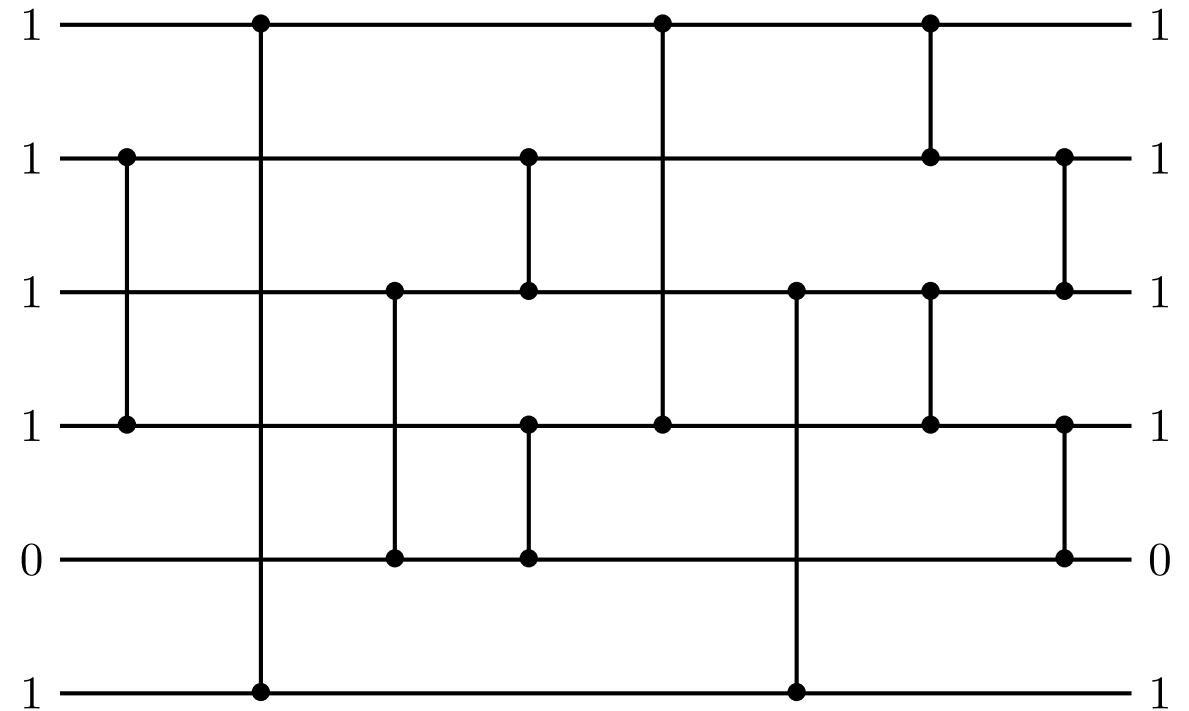
↪ On parle de **propriété générique** et de **propriété spécifique**.

La généricité : du **particulier** au général

Proposition. $\mathcal{R}_6$ n'est pas réseau de tri

Preuve. À l'issue de l'exécution de $\mathcal{R}_6$ avec la séquence $(1,0,1,1,1,1)$ on n'obtient pas $(0,1,1,1,1,1)$.

Propriétés de $\mathcal{R}_6$ mobilisées : les comparateurs qui le composent et leur ordre.



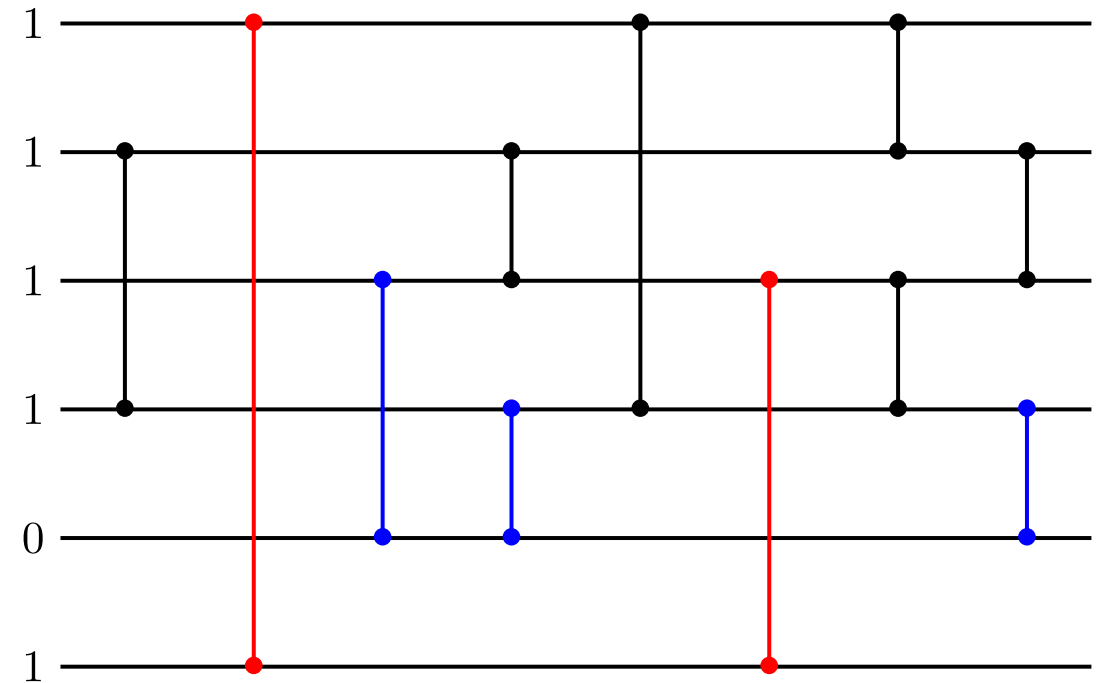
La généricité : du particulier au général

Proposition. $\mathcal{R}_6 \in I_6 \Rightarrow \mathcal{R}_6$ n'est pas un réseau de tri
 où $I_6 = \{\mathcal{C} \text{ de taille } 6 \mid \mathcal{C} \not\supset \text{de comparateur reliant les deux premiers fils}\}$

Preuve. Par récurrence finie, on montre que chaque étape de l'exécution de $\mathcal{R}_6$ laisse inchangée la séquence $(1,0,1,1,1,1)$.

Les comparateurs de $\mathcal{R}_6$ sont de deux types : noirs, rouges et bleus.

Propriétés de $\mathcal{R}_6$ mobilisées : ne contient aucun comparateur reliant les deux premiers fils, de taille 6.



La genericité : du particulier au **général**

Proposition. $\forall \mathcal{C}, \mathcal{C} \in I_6 \implies \mathcal{C}$ n'est pas un réseau de tri
(équivalent à : $\forall \mathcal{C} \in I_6, \mathcal{C}$ n'est pas un réseau de tri)

Preuve. Par récurrence finie, on montre que chaque étape de l'exécution de $\mathcal{C}$ laisse inchangée la séquence $(1,0,1,1,1,1)$.

Les comparateurs de $\mathcal{C}$ sont deux trois types : noirs, rouges et bleus.

Propriétés de $\mathcal{C}$ mobilisées : ne contient aucun comparateur reliant les deux premiers fils, de taille 6.



D'autres généralisations possibles !

La proposition reste valide :

- quelle que soit la paire de fils consécutifs
- quelle que soit la taille du réseau
- quel que soit l'alphabet

Toutefois : il faut expliciter les propriétés génériques implicitement mobilisées dans les preuves.

À retenir. Différents niveaux de généralité peuvent vivre, voire coexister, favorisant ainsi l'émergence de la généricité dans la résolution du problème.

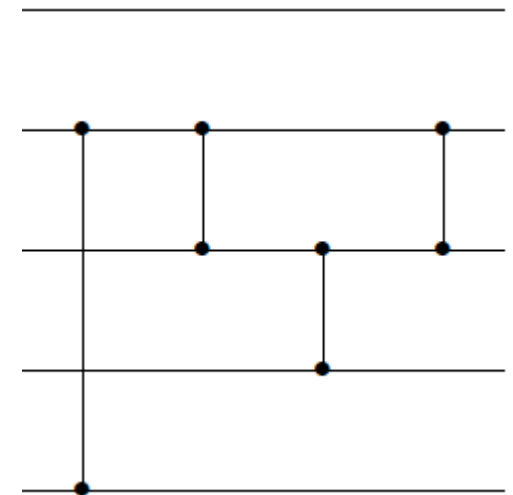
Un exemple en L1

« Déjà, si l'avant-dernière et la dernière elles se connectent jamais, ça marchera **jamais**.

Parce que si t'as un 1 en dernier et un 0 en avant-dernier, ils s'échangeront jamais. (...) Tu peux mettre des 1 **partout au-dessus**, le 1 il restera tout le temps en dernier.

Par exemple, si tu... Là tu mets 10111. Le 1 il restera toujours en dessous vu que à chaque fois qu'il se connecte à quelque chose, c'est à un 1. Et le 0, il restera toujours coincé parce qu'il sera toujours plus petit que ceux du dessus.

Donc si la dernière et l'avant-dernière, elles se connectent jamais, ça marche **jamais** ».



4 derniers comparateurs
composant $\mathcal{R}_5$

La généricité en classe

La faire vivre (savoir transparent)

« au début de l'enseignement secondaire, la problématique de l'articulation de l'empirique et du déductif est souvent abordée dans une perspective négative où les exemples sont de mauvais objets » (Barrier & Hajji, [2019](#), p. 50)

Veiller à la distinguer de l'empirisme naïf et l'expérience cruciale (Balacheff, [1988](#))

Elle peut être repérée dans l'interaction oral-écrit (et il est parfois nécessaire de clarifier avec l'élève le niveau de généralité envisagé)

L'institutionnaliser pour pérenniser... Attention, il ne s'agit pas de la nommer ni même de la définir, mais plutôt d'en « faire la publicité » (Allard, [2015](#))

- la pointer : « là, il y a quelque chose d'intéressant »
- la valoriser : « ça vous a permis d'avancer dans la résolution du problème car... et ça pourra vous resservir si... »

La généricité, mais pas que !

La situation des réseaux de tri permet aussi de travailler d'autres *savoirs transversaux* (Grenier & Payan, 2006) :

- la **logique** : quantification universelle et existentielle, implication, négation, contraposée, condition nécessaire et/ou suffisante...
- les **raisonnements** : contraposition, récurrence, absurde, disjonction de cas...
- les **démarches de recherche** : exploration du problème, étude de cas particuliers, formulation de conjectures, généralisation des résultats...
- les **heuristiques de résolution de problèmes** (Pólya, 2004)

La mallette « réseaux de tri »

Elle contient :

- le matériel pour 6 groupes de 4 élèves (énoncé photocopiable, feutres effaçables à sec, supports d'aide à la recherche et chiffonnettes)
- un document d'accompagnement comprenant des pistes de gestion de la situation et quelques éléments de résolution mathématique

À emprunter à l'IREMI !

Tout retour est le bienvenu :)



Les réseaux de tri

Cette situation a été conçue par Thibaut TROUVÉ dans le cadre de sa thèse en didactique des mathématiques (Trouvé, 2025). Elle est inspirée d'une activité d'informatique débranchée intitulée *Beat the clock* (Bell, Witten et Fellows, 1998). Tout retour d'expérience est bienvenu !

Description du contenu matériel

Supports d'aide à la recherche (feuilles plastifiées au format A3), feutres effaçables à sec de couleurs différentes, chiffonnettes.

Niveau du public ciblé

Secondaire (collège et lycée) et supérieur.

Personnes ciblées par le matériel de la mallette

Cette mallette contient le matériel pour 6 groupes de 4 élèves, soit pour une classe de 32 élèves.

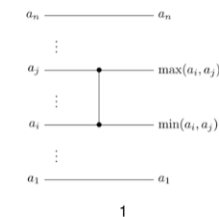
Objectifs d'apprentissage possibles visés au travers de chaque situation mise en œuvre à partir du matériel

- Les démarches de recherche : exploration du problème, étude de cas particuliers, formulation de conjectures, généralisation des résultats...
- Les raisonnements : contraposition, récurrence, absurde, disjonction de cas
- La logique
- Les heuristiques de résolution de problèmes (Pólya, 2004)

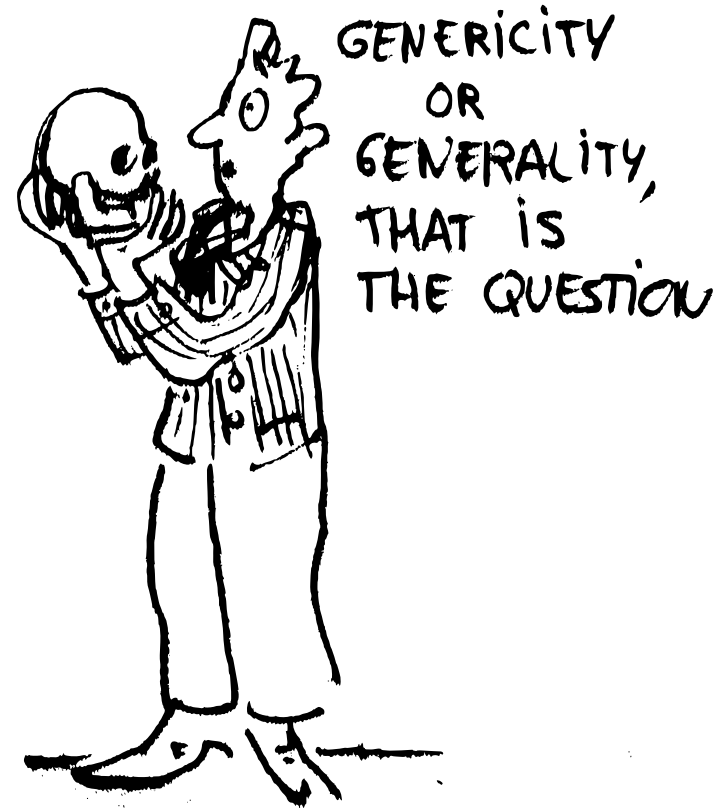
Le problème mathématique traité

Un *réseau* est un ensemble de n fils (représentés par des traits horizontaux) et de comparateurs (représentés par des traits verticaux), prenant en entrées des nombres $a_1, \dots, a_n$ où $a_i \in \mathbb{A}$. $\mathbb{A}$ est un ensemble ordonné de cardinal supérieur ou égal à 2.

Chaque comparateur réordonne les valeurs associées aux deux fils qu'il relie selon la règle suivante :



Merci pour votre écoute et votre participation !



thibaut.trouve@u-pec.fr