LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POLYNOMIALES : UNE ACTIVITÉ PLURIDISCIPLINAIRE EN CLASSE DE TERMINALE

Pascal REMY[1]

Julie ROUSSEAU[2]

Résumé. Cet article s'inscrit dans une réflexion professionnelle autour de la question suivante : comment impulser un travail de recherche authentique chez des élèves de Terminale afin de valoriser l'apport de l'Informatique dans un cadre infra-mathématique ? Il présente une activité menée dans le cadre du module *Mathématiques & Informatique* de notre lycée. Conçue comme une initiation à la démarche de recherche en Mathématiques, elle articule approche théorique, perspective historique et résolution de problèmes ouverts. Les élèves y découvrent les limites des outils mathématiques classiques, les amenant à mobiliser des méthodes algorithmiques et la programmation pour obtenir des solutions effectives. Cette séquence favorise également le développement de compétences transversales (stratégie de recherche, structuration des idées, communication scientifique) tout en plaçant les élèves dans une véritable posture de chercheur, à la croisée des Mathématiques et de l'Informatique.

Mots-clés. mathématiques ; algorithmique ; informatique ; équations polynomiales ; histoire des mathématiques ; pluridisciplinarité ; lycée

1. – Contexte

« *L'algorithmique, ce n'est pas des maths !* » : cette affirmation revient souvent dans la bouche des élèves, et parfois même de collègues, y compris de Mathématiques, depuis que l'algorithmique a fait son entrée dans les programmes de Mathématiques du lycée à la rentrée 2009 (Bulletin officiel, Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique, 2009) et, surtout, depuis qu'elle a été renforcée par un volet implémentation à la rentrée 2017 (Bulletin officiel, Aménagements des programmes d'enseignement de mathématiques et de physique-chimie, 2017) (voir également (Eduscol, 2017)). Pourtant, à y regarder de plus près, les Mathématiques ont toujours entretenu un lien étroit avec l'algorithmique. De nombreux énoncés mathématiques font explicitement référence à des procédures ou algorithmes de calcul, et une branche entière de la discipline, l'*analyse numérique*, en constitue l'illustration la plus directe (même si, bien sûr, cette branche recouvre également d'autres notions théoriques comme les mathématiques discrètes, le calcul formel, etc.). Historiquement, une part importante de la recherche en mathématiques a d'ailleurs été consacrée à la détermination, la formalisation et l'optimisation d'algorithmes de calcul, témoignant de l'importance de cette dimension opératoire dans la construction du savoir mathéma-

[1]pascal.remy@ac-versailles.fr
pascal.remy@uvsq.fr

[2]julie.rousseau1@ac-versailles.fr

tique. Aujourd'hui encore, de nombreuses recherches mathématiques contemporaines, y compris dans des domaines très abstraits, incluent des volets de calcul effectif, prolongeant ainsi cette tradition séculaire d'articulation entre raisonnement théorique et mise en œuvre algorithmique[3].

Partant de ce constat, il devient alors légitime de s'interroger sur les limites des outils mathématiques théoriques et sur le moment où ceux-ci ne suffisent plus à résoudre certains problèmes, rendant nécessaire le recours à des approches fondées sur l'algorithmique. Ce questionnement conduit naturellement à une réflexion plus large sur le statut : une méthode algorithmique possède-t-elle la même valeur qu'une méthode théorique ? Et, plus encore, pour quelles raisons les méthodes numériques ont-elles été développées au fil des siècles afin de compléter les approches mathématiques classiques ?

Dans ce cadre, il importe ici d'expliciter ce que l'on entend par *méthodes algorithmiques* et *méthodes numériques*, souvent confondues alors qu'elles relèvent de logiques différentes. Une méthode algorithmique désigne tout procédé systématique permettant de résoudre un problème – quel qu'en soit le domaine – au moyen d'un ensemble fini d'instructions. Relèvent ainsi de cette catégorie, par exemple, la recherche d'un élément dans un tableau, l'utilisation d'algorithmes de calcul formel pour obtenir une solution exacte d'une équation polynomiale ou encore déterminer des séries formelles satisfaisant à une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux : autant de démarches algorithmiques, mais non numériques. À l'inverse, une méthode numérique constitue un cas particulier de méthode algorithmique, spécifiquement destinée à résoudre un problème mathématique en produisant une ou plusieurs *valeurs numériques approchées* de la solution recherchée. L'approximation d'une racine de polynôme ou l'évaluation numérique d'une intégrale en sont des exemples typiques. Cette distinction, fondamentale tant pour l'enseignement que pour la compréhension épistémologique des pratiques scientifiques, permet de clarifier les finalités et les statuts des outils mobilisés, qu'ils visent une résolution exacte ou une approximation contrôlée.

C'est précisément autour de ces interrogations – statut des méthodes théoriques, apport spécifique de l'algorithmique, rôle historique et conceptuel des méthodes numériques – que s'articule l'expérimentation pédagogique présentée dans cet article et menée dans le cadre du module *Mathématiques & Informatique* ouvert au sein de notre établissement : elle propose aux élèves d'explorer concrètement les frontières entre théorie et calcul effectif, tout en développant une compréhension historique et épistémologique du rôle complémentaire des Mathématiques et de l'Informatique dans la résolution de problèmes.

Plus précisément, l'objectif de cette expérimentation est multiple et s'inscrit dans une démarche visant à articuler l'histoire, la théorie et la pratique mathématique. Elle vise tout d'abord à initier les élèves à la démarche de recherche en Mathématiques, en s'appuyant sur une approche historique qui permet de mettre en lu-

[3]On trouve en effet des méthodes effectives, basées sur du calcul numérique et/ou du calcul symbolique, dans la quasi-totalité des domaines de recherches, bien sûr en analyse et en probabilités, mais aussi en algèbre, en géométrie et en arithmétique (pour ce qui est des branches enseignées au lycée), ainsi que dans des domaines beaucoup plus abstraits tels que, par exemple, la topologie, la géométrie différentielle, l'algèbre différentielle, l'algèbre homologique, etc. Par simple curiosité ou pour se convaincre réellement de l'impact de l'algorithmique dans les Mathématiques, nous conseillons vivement au lecteur intéressé de regarder la liste des bibliothèques fournies par de nombreux logiciels comme XCas ou Maple (les liens renvoient sur la documentation des logiciels), ou encore Python (ce lien renvoie uniquement sur les bibliothèques mathématiques natives ; bien d'autres bibliothèques existent comme, par exemple, numpy et scipy pour le calcul scientifique, sympy pour le calcul symbolique, pingouin pour les statistiques, etc.)

mière la construction progressive des outils théoriques au fil des siècles et leur rôle dans la compréhension des phénomènes mathématiques. Cette perspective historique permet également de montrer les limites des approches purement théoriques, soulignant ainsi la nécessité d'introduire des méthodes algorithmiques pour apporter des réponses effectives et opérationnelles à certains problèmes qui échappent au cadre strict des méthodes théoriques. Par ailleurs, cette expérimentation vise aussi à développer chez les élèves de nombreuses compétences transversales utiles à la fois pour leurs apprentissages et pour leur avenir universitaire : établir une stratégie de recherche, apprendre à formuler et structurer ses idées, à les présenter à l'oral, mais aussi à produire un rendu scientifique (ici un poster écrit en LaTeX dont nous donnons le visuel en fin d'article dans l'annexe 1). Enfin, notre expérimentation vise également à initier les élèves à l'algorithmique pure, notamment au travers des preuves algorithmiques, mais aussi à la programmation en Python, montrant ainsi, comme le rappelle N. Briant dans sa thèse (Briant, 2013), que l'algorithmique est un pont entre les Mathématiques et l'Informatique, un lien fort qui nourrit la compréhension de chacune de ces deux disciplines.

2. – Présentation de l'expérimentation

2.1. – Le module *Mathématiques & Informatique*

Le module *Mathématiques & Informatique* constitue une initiative pédagogique déployée au sein du lycée depuis deux années et destinée à l'ensemble des élèves de seconde, de première générale, de terminale générale ainsi qu'aux élèves de la filière STI2D. Organisé à raison de deux heures hebdomadaires, ce dispositif a pour objectif de renforcer les interactions entre Mathématiques et Informatique en proposant une approche résolument interdisciplinaire, fondée sur l'expérimentation et la mise en activité des élèves. Son encadrement est assuré par trois enseignants du lycée : les deux auteurs de cet article, Pascal Remy, enseignant en Mathématiques et NSI, et Julie Rousseau, enseignante en Mathématiques, ainsi que Thomas Dupuis, enseignant de Physique-Chimie, diplômé ingénieur de l'École Polytechnique.

L'objectif principal de ce dispositif est de permettre aux élèves de développer des compétences transversales dans les domaines du raisonnement logique, de la modélisation, de l'analyse de données et de la programmation, tout en découvrant la diversité des champs d'application des sciences mathématiques et informatiques. Celui-ci s'organise autour de cinq ateliers thématiques :

1. *Atelier d'initiation à la cybersécurité.* Cet atelier permet, sous forme de jeux, de sensibiliser les élèves aux enjeux contemporains de la sécurité informatique (protection des données, chiffrement, prévention des cybermenaces, etc.) et de les initier aux bonnes pratiques.
2. *Atelier d'initiation à la robotique.* Les élèves y découvrent la programmation de robots et la logique de fonctionnement des systèmes embarqués, en mobilisant des notions d'algorithmique et de contrôle automatisé.
3. *Atelier d'initiation au développement web et au développement de jeux.* Cet atelier offre une approche concrète et créative du code informatique, à travers la conception de sites web ou de jeux simples, favorisant l'acquisition d'une logique de programmation structurée et un apprentissage à la programmation événementielle.
4. *Atelier de jeux de logique.* Par la résolution d'énigmes et de défis logiques, cet atelier développe la rigueur, la persévé-

rance et la capacité de raisonnement déductif des élèves, tout en renforçant le lien entre raisonnement mathématique et pensée algorithmique.

5. *Atelier sur les méthodes numériques.* Cet atelier constitue un espace privilégié de convergence entre les mathématiques théoriques et l'informatique appliquée. Il propose aux élèves un problème mathématique en deux volets :

   - une première partie totalement accessible à la main grâce aux outils théoriques enseignés ;
   - une seconde partie, dont la résolution complète nécessite une approche complémentaire relevant de l'analyse numérique.

   Cette démarche vise à amener les élèves à identifier les limites des méthodes théoriques, à formuler des stratégies de résolution alternatives, et à mobiliser des outils numériques pour obtenir une solution approchée mais exploitable.

En somme, le module *Mathématiques & Informatique* a pour ambition de favoriser l'articulation entre théorie et pratique, d'initier les élèves à la démarche de recherche scientifique et de développer leur autonomie intellectuelle face à des problématiques complexes. Par cette approche, il vise à renforcer la compréhension des interactions étroites entre les Mathématiques et l'Informatique, deux disciplines aujourd'hui indissociables dans la formation scientifique et technologique contemporaine.

Dans cette continuité, les élèves sont invités à présenter leurs travaux lors de temps forts de la vie de l'établissement, notamment à l'occasion de la Semaine des Mathématiques et des Journées Portes Ouvertes. Ces présentations constituent des moments privilégiés de valorisation et de diffusion des apprentissages, offrant aux élèves l'opportunité de partager leurs productions et leur démarche de recherche avec la communauté éducative et le grand public. Elles participent pleinement à la mise en valeur du module *Mathématiques & Informatique*, en soulignant l'engagement scientifique, collaboratif et créatif des élèves, tout en illustrant la place centrale des Mathématiques et de l'Informatique dans la construction d'une culture scientifique moderne et ouverte.

2.2. – Activité : exemples de résolutions d'équations polynomiales

L'activité que nous avons choisie de présenter dans cet article a été proposée dans le cadre de l'atelier *Méthodes numériques* à deux élèves de Terminale suivant les spécialités mathématiques et NSI. Elle s'est déroulée sur vingt séances de 2 h. Le problème que nous leur avons posé était le suivant :

Résoudre les trois équations suivantes :

- $(E_1): x^2-2x-1=0$
- $(E_2): x^3-3x-1=0$
- $(E_3): x^5-5x-1=0$

Comme on peut le noter, l'énoncé est par principe très simple afin de ne pas décourager les élèves. En particulier, la première équation (E_1) permet de mettre les élèves en confiance puisqu'il s'agit d'une équation polynomiale du second degré qu'ils peuvent résoudre aisément à l'aide de l'outil théorique qu'est le discriminant.

Pour la résolution de l'équation (E_2), la première démarche des élèves a consisté à rechercher d'éventuelles solutions évidentes permettant de factoriser l'expression polynomiale x^3-3x-1. Face à l'absence de telles solutions, il leur a alors été proposé d'effectuer une recherche web sur les équations du troisième degré. Cette étape a constitué une initiation à la recherche en les amenant à explorer divers sites et ressources en ligne. Très rapidement, les élèves ont constaté la diversité et parfois la contradiction des réponses proposées, certaines étant erronées ou incomplètes. Cette situation a ainsi permis d'introduire un travail essentiel de vérification et de validation des sources, composante fondamentale de toute démarche scientifique. Afin de les guider dans cette analyse critique, nous leur avons suggéré d'adopter une entrée historique dans leurs investigations, en s'interrogeant sur l'origine et l'évolution de ces équations au fil du temps. Cette approche leur a permis de comprendre l'importance du contexte historique dans la construction et la fiabilité des savoirs mathématiques, tout en redonnant du sens aux outils qu'ils manipulaient. Progressivement, cette exploration les a conduits à la découverte du théorème de Cardan (Cardan, 1545), étape majeure dans l'histoire des Mathématiques, et point clé pour la résolution explicite de leur équation. En effet, prenant en compte que le membre de gauche de l'équation est écrit sous la forme réduite x^3+px+q avec $(p,q)=(-3,-1)$, le calcul du discriminant $-4p^3-27q^2$ permet de montrer que l'équation (E_2) admet trois solutions réelles $x_0, x_1, x_2 \in R$, leur valeur explicite étant donnée par les célèbres formules de Cardan : pour tout $k \in \{0,1,2\}$,

$$x_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2k\pi}{3}\right).$$

Reste à présent l'équation (E_3), la plus intéressante pour l'objectif de cette activité et celle qui a naturellement pris le plus de temps à être étudiée[4]. En effet, si les deux premières équations ne nécessitaient que des outils théoriques pour pouvoir être résolues, il n'en est plus de même pour cette dernière.

[4] Si l'étude des deux premières équations (E_1) et (E_2) n'a nécessité qu'une seule séance de 2 h, l'étude de l'équation (E_3) s'est en revanche déroulée sur une quinzaine de séances de 2 h ; les séances restantes ayant été dévolues à la création du poster.

Dans un premier temps, reproduisant la démarche expérimentée précédemment lors de l'étude de l'équation (E_2), les élèves se sont engagés dans une activité de recherche visant à déterminer une éventuelle méthode de calcul d'un « discriminant » pour les équations polynomiales du cinquième degré. Toutefois, et contrairement à leurs attentes, aucune réponse concluante n'a émergé de cette phase exploratoire. Cette absence de résultat s'est alors révélée particulièrement féconde sur le plan didactique, ouvrant la voie à un questionnement central dans toute démarche de recherche scientifique : *que cherche-t-on réellement à démontrer ? Lorsqu'une tentative échoue, est-ce en raison d'une méthodologie inadaptée, d'un manque d'outils conceptuels, ou bien parce que le problème posé est fondamentalement insoluble ?*

Aussi, afin d'accompagner cette réflexion, la consigne a été réorientée vers l'étude de l'impossibilité de résoudre « à la main » à l'aide de formules algébriques ce type d'équation. Cette étape, essentielle dans la progression de l'activité, a permis en particulier de montrer que certaines impossibilités ne viennent pas d'un manque de méthode ou de connaissances, mais qu'elles résultent de résultats mathématiques démontrés établissant qu'il est impossible de résoudre certains problèmes. Dans la continuité du travail historique mené autour des équations du troisième degré, les élèves ont ainsi retracé l'évolution des recherches sur les équations polynomiales, découvrant comment les travaux successifs de nombreux mathématiciens ont conduit à une compréhension plus profonde des structures algébriques. Cette approche historique les a progressivement conduits à la découverte du théorème d'Abel (Abel, 1824), redémontré et affiné indépendamment par Galois (Galois, 1846) (Azra & Bourgne, 1976), qui établit de manière rigoureuse l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à cinq[5]. Il convient toutefois de préciser qu'aucune démonstration mathématique de ces résultats n'a été abordée avec les élèves, ces dernières mobilisant des notions et outils théoriques hors du champ des programmes et n'étant pas au cœur de la problématique étudiée. En effet, l'objectif était ici de placer les élèves en posture de chercheur, engagés dans une revue de littérature visant à identifier les résultats existants relatifs au problème qu'ils cherchaient à résoudre. Ce travail de recherche documentaire et conceptuelle constitue une étape fondamentale de toute démarche scientifique, et il a été explicitement présenté aux élèves en amont afin qu'ils comprennent le sens et la portée de leur démarche, à la croisée de la culture mathématique et de la méthodologie de la recherche.

À ce stade de l'activité, les élèves ont le sentiment de se trouver dans une impasse. Les méthodes algébriques qu'ils connaissent depuis la classe de Première pour le degré 2 et qui, comme ils ont pu le constater dans leur recherche, se généralisent au degré 3 (et également au degré 4), mais pas au degré 5 ne permettent pas d'aboutir à une résolution explicite de leur problème, et cette absence de résultat concret suscite chez eux une forme de désarroi. C'est précisément ce moment de blocage qui est l'un des point clé de notre activité : il place les élèves dans une véritable posture de chercheur, les amenant à adopter une véritable démarche d'investigation scientifique. Le questionnement qui émerge alors est typiquement celui du chercheur face à un problème ouvert : *si une méthode ne fonctionne pas, en existe-t-il une autre ?* Revenir à la source du problème devient également essentiel : *on me demande de résoudre une équation, mais si je ne dispose pas de méthodes algébriques directes, que puis-je tout de même dire ?* Les élèves apprennent ainsi à reformuler le problème, à envisager des réponses partielles, et surtout à s'interroger sur la nature même des solutions : *y en a-t-il au moins ? comment le savoir ?* Ce questionnement, que nous avons initié avec eux, les conduit ainsi à mobiliser des outils d'analyse qu'ils ont déjà abordés en Terminale, en particulier le théorème des valeurs intermédiaires, qui permet d'affirmer l'existence d'au moins une solution, et son corollaire, le théorème de la bijection, qui leur offre une approche encore plus fine en leur permettant de déterminer le nombre exact de solutions et de les localiser.

Une fois l'existence de trois solutions réelles établies, les élèves ont rapidement été confrontés à une nouvelle phase de questionnement : *il ne s'agissait plus de savoir si les solutions existaient, mais de déterminer comment les exprimer et/ou les approcher par des valeurs numériques avec une précision donnée.* Cette étape a permis en particulier de mettre en évidence un point fondamental en Mathématiques : les théorèmes utilisés jusque-là, tels que le théorème des valeurs intermédiaires ou celui de la bijection, sont des résultats d'existence (et d'unicité), mais **non constructifs** : ils garantissent la présence d'une ou plusieurs solutions sans fournir pour autant de méthodes permettant de les calculer et/ou de les approcher explicitement. Confrontés à cette limite, les élèves ont été amenés à engager une transition entre outils théoriques et outils algorithmiques afin de concevoir une méthode de calcul effectif. Cette démarche s'inscrit ici dans une problématique classique en Mathématiques : lorsqu'une preuve non constructive établit l'existence d'un résultat sans en fournir la construction explicite, il est naturel de rechercher des preuves alternatives, davantage constructives, reposant notamment sur des procédés algorithmiques. Ce point a été

[5] Il existe en revanche diverses méthodes analytiques pour résoudre ces équations, la plus connue étant celle de Charles Hermite utilisant les fonctions elliptiques (Hermite, 1858). À noter également le récent travail (Rubine & Wildberger, 2025) dans lequel les auteurs expriment les solutions des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 comme fonctions génératrices des nombres hyper-Catalan (= nombre de subdivisions d'un polygone en un nombre donné de triangles, quadrilatères, pentagones, etc.)

présenté aux élèves en soulignant qu'il s'agit d'une préoccupation ancienne de la recherche mathématique, bien antérieure au développement des outils numérique et formel. Dans le cadre de cette expérimentation, il a été fait le choix d'adopter résolument une approche numérique, déplaçant ainsi l'enjeu : il ne s'agit plus seulement de garantir l'existence d'une solution, mais d'en produire une approximation concrète et maîtrisée.

Cette réflexion a ainsi conduit les élèves à s'intéresser à plusieurs méthodes numériques classiques permettant d'obtenir des approximations successives des solutions : la méthode par dichotomie, la méthode de Newton et la méthode de la sécante (fait remarquable, la méthode par « balayage », si souvent appréciée des élèves pour son caractère intuitif, n'a pas été évoquée spontanément parmi leurs propositions ; et cette dernière a rapidement été éliminée comme avatar de la méthode par dichotomie). Lors d'une phase d'échange, les élèves nous ont présenté et expliqué ce qu'ils avaient retenu de chacune de ces approches, témoignant d'une réelle appropriation des idées sous-jacentes. S'en est suivie alors une discussion collective entre eux et nous visant à déterminer quelle pourrait être la « meilleure » méthode – terme volontairement laissé sans définition préalable afin d'encourager la réflexion critique. Cette discussion avait en effet pour finalité de conduire les élèves à interroger les critères de choix d'un algorithme, en abordant notamment la notion de complexité algorithmique (présente dans le programme de spécialité NSI), les contraintes d'implémentation ainsi que la nécessité de valider mathématiquement une méthode algorithmique, au même titre qu'un théorème. Aussi, dans un souci de compromis entre rigueur théorique, faisabilité technique et pertinence pédagogique, et en cohérence avec les programmes de la spécialité Mathématiques, le choix s'est finalement porté sur la méthode par dichotomie qui a ensuite été mise en œuvre par les élèves afin de produire un encadrement numérique progressif des solutions, illustrant concrètement le passage de la théorie à la pratique et favorisant une démarche de recherche autonome et expérientielle.

La validation de la méthode par dichotomie a constitué une étape essentielle de l'activité, permettant de consolider les apprentissages tout en articulant de manière cohérente les trois dimensions de notre module : mathématiques « pures », algorithmique et implémentation informatique. Sur le plan mathématique, les élèves ont d'abord été amenés à établir la validité théorique de la méthode par dichotomie : à partir des hypothèses d'existence et d'unicité d'une solution dans un segment donné, ils ont cherché à démontrer la convergence du processus, en mobilisant les notions de suites adjacentes et les théorèmes de convergence des suites réelles. Cette partie du travail a été entièrement conduite par les élèves, qui se sont appuyés sur des recherches web et des sources sûres pour identifier et comprendre les arguments mathématiques nécessaires. Ils nous ont ensuite proposé plusieurs versions de leur démonstration, en expliquant leurs choix, leurs raisonnements, mais aussi les points restant obscurs. Cette phase d'échanges a ainsi permis de replacer les élèves dans une véritable posture de chercheur, étudiant, discutant et s'appropriant un résultat déjà établi dans la littérature scientifique, tout en en reconstruisant la logique à partir de leurs propres connaissances et questionnements.

Une fois validée, cette démonstration a permis de relier la démarche numérique à un cadre mathématique rigoureux, soulignant que la méthode par dichotomie repose sur une justification théorique solide et non sur une simple procédure empirique. Cette validation théorique a ensuite été traduite sur le plan algorithmique : les élèves ont rédigé le pseudo-code de la méthode par dichotomie, établissant ainsi un lien direct entre la preuve mathématique de convergence et la preuve de correction totale de l'algorithme. En effet, à partir de la preuve mathématique établie, les élèves ont mis en évidence que l'amplitude de l'intervalle contenant la solution tend vers zéro, garantissant ainsi la terminaison de l'algorithme, tandis que les deux bornes de cet intervalle convergent vers la solution, assurant sa correction partielle. Ainsi, l'écriture algorithmique a été perçue comme une mise en œuvre opérationnelle du raisonnement démonstratif, prolongeant la rigueur mathématique dans un cadre computationnel. La complexité de l'algorithme n'a toutefois pas été abordée de manière approfondie, par manque de temps, pas plus que les problématiques d'accélération de convergence, qui, bien qu'essentielles en analyse numérique, auraient nécessité des développements techniques dépassant les objectifs pédagogiques de cette activité.

Enfin, la dernière phase a consisté en l'implémentation de la méthode par dichotomie en langage Python. Cette étape a ainsi permis aux élèves d'automatiser les calculs et de visualiser concrètement le processus d'approximation des solutions. Elle a également permis de travailler sur les éléments de base du langage Python (structures de données simples, structures de contrôle, documentation de fonctions et gestion des préconditions à l'aide d'assertions) et a grandement favorisé la compréhension du lien entre le concept théorique, le raisonnement algorithmique et la réalisation informatique effective, rendant visible le passage progressif de l'abstraction mathématique à l'expérimentation numérique.

2.3. – Valorisation du travail des élèves

L'activité s'est conclue par une phase de valorisation du travail des élèves, visant à donner une visibilité concrète à leur démarche de recherche et à renforcer la dimension communicative du projet. Le groupe a ainsi réalisé une synthèse de ses résultats sous la forme d'un poster scientifique au format A0, reprenant les différentes étapes de la démarche : présentation du problème, dimensions historiques, méthode retenue, justifications théoriques et résultats obtenus.

La rédaction de ce poster, réalisée en LaTeX et reproduit ici dans l'annexe 1, a constitué un prolongement naturel du travail entrepris dans le module, permettant aux élèves de s'approprier un outil de production scientifique reconnu et de consolider leurs compétences en mise en forme et structuration d'un document académique. Cette étape a également favorisé une réflexion sur la clarté, la rigueur et la hiérarchisation de l'information, dimensions essentielles dans la communication scientifique.

Le poster réalisé a ensuite été imprimé et présenté lors de différents temps forts de la vie du lycée, notamment la Semaine des Mathématiques et la Journée Portes Ouvertes, contribuant à valoriser le travail des élèves auprès de la communauté éducative et du grand public. Par ailleurs, celui-ci est affiché en permanence dans un couloir du lycée, témoignant de la continuité du projet et de l'ancrage du module *Mathématiques & Informatique* dans la dynamique scientifique de l'établissement.

Enfin, les élèves ont procédé à une présentation orale de leurs travaux devant l'ensemble du module *Mathématiques & Informatique* et lors des Journées Portes Ouvertes de l'établissement dans une démarche d'échange et de mutualisation des connaissances. Cet exercice a notamment permis de développer leurs compétences en communication scientifique orale, tout en renforçant leur capacité à argumenter, à expliciter une démarche de recherche et à répondre à des questions de pairs. Cette phase de diffusion et de restitution s'inscrit pleinement dans les objectifs de notre module : donner du sens à l'activité de recherche, former à la rigueur scientifique et favoriser la mise en valeur des apprentissages à travers une production concrète, communicable et valorisante.

3. – Retour d'expérience

Sur le plan didactique, l'ensemble de l'activité proposée a permis d'accompagner les élèves dans une progression structurée, articulant découverte, approfondissement et mise en œuvre.

L'équation (E_1) a d'abord joué un rôle d'entrée dans le problème, en familiarisant les élèves avec les attendus de la démarche de recherche et avec les outils théoriques de base nécessaires à la résolution d'un problème mathématique. L'étude de l'équation (E_2) a ensuite introduit la dimension historique de la recherche scientifique, amenant les élèves à replacer les savoirs mathématiques dans leur contexte d'émergence, tout en mobilisant leurs connaissances antérieures. Enfin, l'équation (E_3) occupe le rôle central dans l'objectif recherché : elle initie les élèves à la recherche, non pas en leur demandant d'appliquer des procédures connues, mais en les confrontant à une situation où la formulation du problème et la construction progressive du raisonnement sont au cœur de l'apprentissage. Elle agit ainsi comme un véritable levier de mise en situation scientifique, où l'élève expérimente concrètement les étapes de la pensée mathématique : exploration, doute, reformulation et découverte de nouvelles voies d'approche.

Cette approche a suscité une forte implication des élèves, qui ont exprimé un réel intérêt pour le problème posé, malgré les difficultés rencontrées. Le caractère exigeant de la démarche n'a pas constitué un frein, mais au contraire un moteur d'engagement et de motivation. Les élèves se sont montrés particulièrement fiers du travail accompli, notamment lors de la présentation de leur poster, qui a constitué un moment de valorisation significatif, à la fois individuel et collectif.

Ainsi, cette activité illustre pleinement l'esprit du module *Mathématiques & Informatique*, où les élèves sont conduits à articuler démonstration mathématique, construction algorithmique et implémentation informatique, dans une démarche intégrée de formation à la pensée scientifique et computationnelle. Elle témoigne de la pertinence d'une approche interdisciplinaire qui met la recherche au cœur de l'apprentissage et qui donne aux élèves les moyens de penser, construire et communiquer la science.

Conclusion

Le choix didactique de centrer l'activité sur la résolution d'équations polynomiales, et plus particulièrement sur celles de degré 5, répond à plusieurs objectifs pédagogiques et institutionnels. D'une part, ce thème s'inscrit directement dans les programmes de mathématiques du lycée, qui mobilisent régulièrement les polynômes, leurs propriétés algébriques et les théorèmes liés à l'étude des fonctions continues. D'autre part, ce cadre mathématique, à la fois familier et exigeant, permet d'engager les élèves dans l'application concrète d'un large éventail de résultats théoriques du cours : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection, étude des variations, existence et unicité de solutions, ou encore propriétés de convergence des suites.

Ce terrain devient alors particulièrement fécond pour mettre en évidence les limites des approches purement théoriques. L'impossibilité de résoudre en général les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 par radicaux, ainsi que la nature parfois non constructive de certains théorèmes d'existence, offrent un cadre clair pour interroger la frontière et l'articulation entre outils théoriques et outils algorithmiques, enjeu fondamental de la formation mathématique contemporaine. C'est précisément dans cet espace de tension que les méthodes numériques trouvent tout leur sens : elles permettent de proposer une solution approchée lorsque la théorie ne fournit qu'une existence abstraite.

Si les équations polynomiales constituent un support particulièrement adapté, d'autres choix didactiques auraient bien sûr pu être retenus pour introduire les méthodes numériques. Par exemple, le calcul de racine carrée en utilisant que les quatre opérations algébriques de base, l'étude d'équations différentielles avec la méthode d'Euler, ou encore l'approximation d'intégrales sur un segment, permettent également de mettre en lumière la nécessité de recourir à des procédures effectives. Toutefois, le cadre polynomial présente l'avantage d'être à la fois immédiatement accessible aux élèves de Terminale et suffisamment riche pour illustrer, de manière progressive et structurée, les enjeux de la transition entre théories mathématiques, outils algorithmiques et méthodes numériques, ainsi que l'intérêt d'une approche historique dans la conception des outils.

Pascal REMY

Lycée Les Pierres Vives, Carrières-sur-Seine
Académie de Versailles
Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ (Paris-Saclay) & CNRS (UMR 8100)
https://orcid.org/0000-0002-7305-9340

Julie ROUSSEAU

Lycée Les Pierres Vives, Carrières-sur-Seine
Académie de Versailles

Références bibliographiques

Abel, N. (1824). Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Récupéré sur https://nonagon.org/ExLibris/sites/default/files/pdf/Abel-Memoir-1824.pdf

Azra, J.-P., & Bourgne, R. (1976). *Écrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois.* Gauthier-Villars.

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse, Université de Montpellier II – Sciences et Techniques du Languedoc.

Bulletin officiel. (2009, juillet 23). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *(30)*. Récupéré sur https://www.education.gouv.fr/bo/2009/30/mene0913405a.html

Bulletin officiel. (2017, mai 4). Aménagements des programmes d'enseignement de mathématiques et de physique-chimie. *(18)*. Récupéré sur https://www.education.gouv.fr/bo/17/Hebdo18/MENE1712512C.htm?cid_bo=115984

Cardan, J. (1545). Artis magnæ, sive de regulis algebraicis. Récupéré sur https://archive.org/details/hieronymicardan00card/page/n1/mode/2up

Eduscol. (2017, juin). Algorithmique et programmation. Récupéré sur https://euler.ac-versailles.fr/IMG/pdf/algorithmique_et_programmation_787733-4.pdf

Galois, E. (1846). Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pp. 417-433. Récupéré sur http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/algebre/memoire-sur-les-conditions-de-resolubilite-des-equations-par-radicaux

Hermite, C. (1858). Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 46*, 508-515. Récupéré sur https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3003h/f508.item

Rubine, D., & Wildberger, N. (2025). A Hyper-Catalan Series Solution to Polynomial Equations, and the Geode. *The American Mathematical Monthly, 132*(5), 383-402. Récupéré sur https://doi.org/10.1080/00029890.2025.2460966

Annexes

Annexe 1 –Poster produit par les élèves

Exemples de résolution d'équations polynomiales

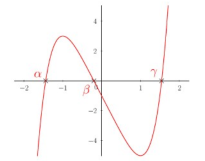
Module Maths-Info

Lycée Les Pierres Vives, Carrières-sur-Seine

Equation $x^2 - 2x - 1 = 0$

Pour résoudre l'équation, on utilise la méthode du discriminant. Ainsi, les solutions de l'équation sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

Représentation de la fonction $x^5 - 5x - 1$



[1] Qui est Jérôme Cardan ?

Girolamo Cardano, né en 1501 à Pavie (Italie), et décédé en 1576 à Rome (Italie), ou encore Jérôme Cardan en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIXe siècle.

[2] Qui est Niels Henrik Abel ?

Le Norvégien Niels Henrik Abel, né en 1802 à Nedstrand (Norvège) et décédé à Froland (Norvège) en 1829, a été l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Sa principale contribution est d'avoir démontré l'impossibilité de résoudre de façon exacte une équation polynomiale générique de degré 5.

[3] Qui est Evariste Galois ?

Évariste Galois, né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine (France) et mort le 31 mai 1832 à Paris (France), est un mathématicien français. Son nom a été donné à une branche des mathématiques dont il a posé les prémices, la théorie de Galois. Il a généralisé le théorème d'Abel aux polynômes génériques de degré cinq et supérieurs. Il meurt à 20 ans lors d'un duel aux armes à feu. Il laisse dans son sillage une œuvre scientifique très vaste, réalisée en une existence assez courte.

Equation $x^3 - 3x - 1 = 0$

Pour résoudre l'équation, on calcule le discriminant $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ avec $p = -3$ et $q = -1$.
On trouve $\Delta = 81$ qui est supérieur à 0. Il existe alors trois solutions grâce au théorème de Cardan[1] :

$$z_0 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)\,; \qquad z_1 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\pi}{3}\right); \qquad z_2 = 2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Equation $x^5 - 5x - 1 = 0$

Un peu de théorie. Le théorème d'Abel (1824) de Niels Henrik Abel[2] montre l'impossibilité de résoudre de façon exacte une équation polynomiale générique du cinquième degré. En 1851, Evariste Galois[3] généralise ce théorème aux équations polynomiales génériques de degré supérieur ou égal à 5. Cependant, des racines existent comme nous pouvons le voir sur la courbe ci-contre, ce qui est par ailleurs validé par le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	α	-1	β	1	γ	$+\infty$
$x^5 - 5x - 1$	$-\infty$	0	3	0	-5	0	$+\infty$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe trois solutions, chacune dans l'un des intervalles suivant : $]-\infty; -1[$, $]-1, 1[$, et $]1; +\infty[$. Mais, quelles en sont les valeurs approchées ?

La méthode par dichotomie. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et admettant un unique zéro sur $]a, b[$ avec $f(a) < 0 < f(b)$ (ce raisonnement s'adapte sans problème au cas $f(a) > 0 > f(b)$).
On définit deux suites (a_n) et (b_n) avec $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Par construction, $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ et $a_n < b_n$ pour tout n. De plus, définissant $u_n = b_n - a_n$, on a

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{u_n}{2} \quad \text{et donc} \quad u_n = \frac{b-a}{2^n} > 0.$$

Etudions à présent les variations de (a_n) et celles de (b_n).

- <u>1er cas :</u> $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. Alors : $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} = -\dfrac{u_n}{2}$.
- <u>2ème cas :</u> $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{u_n}{2}$ et $b_{n+1} - b_n = 0$.

Ainsi, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus, comme (u_n) converge vers 0, on en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes. En particulier, elles convergent vers une limite commune ℓ.
Par continuité de la fonction f, on en déduit que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont convergentes vers $f(\ell)$.
En utilisant alors les inégalités $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$, on obtient $f(\ell) \leqslant 0$ et $f(\ell) \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$.
Conclusion : les deux suites (a_n) et (b_n) fournissent un encadrement de la solution $f(x) = 0$ à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près.

Recherche de valeur approchée avec Python

```python
def dichotomie(f,a,b,eps):
    ''' a,b,eps sont des valeurs numériques
    f est une fonction représentant une fonction numérique de [a;b] dans R et
    admettant un unique zéro alpha dans ]a;b[
    Renvoie un intervalle de longueur eps contenant alpha '''
    assert callable(f)
    assert isinstance(a,int) or isinstance(a,float)
    assert isinstance(b,int) or isinstance(b,float)
    assert isinstance(eps,int) or isinstance(eps,float)
    assert a < b
    while b - a > eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b

def poly_deg_5(x):
    return x**5 - 5*x -1

dichotomie(poly_deg_5, -2, -1, 10**(-5)) # -1.44050 < alpha < -1.44049
dichotomie(poly_deg_5, -1, 1, 10**(-5)) # -0.20006 < beta < -0.20005
dichotomie(poly_deg_5, 1, 2, 10**(-5)) # 1.54164 < gamma < 1.54165
```

LaTeX TikZposter