DES MATHÉMATIQUES COMME EN L'AN 500 : DÉCOUVRIR LES SUITES NUMÉRIQUES DANS L'*INSTITUTION ARITHMÉTIQUE* DE BOÈCE

François GOICHOT[1]
IREM de Lille

Résumé. Dans l'histoire des mathématiques, Boèce est l'un des très rares noms qui s'insèrent entre l'antiquité grecque et l'essor arabe, dans ce haut Moyen Âge qu'on voit souvent comme une période sombre pour la science. Nous proposons quelques éclairages sur les mathématiques de Boèce, telles que nous les avons présentées à des élèves de fin de seconde.

Mots-clés. histoire, arithmétique, suites arithmétiques, suites géométriques, nombres parfaits.

Figure 1: Boèce, théoricien de la musique (source : site MacTutor)

Les suites numériques, et en particulier les suites arithmétiques et géométriques, sont actuellement au programme de la spécialité mathématique de classe de première. Il y a beaucoup de façons de les introduire. Nous proposons ici de passer par l'histoire, et une histoire assez peu connue. Il s'agira donc à la fois de rendre compte d'une expérience avec des élèves, et de présenter une partie des mathématiques de Boèce, en allant parfois plus loin que ce qui pouvait être dit aux élèves.

Bien sûr il n'y a pas de suites numériques chez Boèce, et notre titre est un anachronisme. Mais on verra, dans la partie centrale de l'article, que les propriétés que Boèce met en évidence, sur des valeurs numériques, sont clairement pour lui susceptibles de généralisation, et peuvent alors être lues par nous, modernes, comme propriétés de suites.

Nous commencerons par présenter le personnage de Boèce en le plaçant dans son époque, puis son principal ouvrage mathématique, l'*Institution Arithmétique*. Nous détaillerons ensuite les extraits montrés aux élèves, avant d'en arriver à l'activité principale, une sorte d'énigme sous forme de tableau « cabalistique ». Nous en donnerons la clé, sans nous restreindre au vocabulaire connu des élèves, avant de revenir à ce qu'ils en ont fait.

1. – Boèce et son temps

Le nom de Boèce est un des rares qui apparaissent, dans l'histoire des mathématiques, dans les « âges sombres » du Haut Moyen

[1] fgoichot@uphf.fr

Âge, entre Diophante et les Arabes. Anicius Manlius Severinus Boethius, dit Boèce, est né à Rome vers 480. C'est l'époque des grandes invasions barbares : Odoacre vient de déposer le dernier empereur romain Romulus Augustule (476).

La famille de Boèce est riche et puissante, le père de Boèce est consul de Rome en 487. Mais celui-ci meurt jeune et Boèce est élevé par Symmaque, de rang encore plus élevé. Les deux familles sont chrétiennes depuis longtemps. Boèce épousera vers 495 une des filles de Symmaque.

Théodoric, Ostrogoth élevé à Constantinople (il y est… otage, de 8 à 18 ans), succède à Odoacre en 493. Il prend le nom de Flavius et a l'intelligence de laisser les dirigeants en place continuer à administrer. C'est ainsi que Boèce sera consul en 510, ses deux fils le seront en 522, et Symmaque longtemps conseiller de Théodoric.

Symmaque, avec l'aide active de Boèce et le soutien de Théodoric, souhaite faire connaître à nouveau les grands textes grecs par une vaste entreprise de traduction. Mais le rapprochement entre les Églises d'Orient et d'Occident remet en cause le pouvoir de Théodoric, qui devient soupçonneux. Symmaque et Boèce sont bientôt inquiétés. Boèce est arrêté, jugé pour trahison et… sorcellerie, torturé, et finalement exécuté en 524 ou 525. En prison, il a trouvé le temps et la force d'écrire *La Consolation de Philosophie :* dialoguant avec Philosophie personnifiée, citant de mémoire ses prédécesseurs, il se console des biens et des honneurs perdus.

La C*onsolation* est de loin l'œuvre la plus connue de Boèce. Mais il y en a beaucoup d'autres, et Boèce est aussi l' « inventeur » du *quadrivium,* pan scientifique du modèle d'éducation qui sera en vigueur dans tout le Moyen Âge : d'abord le *trivium,* grammaire, dialectique et rhétorique, puis les quatre disciplines scientifiques, arithmétique, géométrie, musique et astronomie. Boèce n'a pas inventé ce modèle, il en a systématisé la partie scientifique ; c'est au début du livre I de l'œuvre dont nous allons parler, l'*Institution Arithmétique*.

L'œuvre théologique de Boèce est aussi importante et lui vaudra bien plus tard de faire partie des « pères de l'Eglise ». Elle n'est pas sans lien avec les mathématiques car, après Proclus (env. 412 – 485 à Athènes), dans les *Hebdomades,* Boèce tente d'exposer la religion sous la forme axiomatique du modèle euclidien.

2. – L'*Institution Arithmétique* : le texte et ses sources

C'est vers vingt ans que Boèce entreprend la traduction (du grec vers le latin) de l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque de Gérase (IIe siècle de notre ère), elle-même inspirée d'Euclide mais surtout des pythagoriciens. Boèce est donc débutant, c'est peut-être même sa façon d'apprendre l'arithmétique. Il est généralement fidèle au texte de Nicomaque, ajoutant des exemples et quelques explications, retranchant parfois.

L'œuvre d'Euclide n'étant plus connue, l'*Arithmétique* (nous abrégerons ainsi *l'Institution Arithmétique*) de Boèce est restée pendant tout le Moyen Âge un « manuel scolaire ». Non pas pour apprendre à calculer : Boèce suppose les nombres, et les opérations sur eux, connus de ses lecteurs. Mais pour découvrir et contempler les propriétés cachées des nombres, selon la doctrine néo-pythagoricien – ne.

L'*Arithmétique* a donc été largement copiée et diffusée, et cela continuera pendant des siècles, en fait jusqu'à la redécouverte des livres d'arithmétique des *Éléments* d'Euclide.

Signe de cette large diffusion[2], Guillaumin (Boèce, 1995, LXV) en a recensé 186 manuscrits – mais aucun n'est antérieur au IX^{e} siècle – et plus de 25 éditions imprimées, de 1488 à 1570.

L'édition critique de référence, en latin bien sûr, est due à Friedlein (chez Teubner, 1867) ; on peut la trouver sur Gallica. Depuis 1995, on dispose de la traduction française de l'*Institution Arithmétique* par Jean-Yves Guillaumin (Boèce, 1995), fiable et remarquablement documentée. Nous l'utiliserons pour toutes les citations. Sauf mention contraire, les images sont extraites du manuscrit B928, daté du IX^{e} ou X^{e} siècle, conservé à la Médiathèque de Cambrai[3].

3. – Pour quels élèves ?

L'activité que nous allons décrire est *a priori* destinée à des élèves de première, vu leur programme : les suites arithmétiques et géométriques y figurent, qu'il s'agisse de la spécialité mathématique ou des mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique. Notons cependant que les pré-requis ne dépassent pas le milieu du cycle 4 : notion de diviseur, notation exponentielle et propriété a^n x a^p = a^{n+p} pour un entier a donné. De fait, n'exerçant pas en lycée, nous avons réalisé l'activité dans le cadre de stages MathC2+ : par groupes d'une vingtaine d'élèves de fin de seconde (nos stages se déroulent en juin de chaque année), élèves non nécessairement « bons en maths » mais volontaires et intéressés par un point de vue différent sur les mathématiques. Le scénario a évolué au fil du temps, nous présenterons la dernière version. Elle devrait pouvoir être reprise telle quelle en première, permettant d'introduire simultanément les deux types de suite, en montrant dès l'abord la similitude entre les deux : l'addition est juste remplacée par la multiplication.

Nous avons aussi utilisé cette ressource en travaux pratiques avec des étudiants de première année de licence scientifique, ainsi qu'en formation initiale d'enseignants de mathématiques : avec des étudiants de master MEÉF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation), première et deuxième année.

4. – Découverte du document

Après une très brève présentation de Boèce, nous montrons la première page, où il dédie son travail à son mentor Symmaque :

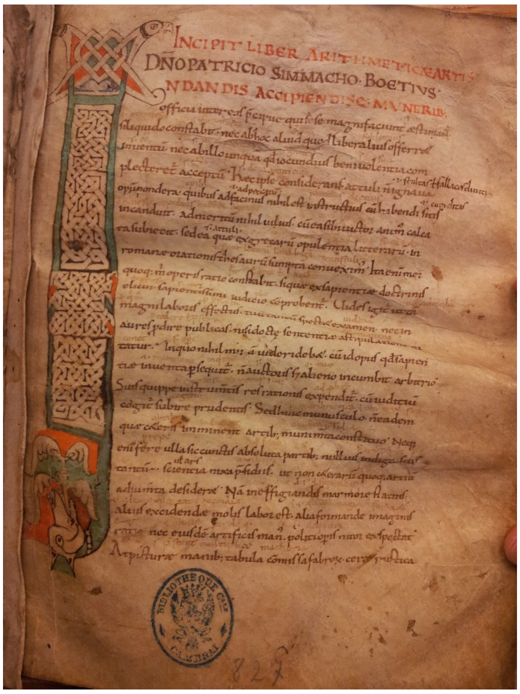


Figure 2: manuscrit 928, Cambrai, MAC

[2] On pourra aussi consulter Spiesser, 2003 pour suivre l'Arithmétique jusque chez les marchands du XVe siècle.

[3] Nous remercions D.-J. Benrubi, directeur de cette Médiathèque, pour en avoir autorisé la reproduction. Et pour sa politique active de promotion des ressources de son établissement, qui nous a fait connaître le manuscrit.

« C'est un livre de maths, ça ? ». Pas d'équation, pas de symboles… C'est l'occasion de signaler que les notations algébriques sont arrivées bien plus tard. Et donc oui, les maths de cette époque sont toujours « rhétoriques » – sans utiliser ce terme avec les élèves.

5. – Une classification des nombres

Les nombres, pour Boèce comme pour les Grecs, sont les entiers à partir de 2.

Pour mieux voir à quoi ressemblent les mathématiques chez Boèce, on regarde le détail d'une des premières pages :

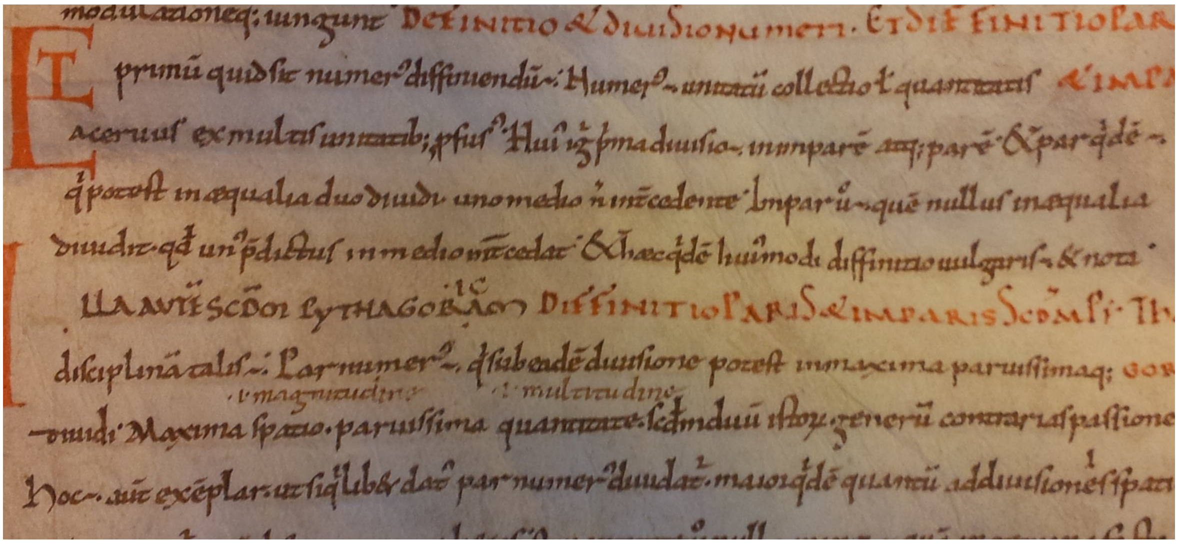


Figure 3: manuscrit 928, Cambrai, MAC

La lecture est difficile ! Le parchemin est cher, le lecteur supposé expert, donc beaucoup de mots sont abrégés : *primū* pour *primum* par exemple.

Voici la transcription du texte latin (1,3,1)[4], où nous avons repris en gras ce qui est en couleur sur le manuscrit :

> ***Definitio et divisio numeri et definitio paris et imparis.***
>
> ***Et*** *primum quid sit numerus definiendum est. Numerus est unitatum collectio, uel quantitatis aceruus ex unitatibus profusus. Huius igitur prima divisio est in imparem atque parem. Et par quidem est qui potest in aequalia duo dividi (…)*
>
> ***Definitio numeri paris et imparis secundum Pythagoram.***
>
> *Illa autem secundum pythagoricam[5] disciplinam talis est : par numerus est qui sub eadem divisione potest in maxima paruissimaque diuidi, maxima spatio, paruissima quantitate (…)*

Et la traduction de ce passage par J.-Y. Guillaumin :

> ***Définition et division du nombre ; définition du pair et de l'impair.***
>
> *Il faut d'abord donner la définition du nombre. Le nombre est une collection d'unités, ou encore un entassement de quotité, dont le flux est composé d'unités. Sa première division se fait en pair et impair. Est pair*

[4] Nous utilisons dans tout ce texte, pour les références à Boèce, la division en paragraphes et la numérotation introduites par Guillaumin (Boèce, 1995, XCIV).

[5] Dans le manuscrit, ce membre de phrase précède le titre en rouge.

> *le nombre qui peut être partagé en deux parties égales (...)*
>
> ***Définition du nombre pair et du nombre impair selon Pythagore.***
>
> *Mais en voici une autre, selon la doctrine pythagoricienne : le nombre pair est celui qui peut être divisé par une seule et même division en ensembles les plus grands et les plus petits : les plus grands en taille, les plus petits en quotité (...)*

Puis Boèce donne une classification plus subtile des pairs. Nous donnons directement aux élèves la traduction en termes modernes. On distingue les nombres :

- pairement pairs : $2^k, k \geqslant 2$
- pairement impairs : $2(2k+1), k \geqslant 1$
- impairement pairs : les autres pairs, donc de la forme $2^k(2n+1), k \geqslant 2, n \geqslant 1$.

Euclide (1990, livre VII, définitions 8 à 10) avait déjà cette sorte de classification, mais ce n'était pas la même : pour lui, $26=6\times4$, produit de deux pairs, est pairement pair, alors que pour Boèce il est impairement pair.

Boèce énonce des propriétés de ces nombres. En voici – pour le lecteur, car pour nos élèves cela aurait été trop difficile – un premier exemple, sachant qu'on est dans le chapitre sur les pairement pairs (1,9,9) :

> *Voici encore un effet du soin attentif et de la grande constance de la divinité : dans ce nombre, les plus petits termes, disposés en série ordonnée et additionnés, sont toujours égaux au suivant moins l'unité.*

La traduction moderne est simplement $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$, propriété aisément vérifiable par récurrence, ou cas particulier de la classique formule $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$. Boèce, qui n'a pas ces outils, reformule la propriété sur les valeurs de n jusqu'à 4, et invoque en justification le fait qu'elle soit vraie pour $n=1$ et qu'

> *il n'est pas étonnant que l'accroissement de l'ensemble de la série soit en accord avec le principe qui lui est propre.*

J.-Y. Guillaumin y voit un essai mal maîtrisé d'application du principe de récurrence. À la décharge de Boèce, il faut préciser qu'Euclide lui-même, sa source principale à travers Nicomaque, ne formule jamais ce principe explicitement, même si plusieurs de ses preuves paraissent y recourir[6]. En tout cas Boèce ne donne pas d'autre argument.

Il passe ensuite aux propriétés des pairement impairs. Par exemple :

> *Ces nombres ont entre eux seulement la distance de quatre.*

L'affirmation est pour nous évidente : deux pairement impairs consécutifs s'écrivent $2(2k-1)$ et $2(2k+1)$ donc leur différence est de 4. Boèce ne dispose évidemment pas de cette formulation algébrique. Voyons comment, après avoir illustré la propriété par des exemples numériques, il argumente (ibid .) :

> *En effet, ces nombres se surpassent du nombre 4, ce qui arrive pour la raison que ceux qui ont été posés en premier – c'est-à-dire leurs fondements – se dépassaient du nombre 2 ; comme nous les avons multipliés par le nombre 2, la distance a augmenté jusqu'au nombre 4 ; car 2 multiplié par 2 fait un total de 4.*

Boèce a en effet indiqué auparavant que les pairement impairs étaient engendrés (*procreatio*) par la « série naturelle et ordonnée de tous les impairs » que l'on multiplie par 2.

---

[6] Sur cette question, nous renvoyons à l'étude très fine de Bernard Vitrac, dans Euclide, 1990, vol. II, pp. 467 – 472.

6. – Les nombres parfaits

Le passage que nous allons décrire maintenant, se situe en fait, dans l'ouvrage de Boèce, après celui que nous utiliserons pour introduire les suites. Mais il est si pittoresque qu'il nous semble idéal pour enclencher chez les élèves le « dépaysement » (Barbin, 2006). Il est aussi très représentatif de l'écart entre les mathématiques euclidiennes et celles de ce haut Moyen Âge ; cet aspect-là n'est pas accessible aux élèves, et avec eux nous avons seulement lu les textes. Mais nous l'avons mis en évidence en formation d'enseignants, comme ici.

Il s'agit des nombres *parfaits*, thème qu'on voit parfois au collège ; c'est par exemple un bon sujet d'algorithmique.

Voici d'abord la version d'Euclide (Euclide, 1990, livre VI, définition 23) : *un nombre parfait est celui qui est égal à* [la somme de] *ses parties* [c'est-à-dire ses diviseurs].

Boèce, lui, commence par définir les nombres *abondants* et les nombres *déficients,* comme ceux qui sont plus petits, respectivement plus grands, que la somme de leurs diviseurs (eux-mêmes exceptés bien sûr). Sous sa plume, cette définition devient (Boèce, 1995, 19,2) :

> *Les premiers de ces nombres, par une plénitude, si l'on peut dire, immodérée de leur propre corps, l'emportent en quotité sur le nombre de leurs parties ; quant aux autres, une sorte de pauvreté les rend indigents, écrasés par une sorte d'indigence de leur propre nature, et la somme des parties qui les composent est inférieure à eux-mêmes.*

Boèce donne des exemples de chaque catégorie, et ajoute :

> *Ces nombres sont tels que le premier, celui que ses parties surpassent, ressemble à un être qui serait né avec des mains en grand nombre, plus qu'il n'est naturel, comme le géant aux cent mains, ou avec trois corps réunis, comme le triple Géryon – ou toute monstruosité produite par la multiplication des parties naturelles ; tandis que l'autre peut se comparer à un être qui naîtrait privé par la nature d'une partie indispensable, ou avec un œil en moins, horreur qui signalait le front du Cyclope, ou qui, amputé de quelque autre membre, serait condamné par la nature à la perte de son entière plénitude.*

Et voici enfin la définition du nombre parfait (19,9) :

> *Entre ces deux espèces, comme entre deux excès opposés, la juste mesure du moyen terme est tenue par le nombre que l'on appelle parfait, imitateur de la vertu, (...) ni épaissi par l'abondance, ni rendu indigent par la privation.*

Que fait Boèce, de ces notions de nombre abondant ou déficient ? Eh bien… rien, au-delà des définitions et exemples.

Et pour les nombres parfaits ? Euclide (Euclide, 1990, livre IX, prop. 36) énonce *et démontre* que, si 2^n-1 est premier, alors $2^{n-1}\left(2^n-1\right)$ est parfait :

> *Si, à partir de l'unité, des nombres en quantité quelconque sont consécutivement posés en proportion double jusqu'à ce qu'additionnés, leur total devienne premier, et que ce total, multiplié par le dernier, produise un certain [nombre], ce produit sera parfait.*

Boèce se contente d'*énoncer*, moins sobrement, ce résultat, pour en tirer les quatre premiers entiers parfaits : 6, 28, 496 et 8128. Mais voici le début de sa formulation (1,20,3) : « leur génération et leur naissance est bien fixée et infaillible : ils ne peuvent être produits d'une autre façon (…) ». Ainsi Boèce affirme qu'il n'y a pas d'autres nombres [pairs, toujours] parfaits que ceux qui sont fournis par la procédure précédente – ce qu'Euclide n'avait pas énoncé, probablement parce qu'il n'aurait pas pu le prouver. C'est vrai[7], mais il faudra attendre Euler, donc le XVIIIe siècle, pour en avoir une preuve (Euler, 1849, pp. 630, publication posthume ; voir aussi Dickson, 1919, pp. 19). En fait Boèce extrapole, à partir de ce qu'il a constaté sur les « petits » nombres, et sans se soucier de prouver ce qu'il affirme. On le voit dans la suite, où il affirme que, parmi les parfaits, après 6, 28, 496 et 8128, les suivants continueront à alterner, pour leur chiffre des unités, le 6 et le 8. On sait aujourd'hui que c'est faux, puisque les deux parfaits suivants sont 33 550 336 et 8 589 869 056.

7. – Une figure… cabalistique

Voici enfin le passage sur lequel nous avons fait travailler les élèves. Inutile de lire le latin, c'est une figure :

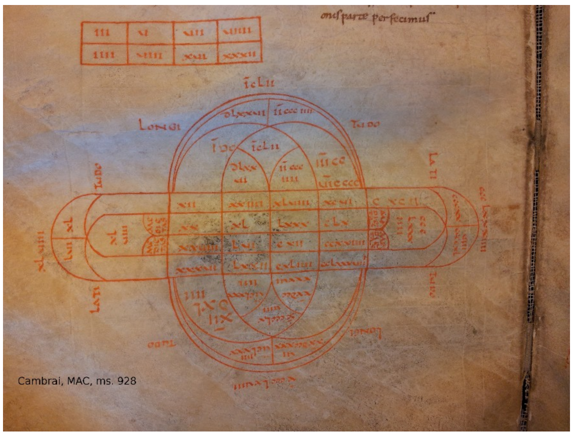


Figure 4: manuscrit 928, Cambrai, MAC (Retrouver la figure agrandie en Annexe)

[7] Vrai pour les nombres pairs, auxquels Boèce, nous l'avons dit, s'est restreint. On ne sait toujours pas s'il existe un nombre parfait impair !

Pour la commodité du lecteur, voici une transcription par nous :

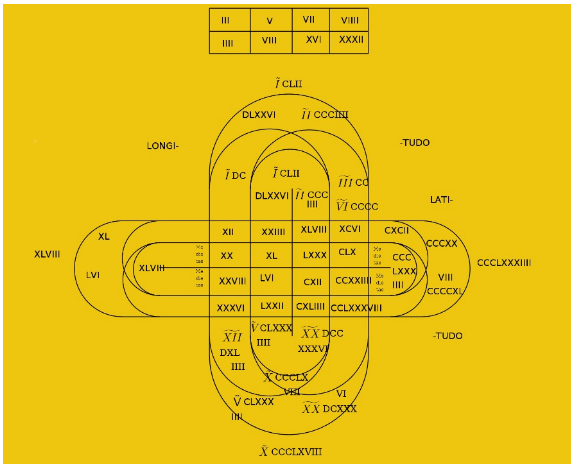


Figure 5: transcription du tableau (Retrouver la figure agrandie en Annexe)

Voici comment Boèce la présente (1,12) :

> *Le tableau ci-dessous est fait de la façon suivante : tous les nombres de la série des nombres pairement pairs que le nombre 3 a multipliés, ceux qui sont nés de lui, quels qu'ils soient, ont été disposés sur la première ligne ; de même, ceux qui sont nés de la multiplication des mêmes nombres par 5 ont été placés sur la seconde rangée, et ensuite, ceux que le nombre 7 a engendrés en multipliant les autres, nous les avons écrits sur la troisième rangée, et nous avons fait de même pour le reste du tableau.*

Les nombres 3, 5… et les pairement pairs 4, 8… constituent en effet le petit tableau en haut de la page, et Boèce nous dit qu'ils « engendrent » le reste.

Ce sera plus facile pour nous, si nous traduisons d'abord tout en chiffres arabes :

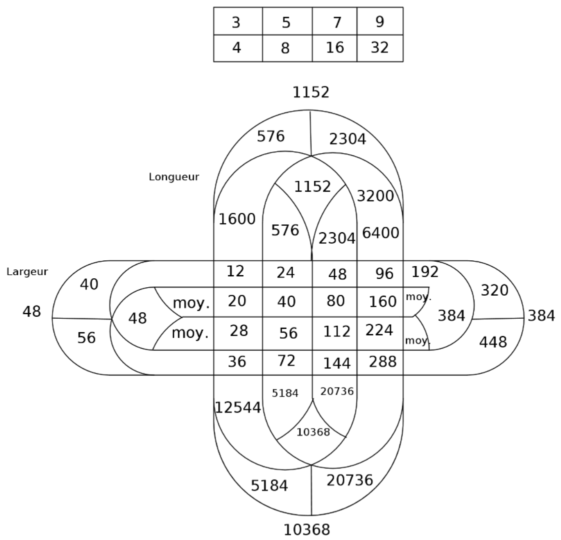


Figure 6: traduction en chiffres arabes (Retrouver la figure agrandie en Annexe)

Comment, donc, est constitué ce tableau, et que signifient les grands nombres sur les côtés ?

7.1. – La solution du mystère

Nous décrirons plus loin ce qui a été fait avec, et surtout par, les élèves. Le lecteur est invité à faire lui-même l'exercice de décryptage ! Mais en voici la solution. La notation matricielle moderne nous permet d'abord la traduction suivante, pour obtenir le tableau 4x4 au centre de la figure :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 48 & 96 \\ 20 & 40 & 80 & 160 \\ 28 & 56 & 112 & 224 \\ 36 & 72 & 144 & 288 \end{pmatrix}$$

Et les nombres inscrits autour de ce tableau central ?

En fait, « selon la largeur » (*latitudo* : de chaque côté du tableau central), Boèce a inscrit les sommes deux à deux de termes de ce tableau, et il fait constater que

- « là où il y a un seul moyen entre deux termes », c'est-à-dire si dans une colonne donnée on prend trois termes consécutifs, la somme des deux extrêmes est double du terme du milieu. Ainsi $12+28=2\times20=40$ figure à gauche, et à droite $320=96+224=2\times160$.
- « quand il y a deux moyens », c'est-à-dire si on prend les quatre termes d'une colonne, la somme des deux extrêmes est égale à la somme des deux moyens. Ainsi à gauche, 48 apparaît deux fois, comme $12+36$ et comme $20+28$. Et de même à droite, 384 est somme des deux extrêmes 96 et 288, et des deux moyens 160 et 224.

Et « selon la longueur » [longitudo] ? Laissons parler Boèce :

> *Maintenant, si l'on regarde selon la longueur, là où deux termes ont un seul moyen, le résultat de la multiplication des extrêmes est le même que ce qui est produit si le moyen terme reçoit l'augmentation de sa propre pluralité (...) Et cela se fait selon la ressemblance et la parenté avec le nombre pairement pair, duquel est tirée, par participation, cette propriété qui se retrouve dans la nature de l'impairement pair.*

Ainsi,

> *là où deux termes incluent deux moyens, le résultat de la multiplication des extrêmes est égal au nombre obtenu par la multiplication des moyens l'un par l'autre. Car la multiplication de 96 12 fois engendre 1152. Mais leurs deux moyens, c'est-à-dire 24 et 48, multipliés entre eux, produiront le même nombre 1152.*

On a donc, dans les lignes du tableau, une propriété analogue à celle décrite pour les colonnes, mais à condition de remplacer addition par multiplication.

Boèce y voit « une forme admirable de nombre » résumant, « selon la largeur, la particularité des nombres pairement impairs et, selon la longueur, celle des pairement pairs ». Le lecteur moderne, disposant des notations décimale et exponentielle, peut réécrire par exemple la dernière identité comme : $96\times12=(3\times2^5)\times(3\times2^2)=(3\times2^3)\times(3\times2^4)$ $=24\times48$. De même pour la propriété « selon la largeur », par exemple
$96+224=3\times32+(3+2\times2)\times32$
$=2\times(3+2)=2\times160$.

Cette « admirable » propriété nous semble donc banale, et on en voit sans peine une généralisation à quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique (pour la première ligne du petit tableau « générateur »), respectivement géométrique (pour la seconde ligne), de raisons et premiers termes respectifs quelconques. Ici dans le cas de la suite arithmétique de raison 2 et premier terme 3, et la suite géométrique de raison 2 et premier terme 4 : le tableau 4×4 obtenu par leurs produits aura toujours en colonnes (resp. lignes) les quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique (resp. géométrique), pour lesquels les propriétés de somme (resp. produit) relevées par Boèce sont évidemment vraies. Ainsi, si la suite arithmétique génératrice a pour raison *a* et premier terme *u*, et la suite géométrique raison *g* et premier terme *v*, la propriété de la dernière ligne s'écrira

$$(u+a)v\times(u+a)vg^3=(u+a)vg\times(u+a)vg^2$$

et la propriété de la dernière colonne sera

$$uvg^3+(u+3a)vg^3=(u+a)vg^3+(u+2a)vg^3$$

On pourrait encore augmenter le nombre de lignes et de colonnes du tableau, en conservant les propriétés énoncées. Mais bien sûr cette lecture est anachronique.

Il n'en reste pas moins que le tableau de Boèce peut être vu de nos jours comme un dispositif pédagogique, à même de faire découvrir à la fois la notion de suite (liste de nombres engendrée par une règle), les cas particuliers de suite arithmétique et géométrique, sur des exemples assez nombreux pour induire une règle, *et* l'analogie profonde entre ces deux cas : on passe d'un type à l'autre en remplaçant l'addition par la multiplication, et telle propriété énoncée dans un cas a son analogue exact dans l'autre cas. Nous avons voulu tester cette idée, et c'est ce que nous allons maintenant décrire.

7.2. – Avec les élèves

Il faut là aussi commencer par traduire les chiffres romains[8]. Pour certains élèves, mieux vaut rappeler ce que valent certains, le L et le D surtout. Nous donnons dès le début la signification du « tilde » au-dessus de certains groupes de nombres : une abréviation pour « milliers ». Ainsi que la traduction des deux mots, chacun coupé en deux en travers du tableau : *longitudo* est la longueur, *latitudo* la largeur. Le reste ne pose pas de problème, mais prend du temps, même avec la calculatrice ! il peut donc être préférable de donner très vite le tableau en chiffres arabes.

Dans nos premières expériences, les élèves les plus rapides traduisaient bien en chiffres arabes, mais ensuite, à la question « comment est composé le tableau central ? », ne pouvaient proposer que « on passe d'une colonne à la suivante en multipliant par 2 », « on passe d'une ligne à la suivante en ajoutant 8 ou 16 ou… » : ils n'avaient pas lu, ou du moins pas compris, la description de Boèce, et avaient perdu de vue les « générateurs » impairs et pairement pairs. Nous avons donc adopté un déroulement plus cadré, qu'on trouvera en annexe à la fin de ce texte. Il suppose de travailler en salle machine pour disposer du tableur, mais il amène l'élève à respecter le cheminement de Boèce : construire d'abord le

[8] On trouvera en annexe 1 le document distribué aux élèves, avec une copie du tableau.

tableau central, puis les sommes deux à deux sur les côtés, et les produits deux à deux au-dessus et en-dessous. Il allège d'ailleurs notablement la première étape, puisque la conversion des chiffres romains aux chiffres arabes n'est plus nécessaire pour toutes les cases : une fois que l'élève a deviné le principe de construction sur les premiers cas, il confie les calculs au tableur et n'a plus qu'à vérifier dans quelques cases qu'il a bien trouvé les mêmes nombres que Boèce.

Reste alors à comprendre ce que représentent les nombres disposés, comme au hasard, autour du tableau central. Le texte de Boèce est difficile, mais ses exemples numériques peuvent suffire. Les élèves trouvent assez vite d'autres expressions comme somme ou produit de deux termes centraux. Et si la lecture de Boèce ne les a pas mis sur la voie, on peut poser la question : certains des nombres apparaissent deux fois, pourquoi ? Ils comprennent ainsi que deux calculs peuvent donner le même nombre, pour une des opérations au moins (« en largeur » ou « en longueur ») ; et c'est alors facile de les aiguiller vers le résultat analogue pour l'autre opération. Sans aller jusqu'à parler de démonstration, on voit chez certains des justifications des propriétés énoncées par Boèce, sur les valeurs numériques.

Dans le temps dont nous disposions avec chaque groupe (entre 1h30 et 2h30), il a toujours fallu « reprendre la main » en fin de séance, pour l'explication finale. En donnant le vocabulaire : suite, suite arithmétique, suite géométrique. En justifiant les égalités, sur quelques exemples numériques. Et, parfois seulement, en utilisant le tableur pour modifier la raison et le premier terme de la suite arithmétique et de la suite géométrique génératrices, pour faire constater que les égalités persistent. Une vraie démonstration, « avec des lettres » comme ci-dessus, demanderait un peu plus de temps.

Vu notre dispositif expérimental, nous nous garderons de tirer des conclusions tranchées. L'intérêt des élèves, à condition d'éviter de passer trop de temps sur les conversions des chiffres romains, est réel. Le contexte historique, le pittoresque du passage sur les nombres parfaits, facilitent le maintien de l'attention, et tous s'investissent assez dans l'énigme du tableau pour arriver par eux-mêmes à une résolution au moins partielle. Mais on ne peut attendre que, en si peu de temps, tous aient absorbé ce nouveau vocabulaire et compris le cas général.

Signalons que, souvent, des élèves ont noté que dans le tableau ci-dessus, certaines des sommes et certains des produits possibles n'apparaissaient pas. C'était l'occasion, quand nous en avions le temps, de leur signaler un fait très général pour toutes ces sources manuscrites : chaque fois qu'un nouvel exemplaire de l'œuvre était copié sur un manuscrit précédent, l'inattention, la fantaisie ou la paresse du copiste pouvaient introduire des modifications. Pour retrouver – autant que possible – le texte original, il y a donc un travail considérable, de comparaison des versions des différents manuscrits : ce qu'on appelle une *édition critique* du texte.

Le site Gallica propose d'autres manuscrits de l'*Arithmétique*, datés du IXe ou Xe siècle comme celui de Cambrai : *Lat10251, Lat14064* et *NAL1614*, ou plus tardifs (XIe siècle) : *Lat11241, Lat11242.* « Notre » tableau y prend des aspects très différents, de l'un à l'autre de ces manuscrits. On en verra quelques-uns en annexe.

8. – Quelques autres pistes

Nous l'avons dit, nous ne prétendions pas rendre compte en ces quelques pages de l'intégralité de l'*Institution Arithmétique*. D'autres passages seraient utilisables en classe, à des niveaux divers. Nous avons déjà parlé de celui sur les nombres parfaits. En voici quelques autres, en utilisant toujours la numérotation de Guillaumin. En (1,14), Boèce définit les nombres premiers, et expose (1,17) la méthode du crible d'Ératosthène – oui, elle s'appelait déjà ainsi ! *Eratosthenes cribrum* – connue de beaucoup de collégiens, pour faire la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un entier fixé. Boèce présente aussi (1,18) le procédé de « soustraction réciproque » (anthyphérèse) permettant de savoir si deux nombres sont premiers entre eux.

Toute la fin du premier livre est consacrée à la définition des cinq types d'inégalité : deux nombres (entiers au moins égaux à 2) sont dans un et un seul de ces types, multiple, superpartiel (ou superparticulier), superpartient, multiple superpartiel et multiple superpartient. C'est toute la théorie pythagoricienne des rapports de nombres qui apparaît ici. Une exploitation en cycle 3 est décrite dans Schwer, 2018. Et c'est pour l'apprentissage de cette arithmétique que le jeu de rithmomachie a été créé au XI^{e} siècle, et pratiqué jusqu'au-delà de la fin du Moyen Âge (Goichot, 2019).

Enfin, l'essentiel du livre second de *l'Arithmétique* est consacrée aux nombres figurés ou polygonaux, riche sujet pour tous les niveaux du secondaire – et au-delà (Deza, 2012). Là encore, inutile de lire le latin :

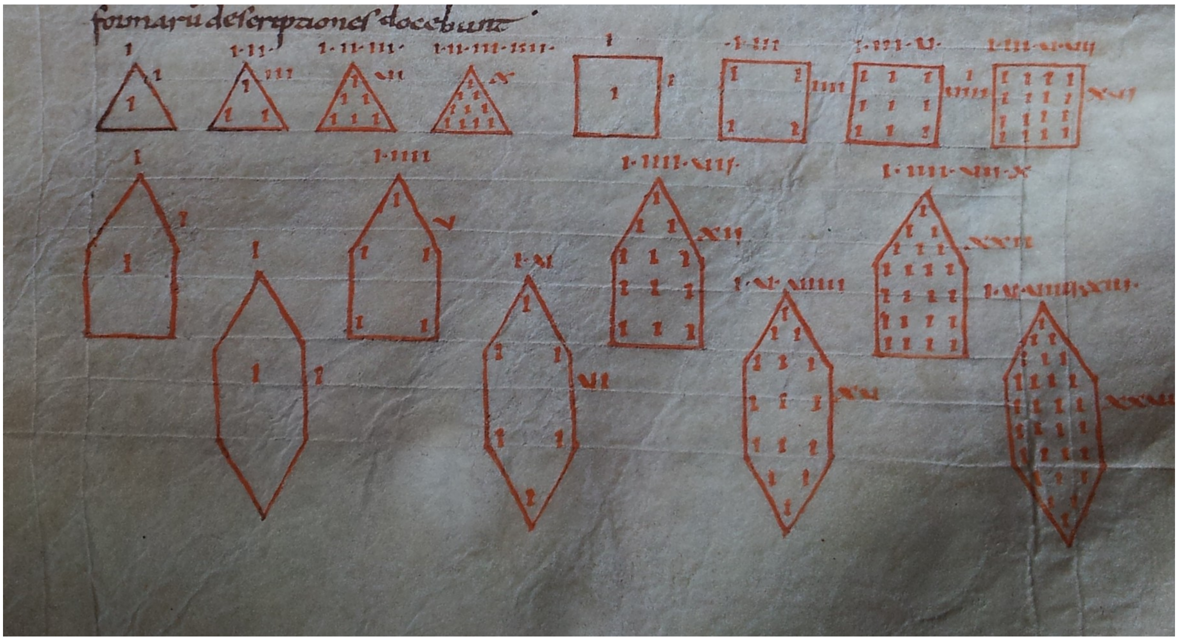


Figure 7: manuscrit 928, Cambrai, MAC

François GOICHOT
CERAMATHS
INSA Hauts-de-France
Université Polytechnique Hauts-de-France

Références bibliographiques

Barbin, E. (2006). « Apport de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement », *Tréma*, *n° 26*, pp. 20 – 28.

Boèce (1995). *Institution Arithmétique*, texte établi et traduit par J.-Y. Guillaumin, Les Belles Lettres.

Deza, E. et Deza, M. (2012), *Figurate Numbers*, World Scientific.

Dickson, L. (1919). *History of the theory of numbers*, Carnegie Institution of Washington. Disponible sur archive.org.

Euclide (1990). *Les Éléments*, trad. B. Vitrac, Presses Universitaires de France.

Euler, L. (1849). « De numeris amicabilibus »[9], *Comm. Arith.* vol. 2, pp. 627 – 636. Et *Opera Posthuma* I, pp. 85 – 100.

Goichot, F. (2019). « La rithmomachie, un « jeu pédagogique » du XIe au XVIe siècle », in Chevalarias, N., Gandit, M., Morales, M. et Tournès D. (Dir.), *Mathématiques récréatives – Éclairages historiques et épistémologiques*, EDP Sciences & UGA Éditions, pp. 139 – 156.

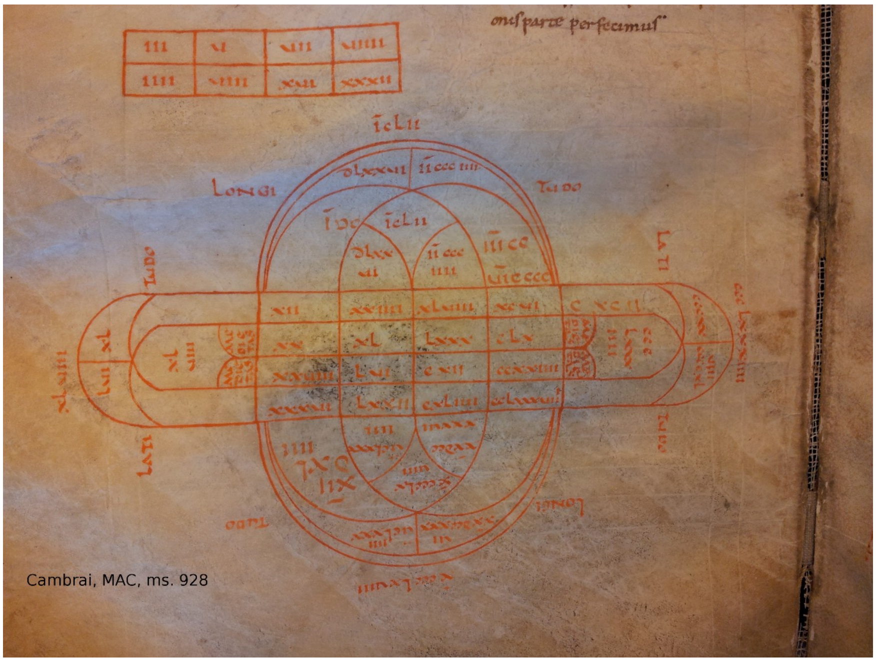
Schwer, S. & al (2018), IREM de Paris Nord, « Chapitre 4 : Les rapports de nombres » in Moyon, M. et Tournes, D. éd., *Passerelles :Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, Éditeur Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME) Paris, Collection Ressources et formation, pp. 92 – 120.

Spiesser, M. (2003), « L'arithmétique de Boèce dans le contexte de la formation mathématique des marchands au XVe siècle », dans *Boèce ou la chaîne des savoirs*, (colloque à Paris, 1999), Éditions de l'Institut supérieur de philosophie – Peeters France Louvain-la-Neuve, 2003, pp. 741-764. Le livre est disponible en ligne.

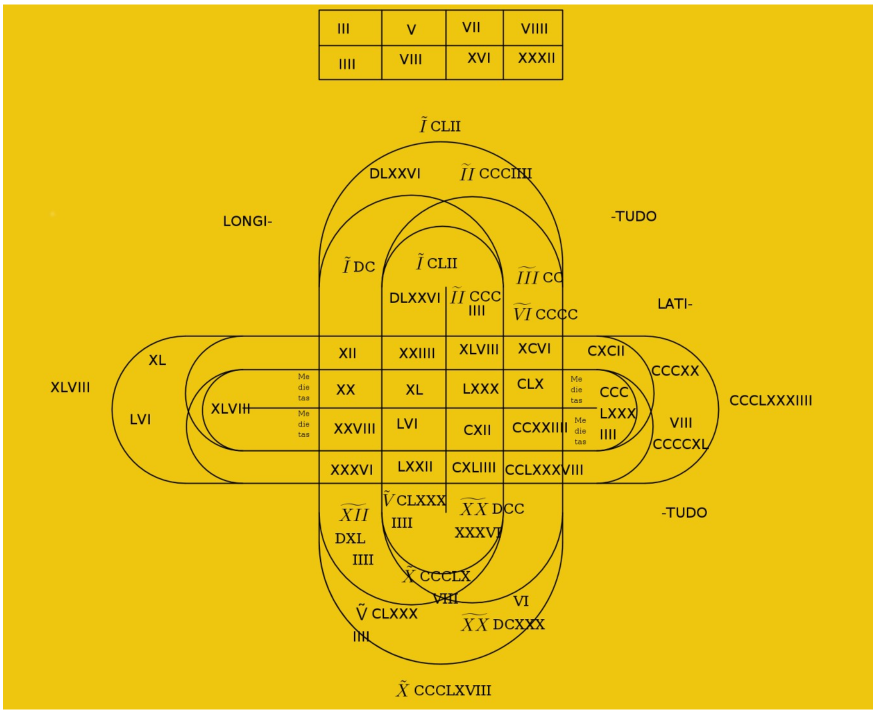
[9] Plusieurs textes d'Euler portent ce même titre, « Sur les nombres amicaux ». Celui-ci porte le numéro 798 dans la célèbre classification par Eneström des œuvres d'Euler.

Annexes

Annexe 1 – Agrandissement des figures

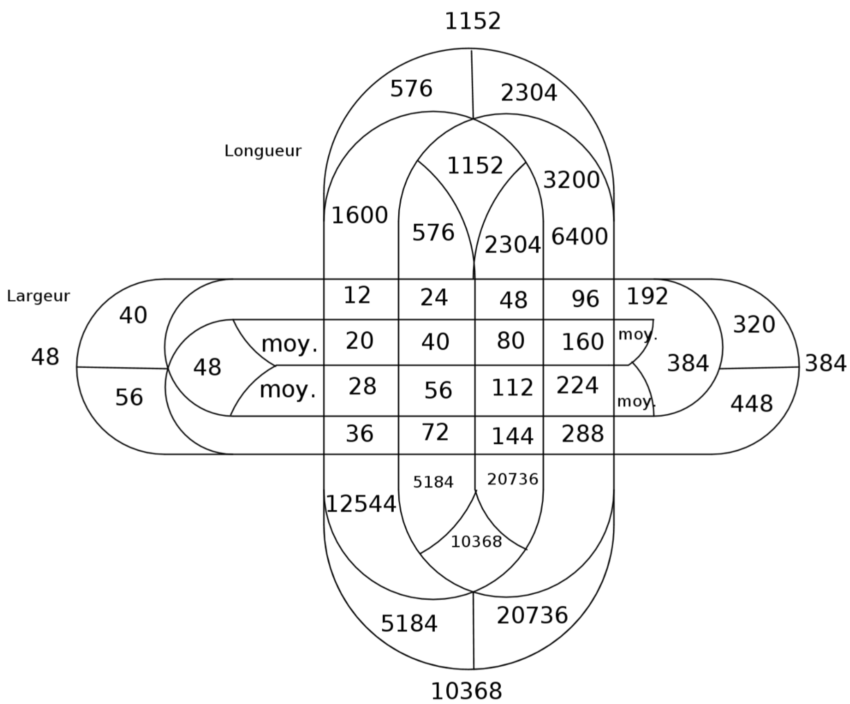


Agrandissement de la figure 4



Agrandissement de la figure 5

3	5	7	9
4	8	16	32



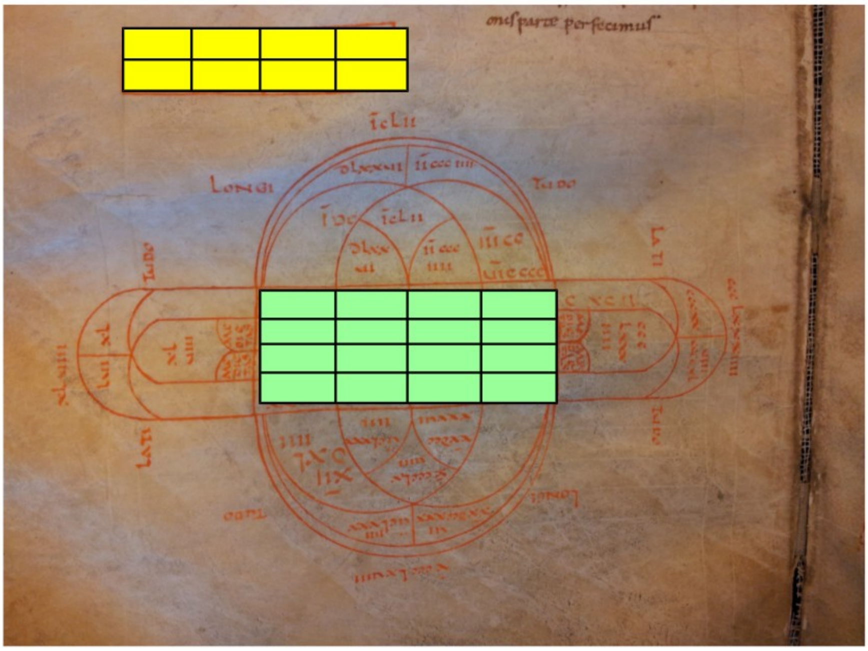
Agrandissement de la figure 6

Annexe 2 – fiche élève pour l'atelier du stage MathC2+, dernière version

Mathématiques au Ve siècle

Tu disposes de deux documents :

- sur papier, le tableau extrait du manuscrit de Boèce,
- sur l'ordinateur, à télécharger à l'adresse http://www.univ-valenciennes.fr/depmath/!boece.ods le tableau (au sens moderne d'un document fait avec un tableur !) sous lequel apparaît le tableau du manuscrit, ce qui permet de repérer certaines cases. Attention à ne pas bouger les lignes et les colonnes, elles ne seraient plus alignées avec celles du tableau du manuscrit.



Tu travailleras sur le tableur, en lisant les chiffres romains sur le manuscrit.

Pour passer d'une étape à la suivante, tu dois faire valider ta réponse lorsqu'il y a ce symbole. 

1. Le rectangle jaune

Remplis les cases du rectangle jaune, en traduisant simplement en chiffres arabes les nombres qui sont des les cases correspondantes sur le manuscrit. 

2. Le rectangle vert

Voici comment Boèce le présente :

Le tableau ci-dessous est fait de la façon suivante : tous les nombres de la série des nombres pairement pairs que le nombre 3 a multipliés, ceux qui sont nés de lui, quels qu'ils soient, ont été disposés sur la première ligne ; de même, ceux qui sont nés de la multiplication des mêmes nombres par 5 ont été placés sur la seconde rangée, et ensuite, ceux que le nombre 7 a engendrés en multipliant les autres, nous les avons écrits sur la troisième rangée, et nous avons fait de même pour le reste du tableau.

Où voit-on « *la série des nombres pairement pairs »* dans le rectangle jaune ?

Remplis les cases du rectangle vert, selon la méthode de Boèce, c'est-à-dire uniquement avec des formules (et pas des nombres), ces formules utilisant seulement des cellules du rectangle jaune. 

3. Le reste du tableau de Boèce

Les nombres autour du rectangle vert : chacun peut être obtenu de deux façons différentes à partir de nombres qui sont dans le rectangle vert (quelques-uns sont d'ailleurs écrits deux fois par Boèce). Peux-tu trouver comment ? La règle est différente « selon la largeur » (de chaque côté du rectangle vert) et « selon la longueur » (au-dessus et en-dessous du rectangle vert).

Voici ce que dit Boèce :

Si l'on regarde selon la longueur [longitudo], là où deux termes ont un seul moyen, le résultat de la multiplication des extrêmes est le même que ce qui est produit si le moyen terme reçoit l'augmentation de sa propre pluralité. Car 12 fois 48 font 576 ; mais la multiplication par lui-même du moyen terme 24 engendrera de nouveau 576. (...) Là où deux termes incluent deux moyens, le résultat de la multiplication des extrêmes est égal au nombre obtenu par la multiplication des moyens l'un par l'autre. Car la multiplication de 96 12 fois engendre 1152. Mais leurs deux moyens, c'est-à-dire 24 et 48, multipliés entre eux, produiront le même nombre 1152.

Vérifie ton hypothèse en tapant les formules dans les cases.

Peux-tu *démontrer* ces propriétés ?

4. D'autres tableaux ayant la même propriété

Si tu reviens au rectangle jaune : quelle règle Boèce a-t-il respectée pour remplir la première ligne ? Et pour la deuxième ? Quels autres nombres pourrait-on mettre dans le rectangle jaune, pour garder les mêmes propriétés du tableau ?

L'image provient du manuscrit n° 928 de la Médiathèque de Cambrai.

Annexe 3 – Le tableau de Boèce dans quelques autres manuscrits

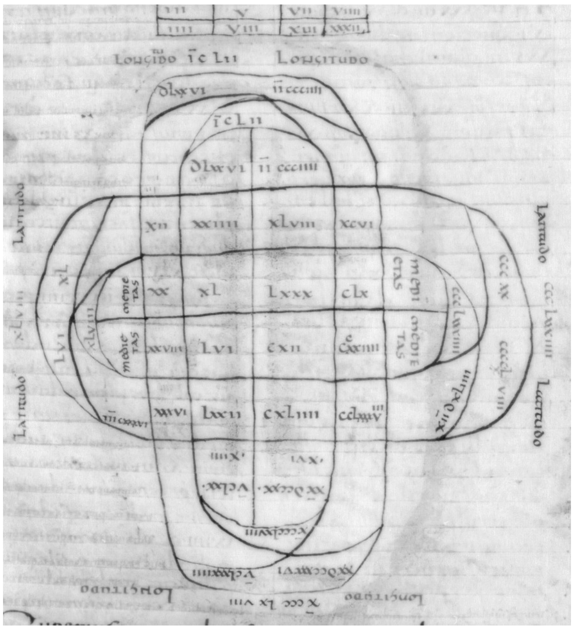


Figure 8: Lat 10251

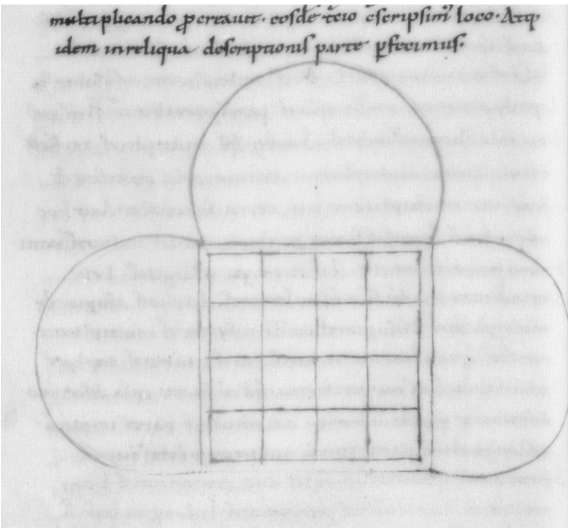


Figure 9: Lat 11242

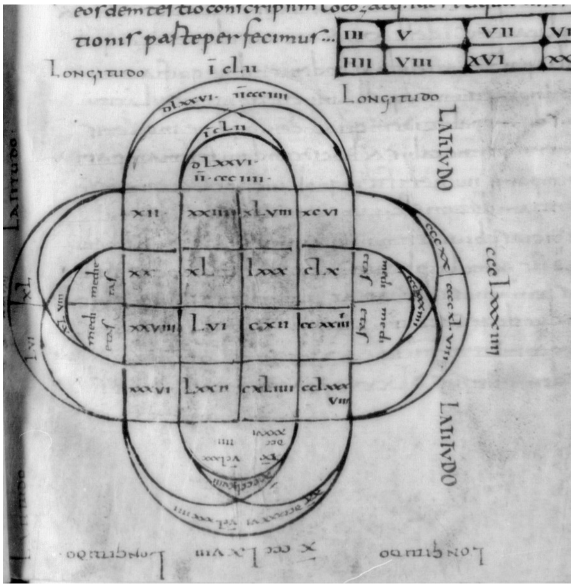


Figure 11: Lat 14064

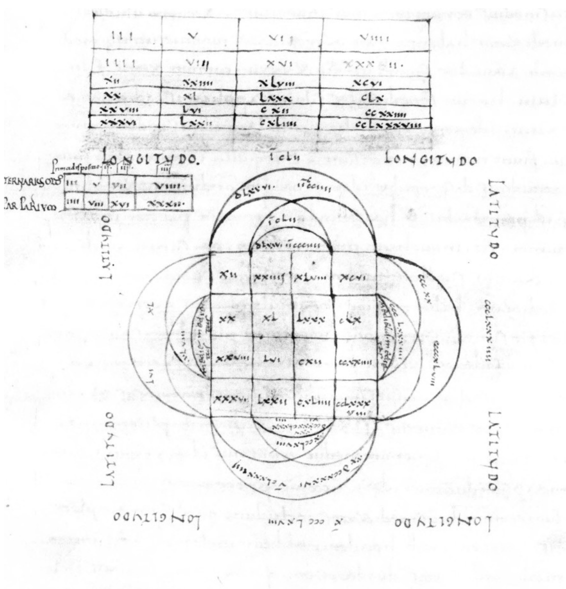


Figure 10: NAL 1624