
**DES « PROBLÈMES OUVERTS » AUX PRO-
BLÈMES DE « DÉMARCHÉ DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE
DES MATHÉMATIQUES » -
HOMMAGE À GILBERT ARSAC(1938 - 2025)**

Gilles ALDON¹

IREM de Lyon

Introduction

Gilbert Arsac nous a quittés en mai 2025 mais il reste infiniment présent dans les travaux de l'IREM de Lyon et en particulier dans ceux de l'équipe DREAM (groupe de recherche de l'IREM de Lyon) qui, à sa suite, s'intéresse au rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques. Nous faisons ainsi la même hypothèse que Gilbert Arsac exprimait en mai 1988 :

« Nous pensons que la science mathématique se construit et évolue à travers les problèmes internes et externes que les mathématiciens se posent et à travers leur acharnement à les résoudre » (Arsac et al., 1988, page 7).

Mais revenons un peu plus en détail sur l'héritage intellectuel qu'il nous a laissé.

1. – Gilbert Arsac, mathématicien

Gilbert Arsac est un mathématicien. Il publie de nombreux articles concernant les espaces fonctionnels (Arsac, 1971), les groupes de Lie, le groupe de Poincaré (Arsac, 1982a) et

soutient une thèse d'état (Arsac, 1983), réalisée sous la direction de Jean Braconnier. Il établit des résultats et des formules qui permettent d'écrire explicitement les représentations unitaires continues irréductibles du groupe de Poincaré associées aux orbites ayant un sens physique (page 154). Ses travaux s'appuient sur les développements d'analyse harmonique sur les groupes, sur les symétries des groupes, sur l'analyse fonctionnelle la théorie des représentations et l'algèbre des opérateurs.

Bien que cette thèse soit ancrée dans les mathématiques pures, ses implications s'étendent à la mécanique quantique et la physique théorique mais aussi à la géométrie non commutative. Dans la poursuite de ses travaux, il dirige la thèse d'état de Michel Mizony (Mizony, 1987). Il devient professeur à l'Université Claude Bernard (Lyon 1) en 1992 où il enseigne jusqu'à son départ à la retraite. Intéressé par l'enseignement autant que par la recherche mathématique, Gilbert Arsac devient le directeur de l'IREM de Lyon en 1982 en succédant à Alain Bouvier.

¹ gilles.aldon@ens-lyon.fr

2. – Gilbert Arsac : ses contributions à la didactique des mathématiques

Les IREM avaient été créés quelques années auparavant dans le but de former les enseignants à l'enseignement des « mathématiques modernes ». Mais dès son origine, l'IREM a fonctionné avec des groupes de recherche inspirés de la recherche-action du psychologue Kurt Lewin pour lequel l'intervention devient action de changement et de transformation. Tout naturellement, Gilbert Arsac intègre le groupe « Problèmes » de l'IREM de Lyon. Le groupe s'occupait alors à résoudre des problèmes de mathématiques provenant des Olympiades ou d'autres sources. L'idée initiale étant de former des enseignants de mathématiques en faisant des mathématiques, c'est-à-dire en résolvant des problèmes. Il organise dès le mois de mai 1982 un colloque inter-IREM : « *Le problème dans l'enseignement* » pendant lequel la pratique du problème ouvert est présentée. En effet, le groupe « Problèmes » a transposé la recherche de problèmes entre professeurs de mathématiques à des recherches de problèmes dans les classes de ces mêmes professeurs ; pour ce faire, il a fallu imaginer une gestion de classe particulière laissant aux élèves la place suffisante pour se lancer dans la recherche d'une solution d'un problème dont ils ne connaissaient pas *a priori* les méthodes de résolution ; il s'agissait en effet de proposer des pratiques considérant les mathématiques « comme une science vivante, qui a son développement propre et sa logique propre » (Arsac et al., 1988, page 3). L'idée du « problème ouvert » était née, en référence aux problèmes ouverts en mathématiques, terreau de la recherche fondamentale. Ainsi, dans la classe, un problème ouvert se définissait comme un problème à l'énoncé court, qui n'induit ni la méthode, ni la solution et qui se trouve dans un domaine conceptuel familier des élèves. Dès 1983, Gilbert Arsac

avec Michel Mante publiait un article dans *petit x* « Des 'problèmes ouverts' dans nos classes de premier cycle » (Arsac et Mante, 1983). Ils décrivent la façon dont les élèves peuvent s'emparer d'une petite partie des mathématiques pour l'explorer : « Ainsi, peuvent-ils prendre facilement possession de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples » (Id. page 7). Mais le travail ne s'est pas arrêté à imaginer une forme de travail. Il a été expérimenté, observé, retravaillé et d'une certaine façon didactisé même s'il aimait à en parler comme une « innovation pédagogique », en mettant l'accent sur l'importance de la gestion de la classe, dont les professeurs de mathématiques sont responsables :

« L'article qui suit est consacré pour l'essentiel à la description d'une pratique pédagogique, que nous avons appelé pratique du « problème ouvert ». (Arsac et al., 1982b) »

La collaboration avec d'autres didacticiens des mathématiques, notamment Nicolas Balacheff qui rédigeait une thèse sur la démonstration, a ensuite permis d'étudier scientifiquement cette pratique pédagogique, comme en atteste en particulier l'article « Teacher's role and reproducibility of didactical situations » (Arsac et al., 1992) dans lequel Gilbert Arsac et ses collègues font explicitement référence aux concepts fondamentaux de la théorie des situations didactiques de Brousseau, décrivant comment les enseignants transfèrent la responsabilité de la résolution des problèmes et de la validation des solutions aux élèves. Il dirige une première thèse de didactique des mathématiques en 1993 (Coppé, 1993).

En référence à ses travaux de mathématicien, Gilbert Arsac s'est beaucoup intéressé aux didactiques des mathématiques et de la physique et il collabore avec des physiciens et

des biologistes pour étudier les phénomènes de transposition didactique en mathématiques, physique et biologie (Arsac et al., 1989, Tiberghien et al., 1994). Il a ainsi dirigé la thèse de Jacqueline Clavel-Marinacce (1997) dans laquelle les concepts de l'électrocinétique sont abordés à travers l'usage des instruments de mesure.

Il a été un pilier de la jeune « didactique des mathématiques » et a collaboré avec Yves Chevallard et Guy Brousseau ; leurs travaux se recoupaient étroitement dans des domaines tels que la démonstration, le raisonnement et les situations en classe. Et dans toutes ses recherches en didactique des mathématiques, Gilbert Arsac a considéré l'histoire et l'épistémologie comme une base essentielle de réflexion. C'est une raison pour laquelle il a été à l'origine, avec d'autres universitaires (Claude Tisseron, Jean Gréa,...), de la création du master HPDS de l'Université Lyon 1 (Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences) qui dépendait alors du laboratoire LIRDHIST (Laboratoire International de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques) qui deviendra plus tard le laboratoire S2HEP (Sciences, Société, Historicité et Pratiques).

3. – Gilbert Arsac : ses contributions à l'histoire et l'épistémologie

C'est certainement la dimension la plus prégnante du travail mathématique et didactique de Gilbert Arsac que de considérer les mathématiques, les problèmes, les modes de résolution, les preuves et les démonstrations à travers l'histoire des mathématiques et une réflexion épistémologique sur le sens des mathématiques dans l'histoire d'une civilisation. Dès 1975, il publie dans le journal de l'APMEP deux articles ; le premier sur les nombres algé-

briques et transcendants (Arsac, 1975a) dans lequel il examine les approches de Liouville, de Dedekind et Cantor sur les nombres algébriques et transcendants, mettant en évidence les idées de base de ces mathématiciens pour démontrer l'existence de ces nombres et prouver le caractère discret de l'ensemble des nombres algébriques et le caractère continu de l'ensemble des nombres transcendants donnant ainsi un des premiers exemples d'utilisation de la notion de puissance d'un ensemble de nombres. Le second présentait une « histoire de la découverte des logarithmes » (Arsac, 1975b), reliant là encore l'histoire et la façon d'aborder cette notion en classe de Terminale C (à l'époque).

L'histoire des mathématiques est une source de réflexions sur l'enseignement des mathématiques et nourrit ses études didactiques. Ainsi, à propos de la démonstration, il écrit :

« La démonstration, si l'on veut recréer les conditions de sa genèse historique, doit apparaître comme un outil indispensable à la résolution d'un problème. On ne peut cependant pas faire de cette condition nécessaire une condition suffisante et affirmer que la seule situation et le contenu du problème peuvent conduire nécessairement à la démonstration en s'appuyant sur les données historiques. Celles-ci n'excluent nullement un apport externe qui, dans la genèse didactique, peut provenir, comme nous l'indiquons plus haut, d'une information apportée par le maître en abandonnant en partie la dévolution du problème ou, peut-être, bien que cette voie semble actuellement peut explorer d'une approche interdisciplinaire de la rigueur. » (Arsac, 1987, page 309)

Il s'intéresse avec Viviane Durand-Guerrier, dont il dirige la thèse en 1996, (Durand-Guerrier, 1996) à la rigueur du raisonnement

en analyse en particulier la manière dont les enseignants aident les élèves à éviter les preuves invalides lorsque les règles logiques explicites ne sont pas données. Ils analysent comment les règles de manipulation des variables peuvent servir d'outils didactiques à la place de la logique formelle dans des domaines tels que l'analyse, et montrent pourquoi ces règles de manipulation de variables constituent une spécificité de l'analyse par rapport à la géométrie ou à l'algèbre. (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

Deux ouvrages (Arsac, 1998) et (Arsac, 2013) montrent, s'il en était besoin, les contributions de Gilbert Arsac entrelacées entre mathématiques, histoire, épistémologie et didactique des mathématiques. Le sous-titre du premier « *l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée* » montre l'importance d'une réflexion historique sur l'axiomatique de Hilbert pour analyser finement l'enseignement des concepts mathématiques même au niveau du collège et du lycée. Le second étudie les raisonnements en analyse en s'appuyant sur les mathématiciens du XIX^e siècle qui ont fondé l'analyse moderne, montrant les hésitations, les difficultés à définir précisément la notion de convergence et même les erreurs qui ont contribué, par leur dépassement, à fonder cette partie des mathématiques. Les retombées dans l'enseignement sont nombreuses et l'analyse des erreurs des élèves ou des étudiants sont largement éclairées par ces réflexions historiques.

4. – L'héritage de Gilbert Arsac

Ce travail est le point de départ d'une longue tradition mathématique, épistémologique et didactique autour des problèmes à l'IREM de Lyon. Gilbert Arsac partait du postulat que faire des mathématiques c'est chercher des problèmes. Cette idée fondamentale a

trouvé son application dans la pratique des problèmes ouverts et dans tous les travaux qui ont suivis sur le rôle des problèmes dans l'enseignement. Le livre « *Les pratiques du problème ouvert* » (Arsac et Mante, 2007) montre comment les enseignants et les chercheurs se sont emparés de cette pratique pédagogique pour permettre aux élèves d'apprendre des mathématiques à travers la résolution de problèmes. La référence classique de l'introduction en classe de problèmes de recherche est de mettre l'élève dans une position permettant sous certains aspects la reproduction de la position de chercheur. L'accent est mis alors sur les heuristiques et sur le développement de compétences liées au processus de preuve et à l'argumentation. Cependant, ce n'est pas la seule fonction de la résolution de problème. Celle-ci induit en effet la reconstruction des outils ou la construction de nouveaux par un va-et-vient de l'outil à l'objet, utilisation d'essais, d'expérimentation de divers types, ajustement des résultats et des hypothèses qui peuvent s'en déduire. En effet, si l'aspect hypothétique-déductif est celui qui est donné à voir dans la mathématique achevée, celle qui est organisée et rendue publique, celle qui permet d'avancer rapidement dans l'exposé de la construction formelle des savoirs, la construction de ces savoirs par les chercheurs se fait à travers la résolution de problèmes et l'élaboration progressive de théories, dans lesquelles l'élaboration d'une axiomatique appropriée permet progressivement de diminuer la part des propriétés portées par l'intuition des objets au profit des opérations que les axiomes déclarent licites. Les formes de travail du contexte de découverte tâtonnantes et raisonnées à la fois sont, en fait, celles utilisées en situation de résolution de problème. Toutes les expériences réalisées depuis l'origine de la pratique du problème ouvert montrent clairement les apports en termes d'apprentissage de la démarche scientifique : développement

d'heuristique, élaboration de conjectures, mobilisation d'outils de contrôle et de validation, etc., elles montrent aussi la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe.

Viviane Durand-Guerrier et moi étions partis en 2006 du constat que, malgré ces nombreuses expériences de telles situations de recherche tant au collège qu'au lycée et qu'à l'école élémentaire, et malgré des recommandations institutionnelles, ces pratiques étaient loin d'être généralisées. Nous faisons alors l'hypothèse que parmi les freins à ce développement, les points ci-dessous sont déterminants :

1. La part importante de la dimension expérimentale dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au-delà dans la société, de ce que sont les mathématiques.
2. L'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu, est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme.
3. Les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe.

C'est ainsi que l'équipe de recherche Ex-PrIME (Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école) est née en 2006 dans une collaboration entre l'INRP et l'IREM de Lyon (Exprime, 2010). Cette équipe s'est ensuite enrichie des travaux de thèse de Marie-Line Gardes (2013) et de Mathias Front (2015) et est devenue l'équipe DREAM (Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) regroupant des enseignants de collège, de lycée, des formateurs de l'INSPÉ de Lyon et des chercheurs en didactique des mathématiques. Elle se donne comme but de fonder l'enseignement des mathématiques sur des problèmes de recherche à l'école, au collège et au lycée et s'appuie, dans ses analyses, sur les mathématiques, l'histoire et l'épistémologie et la didactique des mathématiques.

Merci Gilbert de nous avoir initié à la pratique du problème ouvert mais aussi d'avoir nourri nos réflexions et nos façons de penser en maintenant la nécessité de points de vue différents et complémentaires pour mieux approcher la complexité de l'enseignement des mathématiques. Gilbert Arsac était aussi un professeur attentif à ses étudiants, un animateur IREM sensible aux difficultés des enseignants mais s'appuyant toujours sur la rigueur des mathématiques pour faire progresser toutes les personnes qui l'ont côtoyé.

Gilles ALDON

IREM de Lyon
S2HEP ER 4148
Université Claude Bernard Lyon 1.

Références bibliographiques

- Arsac, G. (1971). Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B* 273, A298–A300.
- Arsac, G. (1973). *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire*, Thèse d'état, Université Claude Bernard, Lyon 1.
- Arsac, G. (1975a). Nombres algébriques et nombres transcendants, *Bulletin de l'APMEP*, 301, 647-651.
- Arsac, G. (1975b). Histoire de la découverte des logarithmes, *Bulletin de l'APMEP*, 299, 281-298.
- Arsac, G. (1982a). Le groupe de Poincaré et ses représentations. *Publications du Département de mathématiques (Lyon)*, 3C, 1-171.
- https://www.numdam.org/item/PDML_1982__3C_A1_0/
- Arsac, G., Germain, G., Mante, M., Pichod, D. (1982b). La pratique du problème ouvert, Document de travail colloque inter-IREM Lyon, La place du problème dans l'enseignement », <https://bibnum.publimath.fr/ILY/ILY84001.pdf> (retrieved on June, 9, 2025).
- Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 8(3), 267–312.
- <https://revue-rdm.com/1987/l-origine-de-la-demonstration/>
- Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.
- Arsac, G. Develay, M., Tiberghien, A. (1989). *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, IREM de Lyon.
- Arsac, G., Balacheff, N., Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations, *Éducational Studies in Mathematics*, 23, 5-29.
- Arsac, G., Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCEREN, CRDP Académie de Lyon.
- Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel et la convergence uniforme de la difficulté historique du raisonnement sur les limites*, Hermann.
- Tiberghien, A., Arsac, G., Méheut, M. (1994). *La transposition didactique à l'épreuve. Analyse de projets d'enseignement issus de recherches en didactique*. In Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J.-L., & Tiberghien, A. (Eds). *La transposition didactique à l'épreuve*. Editions La pensée sauvage. p. 105-134.
- Clavel-Marinacce, J. (1997). *Rôle et place de l'appareil de mesure dans l'apprentissage à propos d'un ensemble de concepts en électrocinétique*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1.

- Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1.
- Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 23(3), 295–342.
- <https://revue-rdm.com/2003/methodes-de-raisonnement-et-leurs/>
- Exprime (2010). *Expérimenter des Problèmes innovants en Mathématiques à l'Ecole*. Cérédom, INRP, IREM de Lyon.
- Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en situation didactique de recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. Thèse de doctorat, université Claude Bernard Lyon 1.
- Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Mizony, M. (1987). *Semi-groupes de Lie et fonctions de Jacobi de deuxième espèce*, Thèse d'état, Université Claude Bernard, Lyon 1.
- Lewin, K. (1946). Action Research and Minority Problems, *Resolving social conflicts and field theory in social science.*, American Psychological Association, ISBN 1-55798-415-8, 143–152