UN PROBLÈME, NEUF APPROCHES !

Catherine GUFFLET[1]

Karim ZAYANA[2]

On pourrait considérer, telle une boutade à l'endroit des mathématiques, qu'un problème n'est pas clos tant qu'il admet des solutions nouvelles. Certes, il peut apparaître saugrenu de recenser les démonstrations d'un théorème comme on collectionnerait des images sur un album. Ainsi compte-t-on pas moins de six preuves de l'infinitude des nombres premiers, des plus élémentaires datant d'Euclide aux plus modernes, impressionnantes de concision ou d'inventivité (Aigner & Ziegler,1998). Retenons surtout qu'autant d'approches marquent l'expression d'intelligences différentes qui, au gré d'avancées scientifiques prenant des directions pourtant éparses, produisent un savoir cohérent. Et l'enseignant d'y saisir les chances de toucher, par cette diversité de chemins, la multitude de ses élèves. Dans les faits, de « différencier ».

Cette richesse qu'offrent les mathématiques à la pensée, nous allons ici l'illustrer sur un exemple plus accessible, dont les scénarios de résolution se diffractent au prisme de tous les programmes : école primaire, collège, lycée, supérieur. Il s'agira d'un énoncé de poche, de ces jouets qu'on aurait tôt fait de bouder mais qui regorgent de sens : *prouver que la somme d'un nombre positif strictement et de son inverse égale au moins* 2, autrement dit que, pour tout réel $x>0$,

(1) $$x+\frac{1}{x}\geq 2.$$

Ceci affine une autre propriété, bien connue, disposant que pour tout réel $x>0$,

(2) $$x+\frac{1}{x}\geq 1.$$

Élémentaire quand $x\geq 1$, la minoration (2) résulte de ce que $\frac{1}{x}\geq 1$ quand $0<x<1$. Plus élaborée, l'inégalité (1) ouvre un camaïeu de possibles. La traiter via l'étude de la fonction $f=f(x)=x+1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est efficace et juste. Mais cette procédure requiert un outillage spécifique : dérivation, variations, minimum doivent être familiers aux élèves. Or elle fourmille d'alternatives, certaines plus concrètes, élégantes ou directes ; actionnant d'autres raisonnements, forgeant d'autres images mentales, impliquant d'autres connaissances. En voici quelques-unes. Les démonstrations iront du domaine de l'algèbre au champ de la géométrie, en passant par les statistiques ou bien l'analyse, faisant même un détour par les sciences physiques. Leur complémentarité coiffe ainsi plusieurs chapitres des mathématiques tout en favorisant le dialogue interdisciplinaire. Le professeur soulignera l'apport tantôt culturel, tantôt technique, tantôt esthétique de chacune. Il le modulera selon son public. Aussi, exception faite des deux dernières méthodes, plus orientées vers le lycée ou le post-bac, nous ne flècherons aucune des réponses données ci-après vers un niveau de formation précis, l'initiative en étant laissée à l'enseignant.

[1] catherine.gufflet@ac-versailles.fr

[2] karim.zayana@igesr.gouv.fr

1. – Approche expérimentale

Une première idée consiste à valider la propriété annoncée sur un échantillon de valeurs. Sans se substituer à une preuve, cette démarche heuristique en renforce l'intérêt, engageant l'élève dans un jeu numérique à même d'esquisser un début de stratégie.

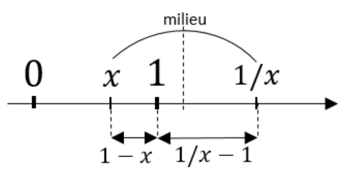
Ainsi l'inégalité est-elle vérifiée quand $x=1$, c'est une égalité ! Quand $x=2$ l'inégalité l'est encore, avec largesse car $x+1/x=2+1/2=2{,}5$. Cet exemple prête à généralisation à tout $x\geq 2$. En effet, $x+1/x>x\geq 2$. Inversement, quand $x=1/2$, $x+1/x=1/2+2$, qui vaut encore 2,5. Cet exemple prête lui aussi à généralisation en cela que $1/(1/x)=x$, symétrie qui répercute à tout $x\leq 1/2$ le résultat établi pour $x\geq 2$ et circonscrirait au besoin l'étude sur l'intervalle ouvert $]1/2;2[$ à l'intervalle $]1/2;1]$. Testons enfin une valeur intermédiaire, mettons $x=2/3$, où $x+1/x=2/3+3/2=13/6>2$. Il n'est pas réaliste d'essayer tous les nombres x allant de ½ à 1.

2. – Approche statistique

L'inégalité voulue revient aussi à

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 1.$$

Cette ré-écriture signifie que la moyenne (ou le milieu) de x et de $1/x$ va au-delà de 1, ce que traduit le schéma ci-dessous avec l'hypothèse (discutée et assumée plus haut) où $x\leq 1$.



Et pour cause,

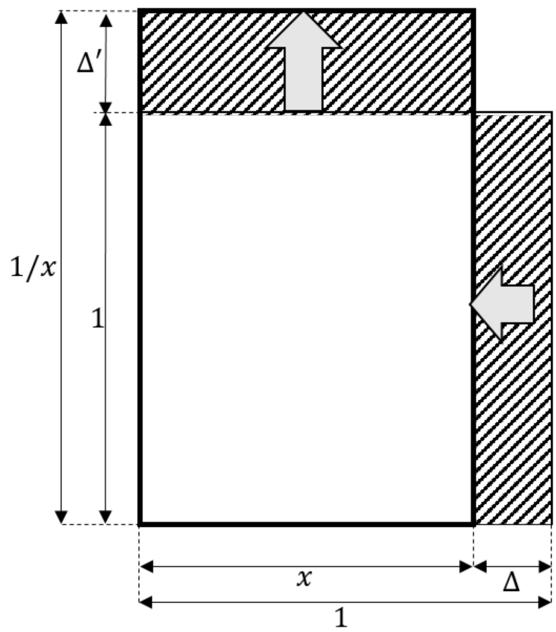
$$\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\geq 1-x.$$

3. – Approche algébrique

Comme $x>0$, l'inégalité recherchée équivaut, après multiplication de ses deux membres par x, à $x^2+1\geq 2x$ soit à $x^2-2x+1\geq 0$, qui procède de l'identité remarquable $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

4. – Approche géométrique

Interprétons géométriquement $x\leq 1$ et son inverse comme la largeur et la hauteur d'un rectangle d'aire unité, issu lui-même de la déformation d'un carré d'aire unité (et donc de côtés 1), ce qu'illustre la figure ci-



dessous. Partons donc du carré, dont on réduit d'abord la largeur de Δ. Il faut alors compenser cette perte de surface en étirant la hauteur. Mais la base ayant été comprimée par l'opération précédente, l'extension verticale Δ' doit excéder Δ. Si bien que le demi-périmètre du rectangle vaut

$$x+1/x=(1-\Delta)+(1+\Delta')=2+\underbrace{(\Delta'-\Delta)}_{\geq 0}\geq 2$$

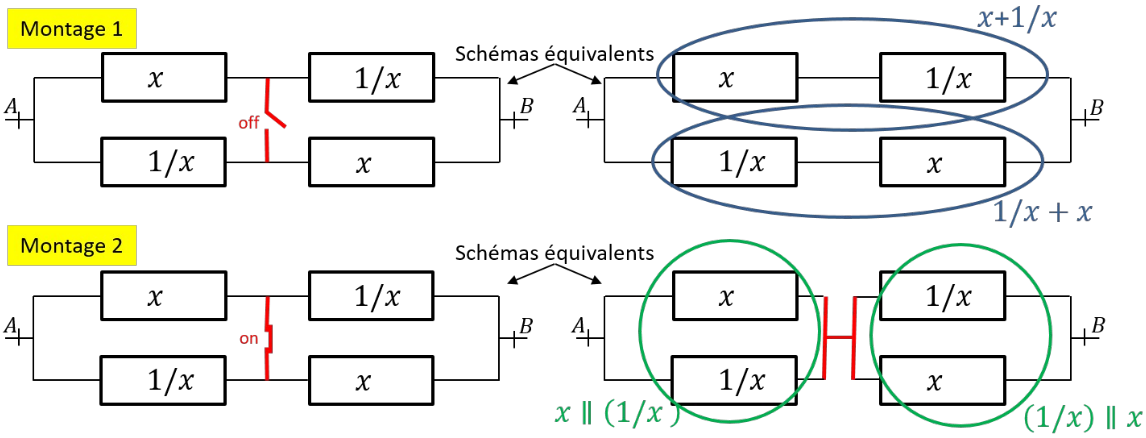
5. – Approche trigonométrique

Dès lors que $x>0$, rien n'empêche de poser $x=\tan\theta$ où $0<\theta<\pi/2$. Par suite,

$$x+\frac{1}{x}=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin(2\theta)}\geq 2.$$

6. – Approche physique

Comparons les deux montages résistifs ci-dessous. Ils se ressemblent mais dans le premier, l'interrupteur situé à mi-chemin est ouvert, tandis que dans le second il est fermé.



On calcule pour commencer les résistances totales R_1 et R_2 de chacun.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la résistance $x+1/x$ est en parallèle de la (même) résistance $1/x+x$. Ainsi, et par application des formules de mises en dériva-

$$R_1=\left(x+\frac{1}{x}\right)/\!/\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

tion des circuits,

Lorsque l'interrupteur est fermé, la résistance $x/\!/(1/x)$ est mise en série avec la (même) résistance $(1/x)/\!/x$. Or, toujours d'après le cours de Physique,

$$x/\!/\frac{1}{x}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}.$$

Donc

$$R_2=\left(x/\!/\frac{1}{x}\right)+\left(x/\!/\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}.$$

Le second câblage permettant au courant une voie supplémentaire à son passage, sa résistance totale R_2 est donc moindre que R_1.

Soit

$$\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leq\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

puis

$$4\leq\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

d'où, les quantités manipulées étant positives,

$$2\leq\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

ce qui a l'avantage de « faire ressentir » le résultat présenté.

7. – Approche récurrente (lycée et post-bac).

Les quantités en jeu étant positives, l'inégalité étudiée revient, après élévation au carré, à

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geq 4$$

qui se développe et se simplifie en

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2.$$

Ainsi,

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2.$$

En remplaçant x par x^2 dans l'équivalence ci-dessus, puis x par x^4, puis x par x^8, etc., puis en connectant ces équivalences à la queue leu-leu, nous obtenons à tout ordre n

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^{\left(2^n\right)}+\frac{1}{x^{\left(2^n\right)}}\geq 2.$$

Dans la mesure où $x>1$, cas auquel on peut se ramener (*cf.* plus haut), $x^{\left(2^n\right)}+\frac{1}{x^{\left(2^n\right)}}\to+\infty$. L'inégalité droite est assurément vérifiée à partir d'un certain rang. Cela rejaillit favorablement sur celle de gauche, qui est donc vraie.

8. – Approche euclidienne (lycée et post-bac).

Le produit scalaire canonique des vecteurs $\left(\sqrt{x};1/\sqrt{x}\right)$ et $\left(1/\sqrt{x};\sqrt{x}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ est inférieur au produit de leurs normes (qui sont ici les mêmes) d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Immédiatement,

$$2\leq x+\frac{1}{x}.$$

On pourrait s'enquérir à l'envie d'autres approches. Mais nous avons déjà là suffisamment de matière pour exprimer, en situation, combien « la différenciation pédagogique consiste à mettre en œuvre un ensemble diversifié de moyens[3] et de procédures[4] d'enseignement et d'apprentissage pour permettre à des élèves d'aptitudes et de besoins différents d'atteindre par des voies différentes des objectifs communs » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2016). Après cette définition toute académique, laissons filtrer l'humanité de Philippe Meirieu qui la formule, à sa façon : « différencier, c'est avoir le souci de la personne sans renoncer à celui de la collectivité […], c'est être en quête d'une médiation toujours plus efficace entre l'élève et le savoir […]. C'est pourquoi, il ne faut pas parler de la « pédagogie différenciée » comme d'un nouveau système pédagogique, mais bien plutôt comme d'une dynamique à insuffler à tout acte pédagogique […], un moment nécessaire dans tout enseignement […], celui où s'insinue la personne dans le système » (Meirieu, 1987 et 2020). Voilà qui invite le professeur à penser toujours son enseignement à des niveaux différents. Il ne s'agit « pas de proposer des solutions faciles ou peu nombreuses aux élèves dits fragiles, ou en difficulté ; et des solutions plus difficiles ou plus nombreuses aux élèves dits forts ou bons » (Petit, 2018). Mais il est bien ici question de partager avec tout son groupe et dans un temps scolaire nécessairement contraint, donc avec pragmatisme, une pluralité d'approches dont on peut espérer que chacun trouvera, chez l'une au moins d'entre elles, une vision éclairante. Et malin celui qui saurait quelle voie s'adresse le mieux à tel ou telle élève tant les raisons qui parlent ou résistent à l'esprit peuvent être mystérieuses.

Catherine GUFFLET
IA-IPR de l'académie de Versailles

Karim ZAYANA
IGéSR
Laboratoire éRCAé/INSPé d'Orléans

[3] Ici, selon les approches, sont convoqués des chapitres de cours distincts.

[4] Ici, selon les approches, sont convoquées des techniques plus ou moins sophistiquées.

Références bibliographiques

Aigner, M. & Ziegler, G. (1998). *Proofs from the book* (*Raisonnements divins* dans sa version française). Springer.

MEN (2016), *La différenciation pédagogique en mathématiques.* https://eduscol.education.fr/document/17197/download

Meirieu, P. (1987 & 2020) *Différencier la pédagogie,* Les cahiers pédagogiques. https://librairie.cahiers-pedagogiques.com/hors-series/869-differencier-sa-pedagogie-des-idees-et-des-pratiques.html

Petit, S. (2018, Septembre), *Différencier en début de cycle 2,* Au fil des Maths, revue de l'APMEP.

Les auteurs remercient vivement le comité éditorial de *Repères-IREM* ainsi que Sylviane Schwer, professeure des universités (Paris-Nord), pour leurs échanges autour de ce texte.