TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MATHÉMATIQUES MODERNES : QUE DISENT LES PROGRAMMES FRANÇAIS ENTRE LES ANNÉES 1950 ET 1970 ?

Marc MOYON[1]
IREM de Limoges

Maria Célia LEME DA SILVA[2]

Ana-Paula JAHN[3]

Résumé. La recherche présentée fait partie d'un projet plus large qui examine les relations entre l'histoire de la géométrie scolaire et le mouvement des mathématiques modernes à travers une étude comparative entre le Brésil et la France. Cet article est une des étapes de ce projet qui vise à analyser la manière dont les transformations géométriques ont été intégrées dans les programmes scolaires français pour les élèves âgés de 11 à 14 ans. Nous nous concentrons sur les normes relatives à l'enseignement secondaire entre les années 1950 et 1970, en mettant l'accent sur l'étude des instructions officielles françaises. Notre étude se focalise sur les classes de quatrième-troisième ; en effet, l'étude des programmes dévoile que les transformations géométriques sont introduites dans ces classes pour la rentrée de septembre 1971. Nous montrons, comment, avec ces programmes et dans un contexte national et international de modernisation, l'enseignement des mathématiques et de la géométrie en particulier est réformé pour se fonder sur une pensée axiomatique plus proche des mathématiques contemporaines. L'article montre enfin la nécessité de poursuivre l'étude de cette période par l'examen des manuels scolaires, permettant de mieux comprendre les choix scientifiques et pédagogiques réalisés par les auteurs et professeurs.

Mots-clés. Histoire de l'éducation mathématique. Géométrie scolaire. Mathématiques Modernes. Enseignement secondaire. Programmes de mathématiques.

[1] XLIM, Université de Limoges, marc.moyon@unilim.fr

[2] UNIFESP, UNESP, celia.leme@unifesp.br

[3] USP, anajahn@ime.usp.br

Introduction

Cet article[4] fait partie d'un projet plus vaste qui tend à explorer les relations entre l'histoire de la géométrie scolaire (c'est-à-dire l'histoire de l'enseignement de la géométrie élémentaire) et le mouvement dit des « mathématiques modernes ». Plus spécifiquement, dans cet article, nous nous proposons d'examiner comment les transformations géométriques (symétries, translations, rotations et isométries en général) ont été intégrées dans les programmes scolaires français pour les élèves de 11 à 14 ans[5]. Nous privilégions ici une histoire institutionnelle centrée sur les programmes de mathématiques disponibles pour la période considérée, à savoir ceux des décennies 1950-1970 (annexe 1). Il ne s'agit donc pas, dans cet article, de décrire dans les moindres de ses détails, la réforme dite des « mathématiques modernes » en France – même si certains éléments généraux nous sont utiles –, ou encore de développer la question spécifique de l'enseignement de la géométrie au prisme de ladite réforme, nous renvoyons pour cela aux nombreuses études menées sur le sujet, et en particulier à la récente synthèse collective de Dirk de Bock (2023) ou encore aux études de Renaud d'Enfert et Hélène Gispert (2011) et de Prost (2013). Pour nous, il s'agit davantage ici de comprendre la manière avec laquelle les transformations géométriques ont progressivement été intégrées dans le curriculum, dans le contexte éducatif français. Cet article se focalise *a priori* uniquement sur les instructions officielles et donc sur les intentions explicites du Ministère (français) de l'Éducation Nationale[6] dans la rénovation de l'enseignement des mathématiques (dans ses contenus comme dans ses méthodes pédagogiques), tout en tentant de décrire au mieux les contextes nationaux et internationaux qui voient émerger le mouvement des mathématiques modernes. Pour comprendre au mieux les ambitions des réformateurs et du Ministère, nous nous sommes aussi intéressés aux publications nationales et internationales des experts et/ou acteurs de l'époque qui permettent d'éclairer notre lecture des programmes[7]. Par la suite, dans une perspective comparative avec le Brésil[8], nous nous intéresserons aux caractéristiques de l'enseignement des principales transformations géométriques et de leurs invariants tel qu'il est promu dans un corpus de manuels scolaires de cette même époque en France et au Brésil, en étroite relation avec la présente étude et celle que nous avons publiée par ailleurs pour le Brésil (Leme da Silva, Jahn & Moyon, 2024). Il faut donc comprendre la présente contribution comme la première étape, nécessaire, pour poursuivre une étude plus vaste.

[4] Nous souhaitons remercier le comité éditorial de *Repères-IREM* qui nous a permis d'améliorer substantiellement notre réflexion et notre article.

[5] Une étude comparable a été menée par nos soins dans le contexte éducatif brésilien (Leme da Silva, Jahn & Moyon, 2024).

[6] Pendant toute la période considérée, le Ministère en charge de l'éducation s'appelle Ministère de l'Éducation Nationale, remplaçant définitivement (depuis 1932) le Ministère de l'Instruction publique.

[7] En particulier, nous avons pleinement profité du fonds patrimonial « histoire de l'éducation » de l'université de Limoges et des archives de l'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Limoges pour prendre connaissance des nombreux documents produits par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) durant la période.

[8] L'étude France-Brésil est importante eu égard à l'influence de la France sur le Brésil tout au long du 19e siècle et aux relations entre la France et le Brésil pendant la période des « mathématiques modernes » : le Brésil a accueilli plusieurs mathématiciens français, notamment du groupe Bourbaki, qui ont pu introduire au Brésil leur conception nouvelle des mathématiques. Citons, en particulier, André Weil, Jean Dieudonné ou encore Alexandre Grothendieck qui étaient au Brésil (São Paulo) respectivement entre 1945 et 1947, 1946 et 1948 et entre 1953 et 1954. L'exemple de l'enseignante française Lucienne Felix dans les années 1960 est aussi très intéressant ; à ce sujet voir l'étude d'Elisabete Búrigo (2016).

Dans une première partie, nous présentons quelques éléments descriptifs du contexte de l'élaboration de la réforme dite « des mathématiques modernes », ce qui nous permettra de mieux comprendre l'émergence de certaines questions scientifiques et pédagogiques. Ensuite, nous nous intéressons à deux évènements majeurs pour la réforme en France : le colloque de Royaumont (1959) d'une part et la publication à Paris de l'ouvrage intitulé *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire* par l'OCDE (1961) d'autre part. Enfin, dans une troisième partie, nous présentons les changements des programmes scolaires français en nous focalisant sur les transformations géométriques. Dans cette dernière partie, nous nous attachons particulièrement aux programmes des classes de 4e et 3e publiés en 1971 car ce sont les premiers programmes qui font apparaître explicitement l'étude des transformations géométriques. C'est un des éléments de la rupture avec les programmes précédents.

1. – Nécessité de réformer l'enseignement des mathématiques, en France comme à l'international

L'idée (très vite devenue une nécessité) de réformer l'enseignement des mathématiques est apparue dans un contexte marqué par la guerre froide, période durant laquelle les nations, principalement les États-Unis et l'Union soviétique, cherchaient à se surpasser dans des domaines scientifiques et technologiques essentiels, notamment dans les domaines de l'aéronautique, de la physique nucléaire et, bien entendu, de l'exploration spatiale. La mise en orbite du satellite soviétique Spoutnik en 1957 a créé un véritable choc dans le monde occidental, en particulier aux États-Unis, où il est apparu urgent d'améliorer la formation scientifique (et donc mathématique) des jeunes générations. L'idée était alors de renforcer la capacité des nations à innover et à rivaliser sur le plan technologique, en modernisant notamment l'enseignement des mathématiques, perçues comme une discipline clé pour l'avancement scientifique. Les mathématiques revêtent alors une importance stratégique et c'est la raison pour laquelle des acteurs du développement économique comme l'OECE (Organisation Européenne de Coopération Économique) puis l'OCDE (Organisation de Coopération et Développement Économique, à partir de 1961), ont souhaité initier et promouvoir une réforme de leur enseignement. Pour ces organisations, « les mathématiques sont devenues […] l'outil privilégié, plus encore : le langage commun, la langue universelle pour l'intelligence du réel, l'intelligence de l'activité humaine et des sociétés comme de la nature. […] La modernisation, non seulement de l'enseignement mathématique secondaire pour les futures élites scientifiques et techniques, mais aussi de l'enseignement mathématique pour tous, est considérée comme une nécessité sociale et économique. » (d'Enfert & Gispert, 2011, pp. 29-30).

La réforme de l'enseignement des mathématiques est par ailleurs influencée, non seulement en France mais aussi plus largement à l'international, par de nombreux mathématiciens comme Bourbaki, célèbre groupe de mathématiciens français qui œuvrait pour une refonte complète de l'enseignement et de la pratique des mathématiques. Leur influence a été particulièrement forte, en raison de leur approche axiomatique et systématique des mathématiques (Carsalade, Goichot & Marmier, 2013, pp. 231-233), concevant la discipline comme un ensemble cohérent et unifié, fondé sur des structures abstraites, et cherchant un degré maximal de généralité. Selon cette vision, les mathématiques ne seraient pas un simple outil ou un ensemble de techniques à appliquer de manière utilitaire, mais une science pure, indépendante de l'expérience et fondée sur des vérités universelles accessibles uniquement par le raisonnement logique. Aussi, dès la fin des années 1940, dans une réflexion fondamentale plus large sur l'unité des mathématiques – « la mathématique ou les mathématiques », (Bourbaki 1948, p. 37) s'exprime sur la notion même d'axiomatique, alors centrale : « l'essentiel de [l'] évolution [interne des mathématiques] a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de 'méthode axiomatique' ». Cette épistémologie de la mathématique et de la « méthode axiomatique », mettant l'accent sur l'importance des structures formelles et des démonstrations rigoureuses, fondée sur des axiomes et des théorèmes généraux, et ayant pour but « l'intelligibilité profonde des mathématiques » (Bourbaki 1948, p. 37) va dominer pour la réforme souhaitée de l'enseignement des mathématiques. L'accent est alors mis sur la logique et les aspects formels en concevant les mathématiques comme un savoir *a priori* (non expérimental) qui produit des vérités absolues par le biais d'un raisonnement déductif (Ausejo, 2010, p. 2). Bourbaki prône l'introduction de concepts abstraits dès les premières étapes de l'enseignement, comme la théorie des ensembles, la logique formelle et les structures algébriques (groupes, anneaux, corps) amenant ainsi une nouvelle axiomatique que de nombreux mathématiciens contribuent à expliquer à partir de leurs propres pratiques ou expériences d'enseignement (Carsalade, Goichot & Marmier, 2013, p. 239). Les réformateurs expriment clairement non seulement la volonté d'enseigner de nouveaux contenus, mais expriment également celle de les enseigner autrement. L'objectif est ainsi d'impliquer les élèves dans des raisonnements déductifs rigoureux, capables de démontrer des vérités universelles. Cette approche est vue comme un moyen de « rationaliser » et de « moderniser » l'enseignement des mathématiques. La réforme a nécessairement eu d'importantes implications sur les méthodes pédagogiques elles-mêmes. En effet, les enseignants sont désormais invités à adopter une approche plus abstraite et théorique des mathématiques, restreignant les pratiques traditionnelles d'apprentissage basée sur les seules manipulations et visualisations. Ce changement a également engendré un écart entre la manière dont les mathématiques sont enseignées et la manière dont elles sont perçues par les élèves, qui ont parfois pu paraître peu préparés à cette abstraction précoce.

En France, la réforme s'inscrit, au moins dans les principes, « dans une triple logique, celle de la promotion d'un enseignement des mathématiques dites modernes, celle de la démocratisation de l'enseignement moyen, celle de la rénovation pédagogique » (d'Enfert & Gispert, 2011, p. 29). Cette période est marquée par la massification de l'enseignement notamment grâce à l'instruction obligatoire jusqu'à 16 ans (réformes Berthoin en 1959 et Fouchet en 1963). La réforme mondiale de l'enseignement des mathématiques dans les années 1960 et 1970 est un tournant majeur dans l'histoire de l'éducation. Elle reflète les préoccupations de l'époque – la guerre froide, la course à la technologie et le « souhait » grandissant et partagé de réformer l'enseignement des mathématiques (des sciences en général), considérant que les mathématiques de l'enseignement secondaire étaient trop distantes des mathématiques au tournant des 19e/20e siècles – tout en promouvant une vision des mathématiques comme une science abstraite, fondée sur des structures logiques et axiomatiques. Bien que cette approche ait permis d'aligner l'enseignement des mathématiques avec les exigences d'une époque technologique, elle introduit aussi de nouveaux défis pédagogiques. L'une des questions soulevées par cette réforme reste la manière d'équilibrer l'abstraction théorique et la dimension pratique des mathématiques, pour rendre l'apprentissage de cette discipline à la fois rigoureux et accessible. La question de l'enseignement de la géométrie, sans doute « le point le plus sensible[9] » est au cœur de cette recherche d'équilibre et de cette nouvelle pédagogie ; comme nous allons le voir, l'utilisation des transformations géométriques dans l'apprentissage de la géométrie devient alors un enjeu. C'est un débat qui anime la communauté à chacun de ses grands rendez-vous.

2. – La Géométrie et les « mathématiques modernes »

Les réformes conduisent à de profondes modifications des programmes d'enseignement des mathématiques. Plusieurs concepts abstraits et théoriques, qui étaient auparavant plutôt réservés aux études universitaires, sont intégrés dans les cursus du secondaire (collège et lycée) comme l'introduction de la théorie des ensembles (à la base de la structure axiomatique des mathématiques) chère à Bourbaki ou encore l'adoption de notations et de symboles modernes. Ce sont bel et bien les structures algébriques et les systèmes axiomatiques qui sont au centre des mathématiques modernes et de leur enseignement : « le modèle axiomatique est un mode de présentation, mais aussi un moyen de découverte » (Carsalade, Goichot & Marmier, 2013, p. 231). Pour les mathématiciens réformateurs, ces notions sont des outils essentiels à une compréhension plus profonde et plus actuelle des mathématiques. Elles sont donc jugées indispensables et sont les fondements du nouvel enseignement des mathématiques.

2.1. - Le Colloque de Royaumont et le projet d'éradication de la géométrie euclidienne

En 1958, l'OECE met en place un Bureau du Personnel Scientifique et Technique (BPST), probablement suite au lancement de Spoutnik. Il a pour objectif de mener des actions internationales afin d'augmenter le nombre et la qualité du personnel scientifique et technique, notamment en tentant d'améliorer les systèmes d'enseignement des pays membres et associés de l'OECE. C'est dans ce contexte que se tient le célèbre Colloque de Royaumont, du 23 novembre au 4 décembre 1959 au Cercle Culturel de Royaumont à Asnières-sur-Oise, en France. Il est organisé par l'OECE et regroupe des conférenciers et des délégués issus de quinze pays de l'OECE, de la Yougoslavie, des États-Unis et du Canada (Furinghetti & Menghini, 2023a, p. 60). Le colloque jette les bases des grandes lignes de la réforme qui allait suivre. Il doit marquer la rénovation en profondeur de l'enseignement des mathématiques, promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (élèves de 11 à 18 ans), tout au moins dans le monde occidental. L'OCDE, ainsi que la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM), jouent un rôle fondamental dans la diffusion et le soutien de la réforme en Europe (Furinghetti, 2008). Même si ce sont les acteurs du monde économique qui organisent le rendez-vous de Royaumont, il ne semble pas que l'idéologie utilitariste d'un développement économique sans contrôle prévaut alors. En effet, « au contraire, – et c'est un mérite essentiel – le Colloque de Royaumont a mis au centre de ses débats les mathématiques dans ce qu'elles ont d'universel. Et c'est bien parce que l'enseignement des années 50 n'avait encore pratiquement rien intégré des découvertes de la fin du 19e et du début du 20e siècle

[9] Nous reprenons ici les termes de Paul Vissio, alors rédacteur en chef du *Bulletin de l'APMEP*, dans sa note accompagnant les « Notes de géométrie » de Jacqueline Lelong-Ferrand en 1970 (*Bulletin de l'APMEP,* 274, p. 215).

qu'une réforme s'imposait. Le Colloque de Royaumont propose alors, indépendamment de toute influence sociologique, économique ou politique, un enseignement des mathématiques qui développe chez les élèves et les étudiants tout à la fois imagination et rigueur » (Calame, 1979, p. 1). Dans le rapport officiel du colloque intitulé *Mathématiques Nouvelles* ou *New thinking in school mathematics* pour sa version anglaise, tous les deux publiés en 1961, son auteur Howard Franklin Fehr (école de pédagogie, université de Columbia), assisté de Luke Bunt (institut de formation des professeurs de l'enseignement secondaire, université d'Utrecht), décrit bien les objectifs de cette rencontre : il s'agit, entre autres, de « préciser (i) les buts de l'enseignement des mathématiques, (ii) les modifications de fond qu'il serait souhaitable d'introduire dans cet enseignement, (iii) les matériels nouveaux et les méthodes d'enseignement rénovées correspondant à ces conceptions, (iv) les mesures à prendre pour parfaire la formation des professeurs dans le sens exigé par la réforme » (OECE, 1961a, p. 12). Lors de ce colloque, le mathématicien français Jean Dieudonné (1906-1992) prend position à propos de la géométrie et de son enseignement avec son célèbre slogan « à bas Euclide ! ». La géométrie traditionnelle, imparfaite, fondée sur les *Éléments* d'Euclide[10], doit progressivement être reléguée au second plan au profit de géométries plus modernes et abstraites, telles que des géométries basées sur de nouvelles axiomatiques (ou axiomatique « modifiée ») à partir d'aspects liés, par exemple, à l'algèbre linéaire, aux vecteurs ou encore aux groupes de transformations[11]. Il s'agit alors de substituer une approche algébrique à la géométrie déductive traditionnelle (OECE, 1961a, pp. 35-47), dite euclidienne. Cette nouvelle axiomatique amène aussi une économie de pensée : « elle permet, par exemple, d'embrasser dans un même point de vue – celui de la structure d'un groupe – les nombres réels avec l'addition, les entiers modulo un nombre premier avec la multiplication, le mouvement dans l'espace euclidien avec la composition » (Marmier, 2014, p. 141). Les constructions géométriques manuelles et visuelles doivent céder la place à une approche plus abstraite, souvent centrée sur des espaces de dimension supérieure. Dieudonné (OECE, 1961a, p. 35), même s'il a une profonde admiration pour « les résultats obtenus par les Grecs en mathématiques », regrette que l'enseignement de la géométrie ne profite pas des avancées scientifiques réalisées notamment depuis le milieu du 19e siècle. Ce sentiment est partagé par Gustave Choquet (1915-2006), autre mathématicien réformateur : « il est étonnant de constater à quel point les recherches théoriques des derniers siècles ont eu peu d'influence sur l'enseignement de la géométrie élémentaire » (Choquet, 1965, p. 75). Ainsi, Dieudonné préconise de substituer à l'étude de la géométrie, celle des espaces vectoriels à 2 et 3 dimensions. Une des résolutions prises à l'issue du Colloque de Royaumont est ainsi formulée : « l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre donné dans les écoles doit être adapté de toute urgence aux progrès foudroyants des mathématiques modernes » (OECE, 1961a, p. 128). Trois conséquences sont alors énon-

[10] Le géométrie euclidienne, apparue dans l'Antiquité grecque avec les *Éléments* d'Euclide, est probablement l'un des premiers représentants du modèle axiomatique. Très vite, le modèle est questionné et montre des imperfections, notamment autour du « postulat des parallèles », ou encore autour de l'opération de *superposition* qui suppose le mouvement (Bkouche, 2013, p. 209). Par ailleurs, la géométrie euclidienne n'est pas unificatrice des mathématiques, de « la mathématique » comme le souhaitent les réformateurs.

[11] Ce sentiment est partagé par de nombreux réformateurs à l'étranger. C'est, par exemple, le cas avec le professeur de géométrie projective à l'Universidad Complutense de Madrid, Pedro Abellanas, « architecte » de la réforme des mathématiques modernes en Espagne (Ausejo, 2010, p. 5) ou encore en Italie avec la conférence de Bologne (Furinghetti & Menghini, 2023b).

cées. D'abord, « cette adaptation exige qu'on élimine de l'enseignement secondaire traditionnel une partie importante (périmée ou sans valeur technique) de la géométrie plane et dans l'espace, de l'algèbre et de la trigonométrie. De plus, il est indispensable que ces matières soient enseignées dans leur enchaînement logique, plus à fond et avec plus de rigueur. [Ensuite,] cette adaptation exige également un enseignement aussi précoce que possible des relations qui unissent la géométrie et l'algèbre – particulièrement l'algèbre linéaire et vectorielle. [Enfin,] l'enseignement de la géométrie déductive dans les écoles secondaires doit être basé sur une expérience préalable satisfaisante de la géométrie intuitive ou physique » (OECE, 1961a, pp. 128-129). Le point de vue de Dieudonné, pour lequel il ne faudrait pas « masquer ou atténuer le plus longtemps possible le caractère abstrait des mathématiques » (Dieudonné, 1965, p. 47) est donc entendu même s'il existe de réels affrontements entre experts sur la position à tenir et le choix éventuel de l'axiomatique à privilégier, faisant intervenir ou non des isométries (Choquet, 1965). Ainsi, en termes de programme d'enseignement, sont introduites les théories des ensembles, du symbolisme moderne, des structures algébriques et des systèmes axiomatiques, qui provoquent l'éradication de la géométrie euclidienne, si importante dans les programmes de quatrième-troisième des années 1950-1960. En effet, ceux-ci faisaient notamment apparaître l'étude des droites remarquables du triangles, des cas d'égalités des triangles – qui disparaissent dans les programmes de la réforme des mathématiques modernes (Bkouche, 2000) – ou encore des relations métriques dans le triangle rectangle, comme depuis au moins les programmes de 1945 (programmes du 27 juin 1945 modifiés par l'arrêté du 18 avril 1947, pour la classe de 4e, programmes de 1947 pour la classe de 3e).

Mais, en réalité, Dieudonné n'est pas le seul à proposer une nouvelle axiomatique pour enseigner la géométrie (Buisson, 1971 ; Bkouche, 2000, p. 614), il n'y pas moins de cinq propositions qui posent toutes la même appréciation sur la géométrie euclidienne traditionnellement enseignée : elle est trop difficile (Furinghetti & Mengini, 2023a, p. 63). Signalons enfin une dernière approche de la géométrie présentée au Colloque de Royaumont par le professeur allemand Otto Botsch (1905-1990), directeur du Helmholtz-Gymnasium Heidelberg et conférencier invité. Même si elle se retrouve en position minoritaire par rapport à celle de Dieudonné[12], elle est particulièrement intéressante dans le cadre de cette étude. En effet, s'inspirant de l'école allemande, cette approche est précisément basée sur la notion de transformations géométriques (Schubring, 2020, pp. 250-251 ; Guitart, 2020, pp. 262-263 ; Furinghetti & Mengini, 2023a, p. 63-64). Elle s'inspire de la « méthode des transformations » ou du programme d'Erlangen (1872) de Felix Klein (1849-1925) définissant « les relations entre géométries, théories des groupes et théorie des invariants » (Bkouche, 2013, p. 207). Précisément, pour chaque géométrie, il existe un groupe de transformations qui laisse invariant un ensemble particulier de propriétés géométriques, comme les distances, les angles, ou les relations de parallélisme. Pour la géométrie euclidienne, le groupe de transformations est le groupe des isométries de l'espace euclidien, c'est-à-dire les transformations qui préservent les distances (translations, rotations, réflexions). Ainsi, le programme de Botsch prône l'étude de la géométrie physique, en introduisant des idées intuitives de cisaillement, d'étirement et de rotation, à l'aide de modèles physiques (avec une approche dynamique). Par la suite, le pliage de papier, les miroirs et les dessins offrent les premières idées de transformation. Ensuite,

[12] Schubring (2020, p. 250) intitule son paragraphe « *Two Competitive Geometry Programmes* ».

une étude semi-formelle, par construction géométrique de réflexions, rotations et translations, permet d'aborder la préservation des propriétés métriques sous de telles transformations (OECE, 1961a, pp. 80-86). Mais, la discussion soulevée par ce programme montre une hésitation des participants, en raison du rôle mineur laissé aux notions vectorielles et aux méthodes algébriques (Calame, 1979, p. 15).

2.2. - Le programme de l'OCDE (Organisation de coopération et de développement économiques)

Peu après le Colloque de Royaumont, 1'O.E.C.E. tente de mettre les résolutions précédentes à exécution. Pour cela, l'organisation réunit un groupe d'experts ayant pour mission d'élaborer les éléments d'un programme moderne d'enseignement des mathématiques dans les établissements secondaires. Cette réunion a lieu en Yougoslavie, du 21 août au 19 septembre 1960. Les résultats, présentés comme des propositions concrètes, sont publiés à Paris en mai 1961 dans l'ouvrage intitulé : *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*[13]. Ce programme insiste sur l'unité fondamentale des mathématiques, « une des caractéristiques de l'évolution des mathématiques au vingtième siècle » (OECE, 1961b, p. 8). Les experts réunis précisent ne pas pouvoir traiter de tous les sujets et décident de leurs priorités : l'algèbre, la géométrie et les statistiques. Ce document a servi de bases aux réflexions sur la constitution de nombreux programmes d'enseignement en France et à l'étranger[14].

« Le programme proposé pour [le premier] cycle [11 à 15 ans] marque un abandon de la marche traditionnelle en géométrie pour une présentation qui reflète les tendances modernes dans la manière de traiter le sujet » (OECE, 1961b, p. 74). Le but du cours de géométrie pour le cycle d'enseignement qui nous intéresse est défini en quatre points essentiels : « 1) établir, intuitivement, certains résultats géométriques sur les bases de l'expérience physique et l'observation ; 2) employer de manière déductive les résultats ainsi obtenus à la justification d'autres résultats, et rechercher les propriétés invariantes dessous des transformations physiques et algébriques ; 3) intégrer des méthodes variées (algébriques et de synthèse) à la résolution d'un problème de géométrie ; 4) développer […] de courts enchaînements déductifs amenant à des propriétés fondamentales que, dans les débuts du cours, l'élève a admis comme vraies parce qu'il ne pouvait se servir des méthodes de démonstration au moment où les propriétés ont été introduites » (OECE, 1961b, pp. 76-77). Les transformations géométriques intègrent alors pour la première fois les programmes d'enseignement. Elles sont largement présentes dans la proposition de programme avec la symétrie (et l'étude spécifique du triangle isocèle), et les « transformations étudiées d'un point de vue physique et intuitif pour la recherche de propriétés des figures » (OECE, 1961b, p. 77), l'étude des isométries et des invariances. « La notion de transformation peut être introduite plus tôt, vers 12 ans », précisent enfin les experts (OECE, 1961b, p. 95). Les « groupes de transformations » font, quant à eux, formellement partie des sujets d'étude du second cycle (15 à 18 ans).

[13] Cet ouvrage sera traduit en plusieurs langues, et notamment en portugais qui lui assure une circulation réelle au Brésil.

[14] Pauli (1979, p. 9) précise que, si ce programme de l'OECE a servi de base à de nombreuses réformes éducatives, cela n'a pas été le cas pour la partie géométrique, notamment à cause de la position extrême de Dieudonné à Royaumont.

3. – Les transformations géométriques dans les programmes français

Bien qu'il y ait eu quelques initiatives isolées avant[15], ce n'est qu'au tournant des années 1966-1967 que, notamment sous la pression de l'APMEP[16] (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), le Ministère de l'Éducation Nationale décide de créer une commission ministérielle chargée de moderniser l'enseignement des mathématiques[17], sous la présidence du professeur André Lichnérowicz. Cette commission élabore un plan qui vise à réformer progressivement les programmes de mathématiques, à la fois pour le premier cycle (collège) et le second cycle (lycée), tout en mettant en place une formation continue pour les enseignants de ces niveaux, notamment avec la création des IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). « Cette 'commission Lichnérowicz' mena son affaire à l'arraché malgré toutes les oppositions : pré-rapport à la mi 67, programmes de sixième, cinquième et seconde en juillet 1968, de première en mars 70, de terminale en mai 1971, de quatrième et troisième en juillet 71 » (Legrand, 2017, p. 56).

La France étant un état fort centralisé, toutes les orientations politiques d'éducation sont décidées et mises en œuvre par le seul Ministère de l'Éducation Nationale. Aussi, si l'on souhaite s'inscrire dans une histoire institutionnelle, pour l'objectif que nous nous sommes fixés, il suffit d'étudier les différents programmes publiés au cours des décennies 1950, 1960 et 1970 (annexe 1). Pour les années 1950-1960 qui nous intéressent, correspondent deux programmes (1958 et 1964). Dans ces programmes, concernant l'enseignement de la géométrie, c'est la géométrie euclidienne qui prévaut avec sa rigueur et sa pureté : aussi, aucune transformation géométrique n'est mentionnée. Ensuite, un premier programme est publié en 1970 pour la classe de sixième alors même qu'un nouveau programme de 5^{e} est en expérimentation dans les classes depuis 1968 (Prost, 2013). Les programmes de 4^{e} et 3^{e} (13-15 ans) tardent et posent des problèmes délicats ; en effet, comme le précisent d'Enfert et Gispert (2011, pp. 34-35), « les programmes de quatrième et de troisième, notamment au niveau de la géométrie, marquent la première rupture forte, du point de vue mathématique, avec les mathématiques traditionnelles qui avaient prévalu jusqu'alors ». Ces programmes sont très mal reçus par le monde enseignant, alors composé par une grande partie de non-titulaires[18]. C'est précisément la réforme du programme de géométrie qui pose problème (d'Enfert & Gispert, 2011, p. 34). La géométrie est détachée de la notion de dessins et de constructions pour s'appuyer sur une structure essentiellement axiomatique ; l'enseignement de la géométrie ne doit pas être envisagé pour lui-même, mais en étroite liaison avec l'arithmétique, l'algèbre, voire l'analyse, ce que la géométrie euclidienne traditionnelle ne permet pas. On pourrait ainsi illustrer notre propos en préci-

[15] Pour l'enseignement primaire, on peut penser aux expérimentations de Nicole Picard menées au moins depuis 1965, analysées et publiées avec le concours de l'APMEP, ou bien encore celles de Guy Brousseau dans la région bordelaise.

[16] En particulier, l'APMEP présidée par Gilbert Walusinsky créée en 1964 une « grande commission » pour définir les contours d'une éventuelle réforme. Ce projet est présenté et amendé en 1968 par les membres de l'APMEP (Prost, 2013). Voir aussi l'étude de Barbin (2012) sur le rôle spécifique qu'a joué l'APMEP dans la réforme en France.

[17] La réforme est lancée par le ministre Christian Fouchet qui déclare le 3 octobre 1966 que l'enseignement des mathématiques en France pose des difficultés et qu'à la demande de l'APMEP, il met en place une commission (Legrand, 2017, p. 56).

[18] « 40 % de non-titulaires qui peinaient déjà à dominer les programmes tels qu'ils étaient » (Legrand, 2017, p. 57). Voir aussi (Gispert, 2023, p. 95-96).

sant que la géométrie reste concrète, expérimentale en sixième et cinquième avec l'« étude de situations concrètes », l'« étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à des mesures », ou encore des « méthodes de repérage » avec des exemples concrets (B.O., 31/10/1968). Elle devient plus théorique, axiomatique dès la quatrième comme l'explicite clairement l'introduction de la partie « géométrie de la droite » du programme : « À la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique ; <u>c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes)</u>. Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger ; les prémisses devront donc être précisées avec soin. <u>On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans les commentaires ; mais d'autres choix demeurent légitimes</u> » (Arrêté du 22 Juillet 1971, souligné par nos soins, pour les « commentaires », voir annexes 3 et 4). La méthode axiomatique, si chère aux réformateurs, doit permettre de mathématiser une situation concrète. Il est aussi important de relever à ce stade que ni le programme de quatrième, ni celui de troisième n'imposent une unique axiomatique[19] ; le choix de l'axiomatique est laissé aux professeurs de mathématiques et bien sûr aux auteurs de manuels[20] convaincus comme André Revuz ou encore Lucienne Félix (Marmier, 2014, p. 141).

Parmi les caractéristiques universelles (c'est-à-dire *a priori* indépendantes des frontières nationales) de la réforme des mathématiques modernes, De Bock (2023, p. 2, notre traduction) cite : « le remplacement de la géométrie euclidienne synthétique traditionnelle par une approche algébrique, affine ou vectorielle (ou des combinaisons de celles-ci), avec un accent particulier sur les transformations géométriques en tant qu'objets d'étude à part entière et en tant qu'outils de démonstration ». Jusqu'en 1971 et les nouveaux programmes, les transformations géométriques n'étaient pas enseignées dans les premières années de l'enseignement secondaire. Comme nous l'avons déjà mentionné, elles n'apparaissent dans aucun programme scolaire du collège (de la 6e à la 3e) consultés pour les décennies 1950-1960 (annexe 1). En fait, avant 1971, les programmes de mathématiques sont très stables et seules des modifications marginales sont apportées. On peut, par exemple, s'en rendre compte en comparant les deux programmes de quatrième précédant ceux de 1971, à savoir ceux du 31 juillet 1958 et ceux du 26 octobre 1964 : seul un huitième paragraphe est ajouté en 1964 par rapport à 1958, dans la section « géométrie plane » à propos de la division du cercle et des polygones réguliers convexes. Pour la classe de troisième, il en est de même si l'on compare les programmes du 31 juillet 1958 à ceux du 9 avril 1960 ou encore du 23 juin 1962. Examinons maintenant les programmes qui imposent en France la réforme « des mathématiques modernes », d'abord ceux de 1971 (repris en 1973), puis ceux de 1978 avant d'achever notre propos sur les programmes de la « contre-réforme », ceux de 1984.

[19] Cette liberté dans le choix de l'axiomatique est explicitement demandée par les expérimentateurs des programmes de quatrième, réunis en stage à Orléans en juin 1970 (Belouze, 1970).

[20] C'est la raison pour laquelle cette première enquête dans les instructions officielles sera poursuivie par l'étude de manuels scolaires, pour les classes de quatrième et troisième, édités en France au moment de la réforme des mathématiques modernes.

3.1. - Les programmes de 1971/1973 en quatrième et troisième

En quatrième, les transformations géométriques apparaissent très peu. C'est principalement en troisième qu'elles sont enseignées.

Pour la quatrième, seule la symétrie centrale et la translation sont explicitement mentionnées dans la section « géométrie plane ». Dans la rubrique « triangle », la symétrie centrale est associée à l'image d'une droite. Dans la rubrique « équipollence de bipoints », les translations sont associées à la notion de vecteur, et leur composition à l'addition de vecteurs. Des propositions d'expérimentateurs (notamment de Poitiers et Limoges) sont alors énoncées pour baser l'étude de la géométrie à partir de quelques « axiomes des translations » (Belouze, 1971, annexe 2, pp. 110-114). Dans les programmes de 1973, les isométries particulières que sont les translations, les symétries centrales et orthogonales font partie des acquisitions nécessaires, ainsi que « le cercle et ses symétries » (B.O.E.N. 8, 22/02/1973).

Pour la troisième, trois paragraphes entiers de la section « géométrie plane euclidienne » sont consacrés aux transformations du plan (annexe 5) : les isométries (translations, symétries centrales et orthogonales) avec l'étude du groupe des isométries en général, puis, en particulier, les symétries d'un cercle avec la définition de l'écart angulaire et des notions de trigonométrie, et les « isométries laissant globalement invariante la réunion de deux demi-droites de même origine ».

3.2. - Les programmes de 1978 en quatrième et troisième

Les programmes publiés par l'arrêté du 16 novembre 1978 (B.O.E.N. spécial n°1, 14/12/1978) voient disparaître (définitivement) la notion d'axiomatique qui a posé tant de difficulté aux professeurs de mathématiques. Et même, citant les propos de l'Académie des sciences, les instructions accompagnant le programme précisent : « il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie » (B.O.E.N. spécial n°1, 14/12/1978).

Les programmes de quatrième pour la rentrée 1979 indiquent les symétries orthogonales par rapport à une droite et centrales respectivement en relation avec le rectangle et le parallélogramme. Les translations, quant à elles, sont au programme avec leur composition toujours en relation avec les vecteurs et l'addition de vecteurs, comme dans les programmes précédents.

Pour la classe de troisième, les mentions explicites aux transformations géométriques se limitent alors aux « symétries laissant globalement invariant un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites » dans le paragraphe « applications » de la section « géométrie ». La notion de groupes n'apparaît pas.

3.3. - Après 1978

Un groupe de travail de l'APMEP repense, dès 1979 et jusqu'en 1984[21], un projet de programme pour l'enseignement des mathématiques dans les collèges. L'enseignement de la géométrie est particulièrement visée. Henri Bareil (ancien président de l'APMEP et

[21] Le 23 novembre 1984, Jean-Pierre Chevènement, Ministre de l'Éducation Nationale, annonce devant le Sénat une réorganisation d'urgence des programmes : « il faut réadapter les contenus d'enseignement et évaluer ce que l'on est en droit d'attendre des élèves à l'issue de la troisième. Des instructions et programmes seront arrêtés pour la rentrée 1985 en lettres, langues et en mathématiques » [https://www.vie-publique.fr/discours/160520-declaration-de-m-jean-pierre-chevenement-ministre-de-leducation-natio, consulté le 14/01/25].

membre actif des groupes de travail ministériels sur la réforme) précise alors, à propos des isométries : « les configurations fondamentales sont étudiées en étroite liaison avec les transformations isométriques échelonnées sur les 4 ans. Et celles-ci ne sont pas du tout conçues comme des transformations structurant le plan ou l'espace, mais, selon les cas, sous la forme : – de l'action sur une figure, – de l'invariance d'une figure sous leur action (axes de symétrie,…) » (Bareil, 1987, p. 12). La géométrie axiomatique intégrant la notion de groupes des isométries est définitivement abandonnée.

Tableau de synthèse : années 1950-1970

<table>
<tr><th></th><th>Avant 1971</th><th>1971
Réforme des
« maths modernes »</th><th>1973</th><th>1978</th></tr>
<tr><td>Sixième
Cinquième</td><td rowspan="4">Géométrie plane euclidienne sans aucune mention des isométries.

- cas d'égalité des triangles en cinquième (arrêté du 26/10/1964)
- triangles semblables, cas de similitude en troisième (arrêté du 26/10/1964)</td><td colspan="3">Disparition des cas d'égalité des triangles et de l'initiation à la démonstration géométrique.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Quatrième</td><td colspan="2">L'enseignement de la géométrie doit reposer sur une axiomatique (laissée au choix de l'enseignant).</td><td>Académie des sciences : « il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie »</td></tr>
<tr><td>- « Triangle » : symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) : image d'une droite
- Parallélogramme (défini par rapport à l'existence d'un centre de symétrie)
- « Équipollence de bipoints » : Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations</td><td>Construction et analyse de dessins utilisant le parallélisme, les translations, la symétrie centrale, les projections.</td><td>- Symétries orthogonales et rectangles
- Symétries centrales et parallélogrammes
- Translations et composition (vecteurs et somme de vecteurs)</td></tr>
<tr><td>Troisième</td><td>- Isométries du plan euclidien (voir annexe 2)</td><td>- Translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale : ce sont des isométries particulières
- Le cercle et ses symétries</td><td>« Applications » : symétries laissant globalement invariant un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites</td></tr>
</table>

Du souci d'intégrer la rigueur dans l'enseignement des mathématiques revendiqué lors du Colloque de Royaumont, nous sommes passés à l'excès vers une exigence axiomatique sans précédent, notamment pour l'enseignement de la géométrie. Dans ce contexte, les transformations géométriques, absentes des *Éléments* d'Euclide, apparaissent au cours des décennies 1950-1970, comme un des éléments nécessaires à intégrer dans le curriculum si l'on veut moderniser l'enseignement des mathématiques[22]. En effet, absentes des programmes de mathématiques au début de notre période d'étude, elles intègrent explicitement les programmes de quatrième et de troisième en 1971 au moment de la publication des premières instructions des « mathématiques modernes » pour les classes de quatrième et troisième. Les transformations permettraient d'une part de faire le lien entre la géométrie et l'algèbre (ce que souhaitent les réformateurs, considérant l'unicité de la mathématique) encore revendiqué dans la révision des programmes de 1973 (voir commentaires en annexe 3) : « ces deux branches des mathématiques [la géométrie et l'algèbre] sont d'ailleurs assez connexes pour qu'on ne puisse pas envisager de les développer indépendamment l'une de l'autre, on pourra même favoriser leur interpénétration » (B.O.E.N. 8, 22/02/1973). Elles permettraient aussi d'intégrer davantage dans le curriculum des mathématiques de recherche (« la science qui se fait » en opposition à « la science déjà faite », comme celle d'Euclide). Elles auraient aussi l'avantage de laisser une bonne place à l'expérimentation (en lien avec les sciences physiques et la technologie) sans négliger l'aspect déductif[23], ce qui pourrait permettre une certaine continuité dans l'enseignement entre la sixième-cinquième et la quatrième-troisième.

Au terme de cette étude, nous nous rendons bien compte des écarts entre les intentions (projet de Royaumont, programmes OCDE) formulées par les réformateurs – mathématiciens pour certains –, les expérimentations réalisées en classe au tournant des années 1960/1970 (notamment grâce à l'action de l'APMEP et de l'INP – Institut National Pédagogique), et les instructions officielles telles qu'elles sont publiées en France au début des années 1970. Ces écarts sont naturellement encore visibles si l'on s'intéresse aux manuels scolaires : comme nous l'avons signalé, une certaine liberté pédagogique est officiellement laissée au professeur de mathématiques dans l'organisation de son enseignement et, en quatrième-troisième, dans le choix de l'axiomatique qu'il souhaite mettre en place avec ses élèves. Là, nous pensons que les transformations géométriques jouent un rôle non négligeable dans le choix des axiomatiques, ce que l'étude des manuels scolaires peut révéler. Par exemple, en 1979, 20 ans après Royaumont, André Calame (auteur suisse de manuels de mathématiques modernes) précise avoir « tous les moyens nécessaires sur le plan théorique pour réaliser un bon enseignement de la géométrie dans l'esprit du Colloque de Royaumont. […] On pourrait mettre l'accent sur la géométrie des transformations (*Abbildungsgeometrie*), en insistant d'abord sur la géométrie métrique avec l'étude des symétries

[22] C'est aussi le cas pour le Maroc (Laabid, 2023) ou encore l'URSS pour laquelle Borovik (2023, p. 320, notre traduction) note qu'« en géométrie, le changement principal était l'introduction des vecteurs et l'utilisation systématique des transformations géométriques ». L'une des premières propositions de réforme de l'enseignement pour l'URSS, en 1959, proposait un développement de la géométrie sur la base de transformations géométriques (Borovik, 2023, p. 324).

[23] On peut penser ici aux travaux de Ferdinand Gonseth, *Les mathématiques et la réalité : essai sur la méthode axiomatique*, éditées pour la première fois en 1936 (Paris, Felix Alcan) et rééditées en 1974. Gonseth y présente la géométrie et l'interpénétration de ses trois aspects : intuitif, expérimental, déductif (Gonseth, 1974).

axiales. Le passage à la géométrie affine se ferait par l'introduction des symétries centrales, des translations et du calcul vectoriel. Là, nous disposons d'une très bonne axiomatique sous-jacente due à Artin et connue depuis longtemps [Artin. *Algèbre géométrique.* Gauthier-Villars, Paris, 1962.]. On peut alors dégager la notion de groupe. Comprenons-nous bien, il ne s'agit pas de fixer comme objectif la connaissance à 15 ans du groupe des isométries, du groupe des dilatations (homothéties et translations), du groupe des similitudes. Mais bien plutôt d'introduire peu à peu un « calcul » sur la composition des transformations où interviennent de façon essentielle les « propriétés » de groupe. La recherche des points invariants, des directions invariables conduit à de vrais problèmes. Dans une telle perspective, il resterait à intégrer au bon moment tout ce qui concerne les mesures (distances, aires, angles, volumes), questions dont on a fort peu parlé à Royaumont » (Calame, 1979, p. 16).

Il paraît donc inévitable d'étudier, dans une perspective comparative, différents manuels scolaires français publiés dans les années 1960-1970 pour affiner notre approche de l'enseignement de la géométrie en général, et des transformations géométriques en particulier. En effet, il semblerait que certains auteurs de manuels (suivant certains expérimentateurs) ont pu devancer la réforme introduisant des rudiments de mathématiques modernes, notamment concernant l'enseignement de la géométrie et pour la « recherche d'une axiomatique commode » (Choquet, 1961). La seule lecture des instructions officielles, quoiqu'indispensable, n'est pas suffisante ; elle doit être complétée par l'étude des manuels scolaires et des choix revendiqués (ou non) de leurs auteurs.

Remerciements

Ce travail fait partie d'un projet plus vaste sur l'« histoire de l'enseignement de la géométrie et du mouvement des mathématiques modernes » (Grant N°2023/04639-8). Il est financé par la Fondation d'appui à la recherche de l'État de São Paulo (FAPESP) et le programme de post-graduation en éducation mathématiques à l'UNESP (Rio Claro).

Marc MOYON
Université de Limoges, INSPE
Institut de recherche XLIM, CNRS UMR 7252,
IREM de Limoges
marc.moyon@unilim.fr

Maria Célia LEME DA SILVA
Universidade Federal de São Paulo,
Universidade Estadual Paulista,
Brésil
celia.leme@unifesp.br

Ana-Paula JAHN
Universidade de São Paulo
Brésil
anajahn@ime.usp.br

Références bibliographiques

AUSEJO, E. (2010). The Introduction of "Modern Mathematics" in Secondary Éducation in Spain (1954–1970). *The International Journal for the History of Mathematics Éducation*, *5*(2), p. 1-14.

BARBIN, É. (2012). The role of the French Association of Mathematics Teachers APMEP in the introduction of modern mathematics in France (1956–1972). In *Proceedings of the ICME-12 Satellite Meeting of HPM (History and Pedagogy of Mathematics) July 16–20* (p. 597-605). Drukkerij Baas.

BAREIL, H. (1987). Attendus et intentions des nouvelles propositions de programmes en France. *Petit x*, 13, p. 7-19.

BELOUZE, B. (1970). À propos du programme de quatrième. *Bulletin de l'APMEP*, 275-276, p. 439-455.

BELOUZE, B. (1971). Chroniques des commissions. *Bulletin de l'APMEP*, 277, p. 103-114.

BJARNADÓTTIR, K. (2020). Royaumont's aftermath in Iceland – Motion geometry, transformations and groups. In É. BARBIN, K. BJARNADÓTTIR, F. FURINGHETTI, A. KARP, G. MOUSSARD, J. PRYTZ & G. SCHUBRING (Éds.), *"Dig where you stand" 6. Proceedings of the sixth International Conference on the History of Mathematics Éducation* (p. 73-86). WTM-Verlag.

BKOUCHE, R. (2000). Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP,* 430, p. 613-629.

BKOUCHE, R. (2013). De la modernité dans l'enseignement des mathématiques. In É. BARBIN & M. MOYON (Éds.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire : entre recherche, enseignement et culture* (p. 205-216). PULIM.

BOURBAKI, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In : F. LE LIONNAIS (ed.) *Les grands courants de la pensée mathématique* (p. 35-47). Cahiers du Sud.

BUISSON, P. (1971). La géométrie en quatrième. *Bulletin de l'APMEP*, 279, p. 336-350.

BÚRIGO, E. Z. (2016). Les mathématiques modernes, une affaire d'enseignants : Lucienne Félix dans le Brésil des années 1960. In P. Kahn & Y. Michel (Éds.), *Formation, transformations des savoirs scolaires : Histoires croisées des disciplines, XIXe-XXe siècles* (p. 157-168). Presses universitaires de Caen.
https://doi.org/10.4000/books.puc.12797

CARSALADE, A., GOICHOT, F. & MARMIER, A.-M. (2013). Architecture d'une réforme : les mathématiques modernes. In É. BARBIN, & M. MOYON (Éds.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire : entre recherche, enseignement et culture* (p. 229-244). PULIM.

CALAME, A. (1979). Vingt ans après Royaumont… *Math École*, 90, p. 1.

CALAME, A. (1979). L'enseignement de la géométrie. *Math École*, 90, p. 11-16.

CHOQUET, G. (1961). *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie, seconde partie*. APMEP.

CHOQUET, G. (1965). Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire. In C. GATTEGNO, J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, & G. CHOQUET (Éds.), *L'enseignement des mathématiques : Nouvelles perspectives* (3e édition, p. 75-129). Delachaux et Niestlé.

DIEUDONNÉ, J. (1965). L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre. In C. GATTEGNO, J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, & G. CHOQUET (Éds.), *L'enseignement des mathématiques : Nouvelles perspectives* (3e édition, p. 47-61). Delachaux et Niestlé.

DE BOCK, D. (2023). *Modern mathematics : An international movement* ? Springer.

D'ENFERT, R. & GISPERT, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités. Le cas des « mathématiques modernes » en France, au tournant des années 1960-1970. *Histoire de l'éducation*, 131(3), p. 27-49.
https://doi.org/10.4000/histoire-education.2357

FURINGHETTI, F. (2008). Mathematics Éducation in the ICMI Perspective. *The International Journal for the History of Mathematics Éducation*, 3(2), p. 47-56.

FURINGHETTI, F. & MENGHINI, M. (2023a). The Royaumont Seminar as a Booster of Communication and Internationalization in the World of Mathematics Éducation. In D. DE BOCK (Éd.), *Modern Mathematics : An International Movement* ? (p. 55-78). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_4

FURINGHETTI, F. & MENGHINI, M. (2023b). Modern Mathematics in Italy : A Difficult Challenge Between Rooted Tradition and Need for Innovation. In D. DE BOCK (Éd.), *Modern Mathematics : An International Movement* ? (p. 147-168). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_8

GIRARD, M. (1968). Observation sur la réforme de l'enseignement de la mathématique. *Bulletin de l'A.M.Q.*, 10(2), p. 43-51.

GIRARD, M. (1969). Observation sur la réforme de l'enseignement de la mathématique. *Bulletin de l'A.M.Q.*, 11(1), p. 5-9.

GISPERT, H. (2023). The Modern Mathematics Movement in France : Reforming to What Ends ? The Contribution of a Cross-Over Approach to Modernity. In D. DE BOCK (Éd.), *Modern Mathematics : An International Movement* ? (p. 81-101). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_5

GONSETH, F. (1974). *Les mathématiques et la réalité : Essai sur la méthode axiomatique*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

GUITART, R. (2020). Metamorphosis of Geometrical Teaching in France (1950-1969). In É. BARBIN, K. BJARNADÓTTIR, F. FURINGHETTI, A. KARP, G. MOUSSARD, J. PRYTZ, & G. SCHUBRING (Éds.), *"Dig where you stand" 6. Proceedings of the sixth International Conference on the History of Mathematics Éducation* (p. 261-274). WTM-Verlag.

LEGRAND, P. (2017). De réforme en réforme : Un demi-siècle de progrès ? *Bulletin de l'APMEP*, 522, p. 55-65.

LAABID, E. (2023). Modern Mathematics : An International Movement, the Experience of Morocco. In D. DE BOCK (Éd.), *Modern Mathematics : An International Movement* ? (p. 471-487). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_23

LEME DA SILVA, C., JAHN, A. P. & MOYON, M. (2024). Geometric Transformations and Modern Mathematics : What do Brazilian Curricular guidelines say between the 1950 s to 1970 s ? *Revista de História da Educação Matemática*, 10, p. 1-22.
https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2024.10.664

MARMIER, A.-M. (2014). On the idea of 'democratisation', 'modern mathematics' and mathematics teaching in France. *Lettera Matematica*, 2(3), p. 139-148.
https://doi.org/10.1007/s40329-014-0061-1

OECE (1961a). *Mathématiques nouvelles*, Paris.

OECE (1961b). *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Paris.

PAULI, L. (1979). Le colloque de Royaumont. *Math École*, 90, p. 2-10.

PROST, A. (2013). La réforme de la pédagogie aura-t-elle lieu ? In *Du changement dans l'école* (Le Seuil, p. 141-165). Le Seuil.
https://shs.cairn.info/du-changement-dans-l-ecole-les-reformes-de-l-education-de-1936-a-nos-jours--9782021105742-page-141

SCHUBRING, G. (2020). The Royaumont Seminar 1959 and Freudenthal's Involvement. In É. BARBIN, K. BJARNADÓTTIR, F. FURINGHETTI, A. KARP, G. MOUSSARD, J. PRYTZ, & G. SCHUBRING (Éds.), *"Dig where you stand" 6. Proceedings of the sixth International Conference on the History of Mathematics Éducation* (p. 239-253). WTM-Verlag.

Annexes

Annexe 1 –Programmes de quatrième et troisième consultés pour les décennies 1950-1970 (jusqu'à la « contre-réforme »)

- *Programmes de 1958* : Arrêté du 31 juillet 1958 relatif aux programmes des mathématiques dans les classes de quatrième et de troisième de l'enseignement du second degré ;
- *Programmes de 1962* : Arrêté du 23 juin 1962 fixant les horaires et programmes de certaines classes de quatrième et troisième d'accueil ;
- *Programmes de 1964* : Arrêté du 26 octobre 1964 ;

- *Programmes de 1971* : B.O.E.N. n°30 du 29 juillet 1971, complété par la circulaire n°73-087 du 19 février 1973, B.O.E.N. n°8 du 22 février 1973 ;
- *Programmes de 1978* : Arrêté du 16 novembre 1978, B.O.E.N. spécial n°1, 14/12/78.
- *Programmes de 1984* : B.O.E.N. n°44 du 12 décembre 1985 (sixième/cinquième), B.O.E.N. spécial n°4, 30/07/1987, B.O.E.N. n°12 du 23 mars 1989.

Annexe 2 –Extrait du programme de la classe de troisième de la Commission Lichnerowicz, publié au B.O. 30 du 29 juillet 1971, et dans le *Bulletin de l'APMEP* 279, mai-juin 1971, p. 260.

1) Isométrie du plan euclidien : ce sont, par définition, les bijections du plan euclidien sur lui-même qui conservent la distance. Exemples : translations, symétries centrales, symétries orthogonales.

   Image d'une droite par une isométrie. Toute isométrie conserve l'orthogonalité et le parallélisme des droites.

   Groupe des isométries. Exemples simples de composée d'isométries. Détermination d'une isométrie par l'image d'un repère orthonormé donné, par l'image d'un triangle donné.

   Toute isométrie conserve le rapport de projection orthogonale de deux axes ; réciproque. Angle géométrique, défini comme classe d'équivalence de couples isométriques de demi-droites de même origine.

2) Symétrie d'un cercle. Arcs isométriques d'un cercle. Repérage d'un point M d'un demi-cercle de diamètre AB par la mesure de l'arc AM (on admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée). Emploi de cette mesure pour définir l'écart angulaire de deux directions orientées ou de deux demi-droites.

   Usage des tables trigonométriques en degrés et en grades ; cosinus, sinus, tangente d'un écart angulaire.

3) Isométries laissant globalement invariante la réunion de deux demi-droites de même origine (bissectrice), la réunion de deux droites.

   Exercices sur le triangle isocèle, le losange, le rectangle, le carré.

Annexe 3 –Annexe au programme de quatrième (B.O.E.N. n°30 du 29 juillet 1971), avec la proposition d'une axiomatique.

On considère un ensemble P dont les éléments sont appelés points et un ensemble non vide H de parties propres de P qui sont supposées être des *droites*. On dit que P est un plan (mathématique) quand les axiomes suivants sont satisfaits :

1) Par deux points distincts passe une droite et une seule.

2) Pour toute droite D et tout point M n'appartenant pas à D, il existe une droite et une seule contenant M et n'ayant pas de point commun avec D (Euclide).

3) Étant donnée une projection non constante p d'un axe A sur un axe A', il existe un nombre réel k (ne dépendant que de A, A' et p) appelé *rapport de projection* tel que pour tout couple de points (M, N) de A on ait :

$$\overline{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})}=k\,\overline{\mathrm{MN}} \text{ (Thalès).}$$

Tous les autres résultats du programme peuvent être déduits de ces axiomes.

Annexe 4 –Annexe au programme de troisième (B.O.E.N. n°30 du 29 juillet 1971), avec la proposition d'une axiomatique.

On considère un plan P (au sens de la géométrie de Quatrième). *L'orthogonalité* entre directions de droites de P est une application ω de l'ensemble des directions de droites de P dans lui-même qui jouit pour toute direction δ des deux propriétés suivantes :

1) Elle ne laisse aucune direction invariante : $\omega(\delta)$ est toujours distinct de δ.

2) L'image de l'image de δ est δ elle-même : $\omega(\omega(\delta))=\delta$.

   Deux droites sont orthogonales (ou perpendiculaires) si leurs directions sont orthogonales.

   Le plan P est un *plan euclidien* si l'orthogonalité jouit de la propriété suivante.

3) Pour tout couple (A, A') d'axes du plan P, le rapport de projection orthogonale de A sur A' est égal à celui de A' sur A.

On peut en déduire – et on peut aussi admettre – que ce rapport est en valeur absolue inférieur ou égal à 1.

Tous les autres résultats du programme peuvent être déduits de ces axiomes.

Annexe 5 –Les « Isométries » dans le programme de troisième du B.O.E.N. n°8 du 22 février 1973 (pp. 632-633).

Le théorème de Pythagore et ses applications immédiates constituent la première partie du programme de géométrie de troisième ; en raison de sa grande importance, il lui est donné un développement parfois bien long, qui risque de minimiser le temps que l'on peut consacrer ensuite à un début de familiarisation avec les isométries.

Une approche des isométries est pourtant intéressante, en particulier à deux titres autres que les mathématiques elles-mêmes :

En se reliant à la technologie, on emprunte au concret un certain nombre d'expériences vécues et on lui apporte, en retour, un vocabulaire plus précis, ainsi que des ouvertures possibles sur diverses extensions à des mécanismes étudiés par la suite ;

En se reliant à la physique, on met un outillage, encore élémentaire certes, à la disposition des physiciens, qui en ont un réel besoin.

La translation, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, sont des bijections du plan euclidien sur lui-même qui « conservent la distance » ; ce résultat précédera la définition générale d'une isométrie (tout contre-exemple étant opportun).

Que le professeur juge possible ou non de prolonger une étude théorique sur ce sujet, il signalera toujours – et il le fera vérifier pour les trois isométries ci-dessus mentionnées – qu'en mathématiques une isométrie dans le plan euclidien correspond dans le domaine physique à la manipulation d'un calque, par retournement aussi bien que par glissement ; cela facilitera l'intelligence de théorèmes importants qui, éventuellement, ne seront pas démontrés.

Les résultats théoriques fondamentaux relatifs aux isométries sont :

- La conservation de l'alignement et de l'orthogonalité ;
- La conservation du rapport de projection orthogonale de deux axes et sa réciproque ; il n'est pas indispensable de démontrer ce résultat, mais il est indispensable de le commenter ;
- Le fait que les symétries orthogonales sont des isométries.

Ils ont pour applications pratiques importantes :

- Les propriétés de symétrie orthogonale des figures usuelles (deux points et médiatrice, deux droites et bissectrices, cercle, carré, rectangle, triangle isocèle) ;

- La trigonométrie (*cf. infra*)

Des exercices sur la caractérisation métrique des parallèles et des parallélogrammes, sur la caractérisation des triangles isométriques (on pourra admettre que, quels que soient trois points A, B, C non alignés et quels que soient trois points A', B', C' tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, alors il existe une isométrie et une seule transformant A en A', B en B', C en C'), peuvent aider la compréhension et faciliter, comme il a été dit, le travail ultérieur du professeur de technologie ou de physique.

Le *groupe des isométries*. On rappelle, conformément au commentaire initial, que la rubrique du programme « groupe des isométries » vise uniquement à utiliser la simple définition des isométries d'un plan euclidien P pour établir que celles-ci forment un groupe pour la composition des applications de P dans P.

Les mots du programme « exemples simples de composées d'isométrie » concernent uniquement les produits de translation (sous-groupe déjà étudié en quatrième) et le produit des symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires ; il n'est nullement question de procéder à la recherche et à l'étude d'autres sous-groupes.

Quant à l'emploi des calculs les plus élémentaires de la géométrie analytique, il se borne au cas où les axes de symétrie précités sont les axes du repères orthonormés ; d'autres exemples peuvent faire l'objet d'exercices en marge du cours, mais sans qu'il y ait lieu d'en dégager des formules à retenir, non plus que des types d'exercices à proposer à ce niveau.

Trigonométrie. – Il est permis, et peut-être inévitable, de reporter tard dans l'année de troisième le chapitre des isométries ; or on a observé ci-dessus que la trigonométrie en est tributaire, du moins dans la présentation prévue par le programme et par le commentaire initial ; […].

À une paire d'axes concourants (ou de demi-droites de même origine), il peut être associé son rapport de projection ; avant donc d'introduire les isométries, une théorie bien construite permet de définir l'angle géométrique, puis l'écart angulaire.