Rapport de Stage

Licence 2 Mathématique et Informatique 2021/2022

Les fantômes contre-attaquent

Lyna SAFAR REMALI

Tuteur de stage : Rémi MOLINIER

Institut Fourier

Université Grenoble Alpes, 100 Rue des Mathématiques, 38610 Gières

Sommaire

Présentation de l'entité d'accueil

L'Institut Fourier est l'un des laboratoires de mathématiques de l'Université Grenoble Alpes.
Ses activités portent principalement sur les mathématiques fondamentales développées autour de huit grands thèmes de recherche : algèbre et géométries, analyse, combinatoire et didactique, géométrie différentielle, physique mathématique, probabilités, théorie des nombres, topologie. Ses recherches s'ouvrent aussi à d'autres disciplines, telles que la biologie, l'informatique et la physique

.

Introduction

En théorie des graphes, le nombre de policiers ou le **cop number** d'un graphe non orienté est le nombre minimum de policiers qui suffit pour assurer une victoire (c'est-à-dire une capture du voleur) dans un certain jeu de course-poursuite sur le graphique.
En remplaçant les policier par des fantômes et le voleur par Pacman on obtient un jeu à deux joueurs qui se joue sur un graphe (ensemble de sommets reliés par des arêtes) simple, (sans arête double ni arête bouclant sur un même sommet), connexe (d'un seul tenant) et fini (avec un nombre fini de sommets), on notera ce graphe **grille**.

Au début de la partie, le premier joueur (appelé joueur F dans l'introduction) place un certain nombre de fantômes sur des sommets du graphe, le second (appelé P dans l'introduction) place Pacman sur un autre sommet. Les joueurs jouent ensuite à tour de rôle. À chaque tour, le joueur F déplace chacun des fantômes sur un sommet voisin ou le laisse à sa place (qu'on notera coup d'un fantôme) . Ensuite, P déplace de même Pacman sur un sommet voisin ou le laisse immobile (qu'on notera coup de Pacman). Le jeu s'arrête si l'un des fantômes se retrouve sur le même sommet que Pacman qui est alors "capturé".

Nous nous intéressons ici à la question suivante :
Question. *Étant donné un graphe, quel est le nombre minimal de fantômes qui assure l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur F ?*

Stratégie sur une grille finie

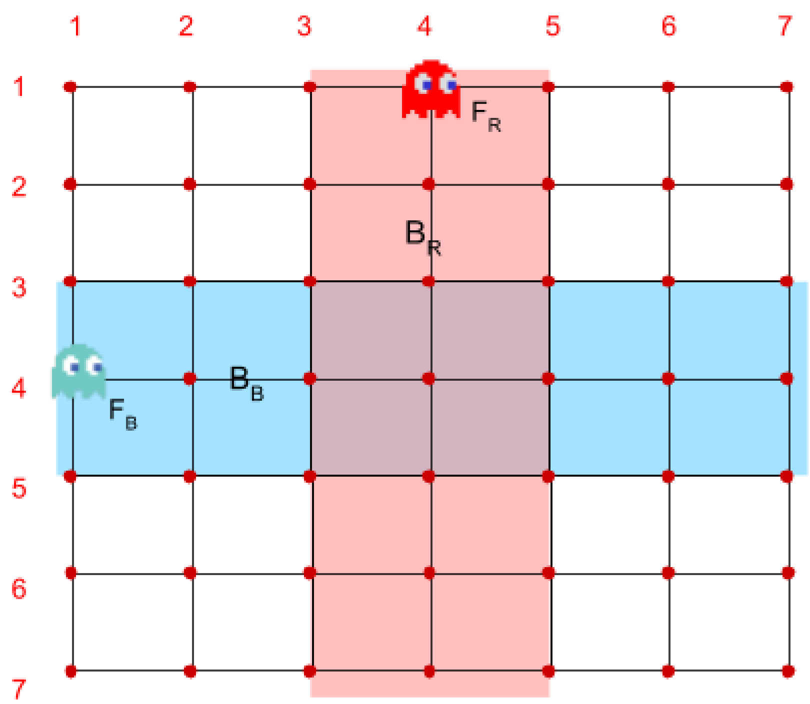
Définitions

Soit une grille Gr de taille lxh : $Gr = \{ (x,y) \in N^2 \mid 1 \leq x \leq l \text{ et } 1 \leq y \leq h \}$

Pour pacman $P (x_P , y_P) \in Gr$

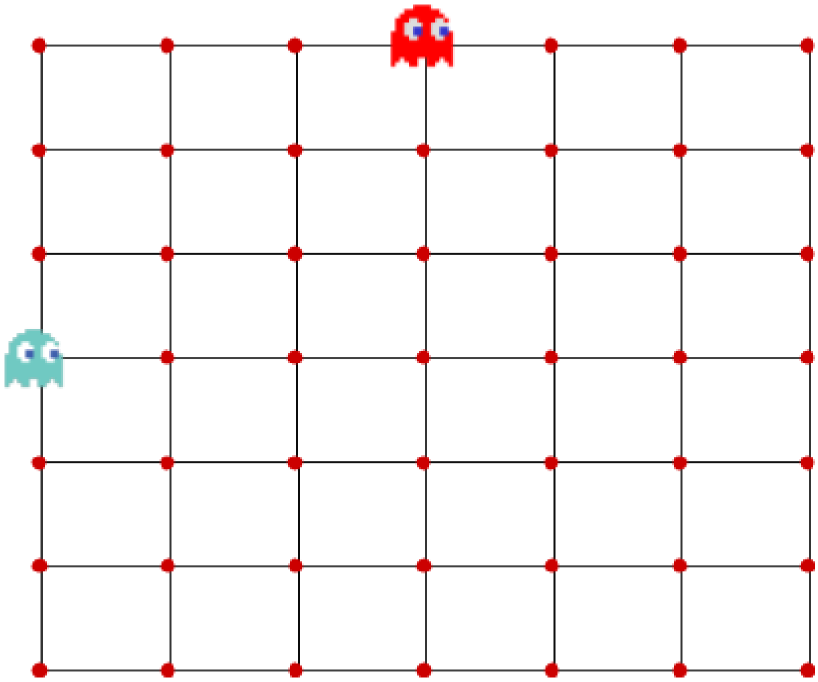
Pour 2 fantôme : $F_R (x_R , y_R) \in Gr$ et $F_B (x_B , y_B) \in Gr$, qui définissent respectivement les bande B_R et B_B :

$B_R = \{ (x,y) \in Gr \mid x_R-1 \leq x \leq x_R+1 \}$ $B_B = \{ (x,y) \in Gr \mid y_B-1 \leq y \leq y_B+1 \}$

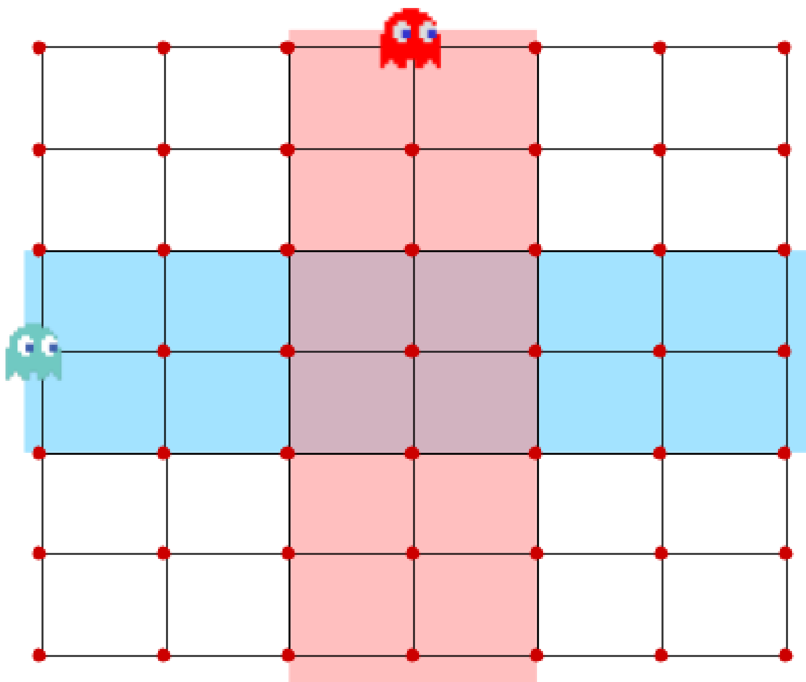


Les stratégies qui seront présentées explicitent la manière de jouer des fantômes en fonction de la position de Pacman.

Soit 2 fantômes, placement de départ :



Les fantômes définissent autour d'eux une bande de taille 3, si Pacman se trouve en dehors de la bande alors on déplace le fantôme pour que Pacman soit dans la bande, sinon on avance le fantôme vers Pacman.



Algorithme

Tant que $F_R \neq P$ et $F_B \neq P$:

Pour le fantôme Rouge :

Si $P \in B_R$ alors :

Si $y_R == y_P$ alors :

Le fantôme va vers PacMan (et le capture)

Sinon :

Si $y_R < y_P$ alors :

$y_R \leftarrow y_R + 1$ #Bas

Sinon :

$y_R \leftarrow y_R - 1$ #Haut

Sinon :

Si $x_R < x_P$ alors :

$x_R \leftarrow x_R + 1$ #Droite

Si $x_R > x_P$ alors :

$x_R \leftarrow x_R - 1$ #Gauche

Pour le fantôme Bleu :

Si $P \in B_B$ alors :

Si $x_B == x_P$ alors :

Le fantôme va vers PacMan (et le capture)

Sinon :

Si $x_B < x_P$ alors :

$x_B \leftarrow x_B + 1$ #Droite

Sinon :

$x_B \leftarrow x_B - 1$ #Gauche

Sinon :

Si $y_B < y_R$ alors :

$y_B \leftarrow y_B + 1$ #Bas

Sinon :

$y_B \leftarrow y_B - 1$ #Haut

Coup de Pacman

Preuve

Notation :

Dans la suite on assimilera une bande horizontale à une bande Bleu $\mathbf{B_B}$, et une bande verticale a une bande rouge $\mathbf{B_R}$.

On appelle *distance* entre deux positions A et B, notée D(A,B), le nombre de coups minimum qui sépare A de B.

On appelle *distance* entre A et un bord/une bande : la plus petite distance entre A et tout points du bord/de la bande.

Définition :

Un tour de jeu commence au moment où c'est à Pacman joue et se termine au prochain moment où c'est à Pacman de rejouer.

Lemme 1 :

Entre le début d'un tour T et le début du tour T+1, la distance entre un fantôme fixé et PacMan ne peut pas augmenter.

Preuve : le coup d'un fantôme diminue forcément la distance entre PacMan et un fantôme F fixé en x ou en y de 1 et comme un coup de pacman ne peut qu'au plus augmenter la distance total de 1, la distance reste constante ou diminue forcement.

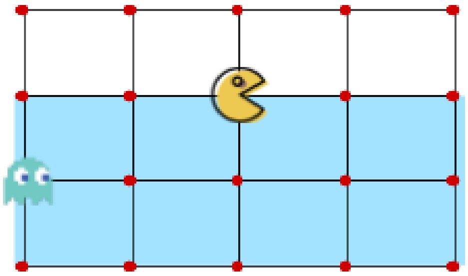
Lemme 2 :

Si au début du tour T Pacman fait parti d'une bande B alors, au début du tour T+1, $P \in B$

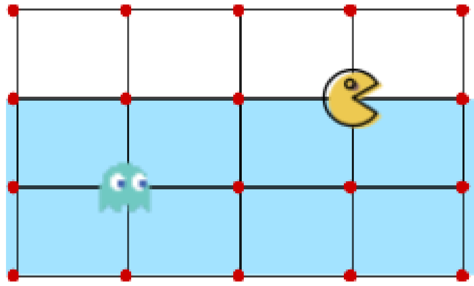
Preuve : On propose ici une preuve pour une bande bleu $\mathbf{B_B}$. On pourra en déduire une preuve pour une bande rouge $\mathbf{B_R}$ par symétrie. Les dessins suivants représentent, à symétrie près, toutes les configurations relatives possibles entre le fantôme bleu et PacMan. A chaque fois on décrit ce qui arrive après un tour de jeu.

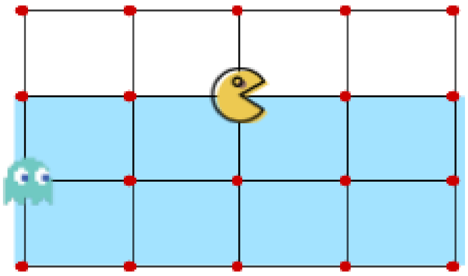
début du Tour T

Début du Tour T+1

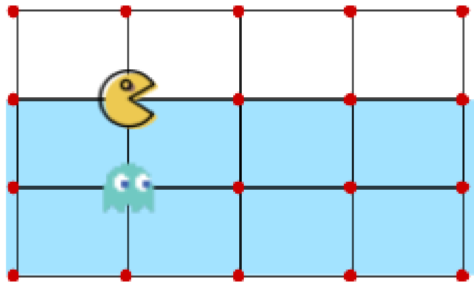


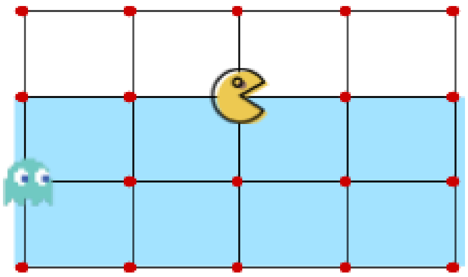
Si Pacman va à droite



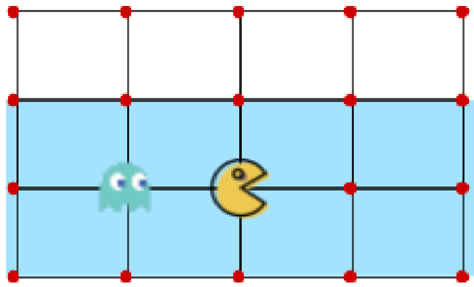


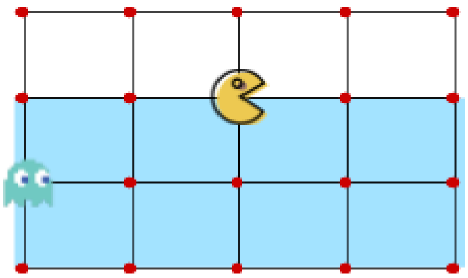
Si Pacman va à gauche



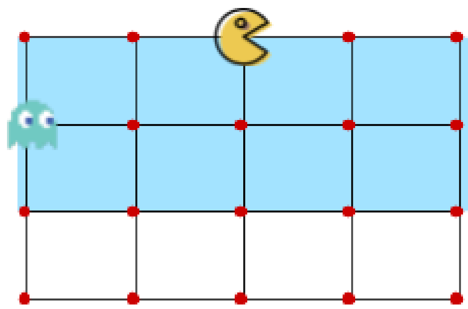


Si Pacman va en Bas





Si Pacman va en haut



Ce qui conclut la preuve .□

Lemme 3 :

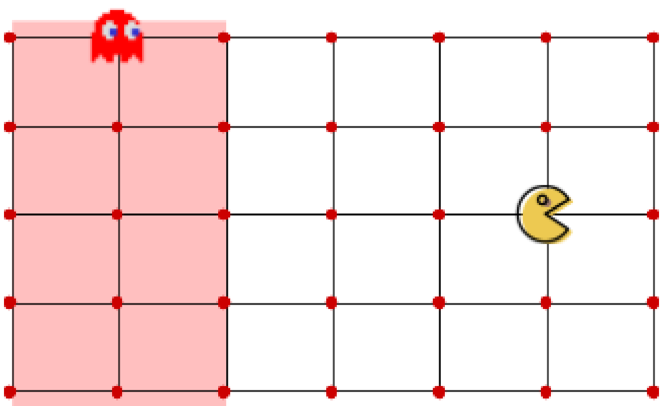
Soit une Grille lxh, et soit un fantôme **F** qui définit une bande **B**, quelque soit la position initiale et les déplacements de Pacman, il existe un tour au début duquel Pacman sera à l'intérieur de la bande **P**$\in$**B**

Preuve : Par symétrie, on regarde le cas de la bande rouge B_R , la preuve marche pareil pour la bande bleu B_B.

Si la position initiale de pacman est dans la bande B il n'y a rien à montrer.
(comme, juste après le placement de PacMan, les fantômes sont les premier à se déplacer le cas où la position initial pacman est à une case près de la bande est le même que le cas ou pacman est dans la bande)

Sinon, on suppose par l'absurde que PacMan ne se retrouvera jamais dans la bande rouge. Comme la bande est de largeur 3, PacMan ne pourra jamais, en un tour, la traverser totalement.
Ainsi PacMan reste forcément tout le temps à droite de la bande ou tout le temps à gauche. Sans perte de généralité, on peut supposer que PacMan est toujours à droite de la bande.

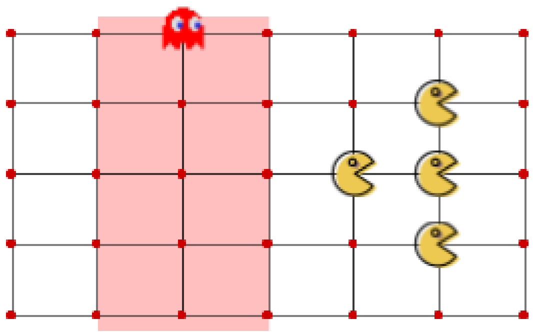
Remarque : qu'importe le mouvement de pacman la distance entre pacman et la bande ne peut que rester stable ou bien diminuer et elle reste stable que si PacMan va à droite. En effet, par exemple si au tour T PacMan et le fantôme rouge sont comme suit,



Tour T

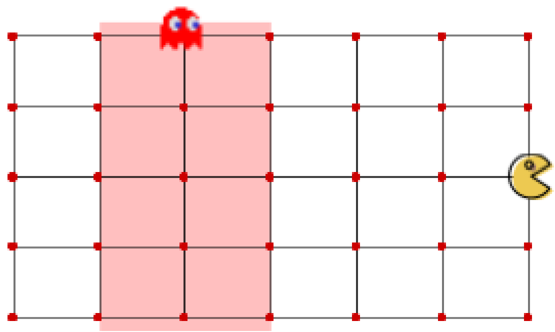
en fonction du coup de Pacman on obtient les cas suivants (les images ci-dessous représentent la position du fantôme en fonction des déplacements éventuels de Pacman).

Haut/ Bas/ Rien/ Gauche



Tour T+1 : l'écart diminue

Droite



Tour T+1 : l'écart reste stable

Comme la grille est finie, PacMan ne peut aller indéfiniment vers la droite. Ainsi, la distance entre PacMan et la bande diminue strictement au moins tous les l tours. Cette distance étant un entier, elle s'annule donc à un moment et PacMan se retrouve dans la bande. Contradiction. □

Remarque : D'après les deux lemmes précédents, il existe un tour au cours duquel, juste après le coup des fantômes, PacMan sera dans les deux bandes à la fois.

Lemme 4 :

Une fois Pacman dans la bande B, il existe un tour où, au début de celui-ci, la distance D(F,P) entre Pacman et le fantôme correspondant est inférieure ou égale à 2, et le reste jusqu'à la fin de la partie.

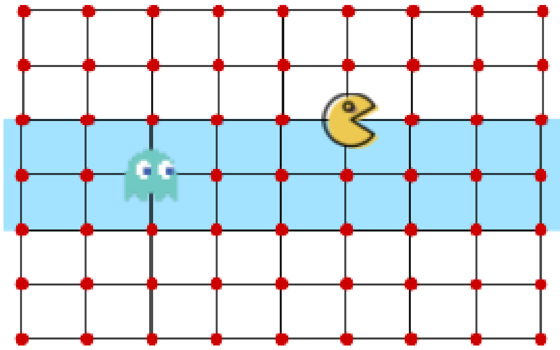
Preuve : Par symétrie, on regarde le cas de la bande bleu B_B , la preuve marche pareil pour la bande rouge B_R.

Par le lemme 3 on sait que Pacman se trouve forcément dans la bande B_B au début d'un tour T. Si D(F,P)<=2, on a rien à montrer. Supposons donc que D(F,P)>2.

En étudiant cas par cas en fonction des positions relatives de Pacman par rapport à la bande décrite par le fantôme, avec D(F,P)>2.

Cas 1.

Pacman est sur l'un des bord de la bande



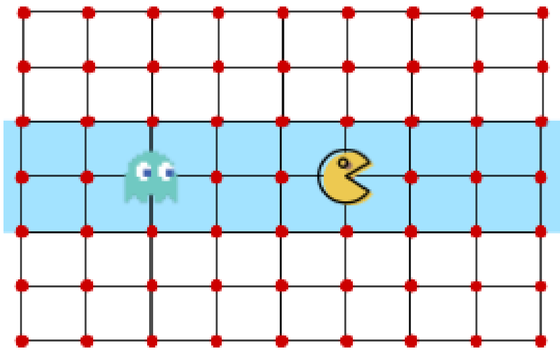
Début du tour T

Si Pacman va en haut ou à droite, la distance entre lui et le fantôme reste stable, autrement elle diminue.

Comme Pacman ne pas aller indéfiniment à droite/ en haut, il existe un tour au début duquel la distance entre Pacman et le fantôme diminue. Le cas où PacMan est sur le bord bas de la bande se traite de la même façon.

Cas 2.

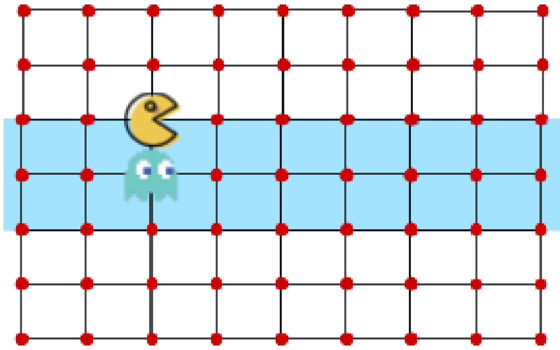
Pacman est dans la bande



Si Pacman va en haut ou en bas, on revient au cas précédent ou un cas symétrique.

Si Pacman va à gauche ou ne fait rien alors la distance diminue, autrement (Pacman va à droite) la distance reste stable. Comme il ne peut pas aller indéfiniment à droite alors, il existe un tour au début duquel la distance entre Pacman et le fantôme diminue.

Remarque : le cas où PacMan est à la vertical du fantôme (comme sur le dessin qui suit) est exclu car il est alors à distance 1 qui est plus petit que 2.



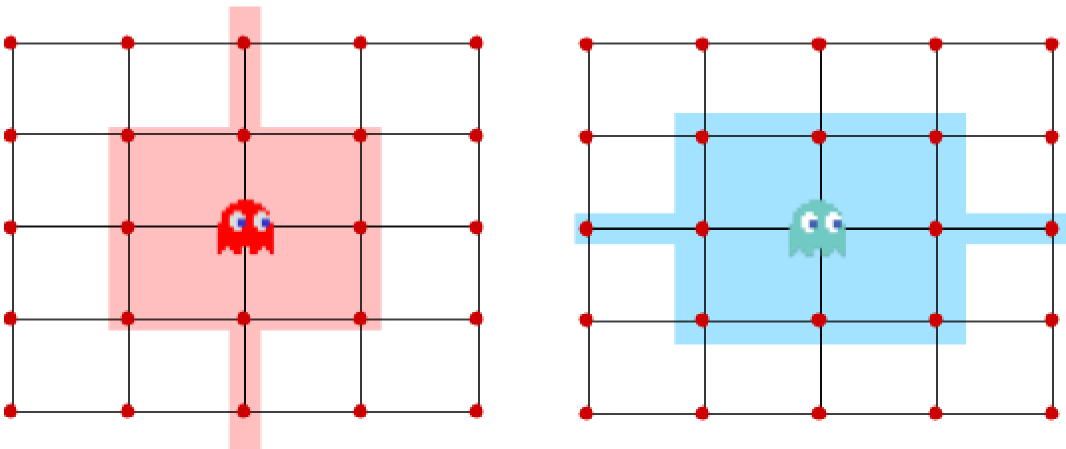
Comme quelque soit les déplacements de Pacman, il existe un tour où la distance diminue, alors il existe un tour au début duquel la distance D(F,P) ≤2 . □

Théorème :

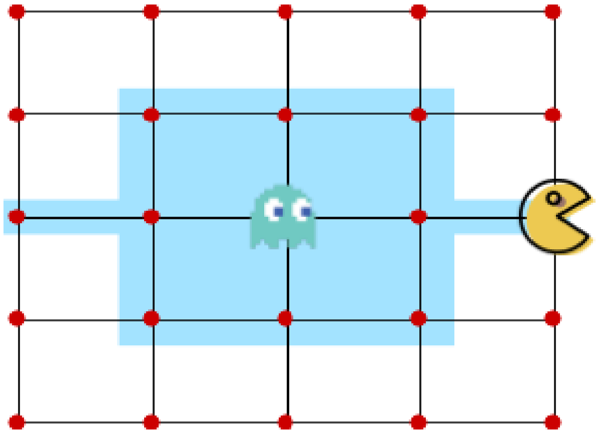
Soit un fantôme F : Il existe forcément un tour au début duquel Pacman se trouve dans le carré 3x3 qui entoure le fantôme F.

Preuve :

Par les lemmes précédents, on sait qu'il existe un tour où Pacman est dans le carré 3x3 traversé par une médiatrice dans le sens de la bande qui entoure un fantôme donné, comme le montre les formes ci-dessous :



En supposant qu'à un tour T Pacman se trouve en dehors du carré 3x3 (soit dans l'une des extrémités de la médiatrice) :

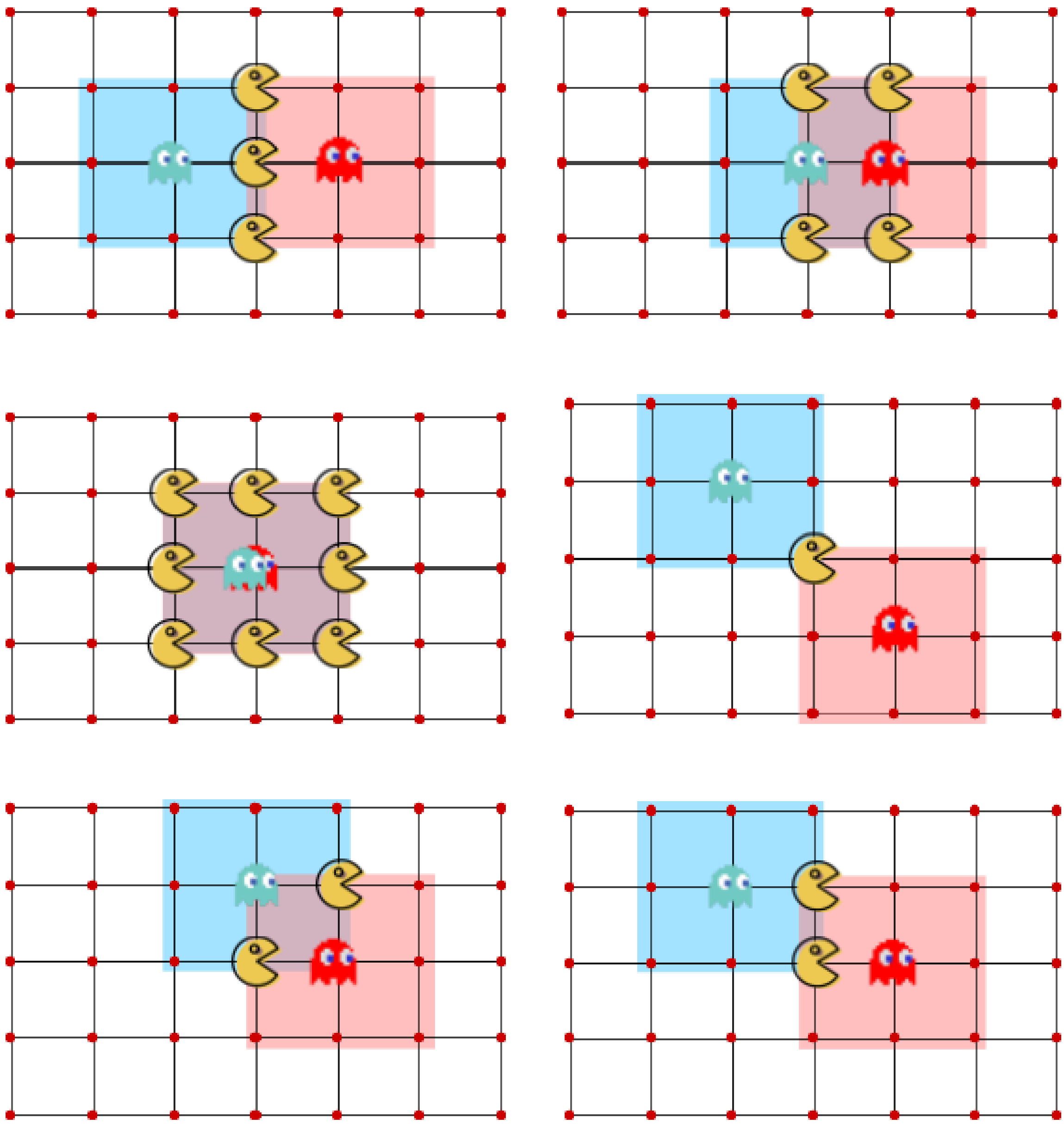


Le cas où Pacman se trouve à l'extrémité gauche de la médiatrice est symétrique et se traite de la même manière.
Dans ce cas, si Pacman va à droite la distance entre lui et le fantôme reste stable, autrement elle diminue et comme la distance ne peut que rester stable ou diminuer alors Pacman ne pourra pas sortir du carré 3x3 qui entoure le Fantôme.
Si Pacman décide de n'aller qu'à droite (de jouer l'unique coup qui lui permet de garder la distance), alors la distance entre pacman et le bord droit diminue et il existe un tour ou Pacman ne peut plus aller à droite, et par l'explication précédente, il se retrouve coincé dans le carré 3x3 .

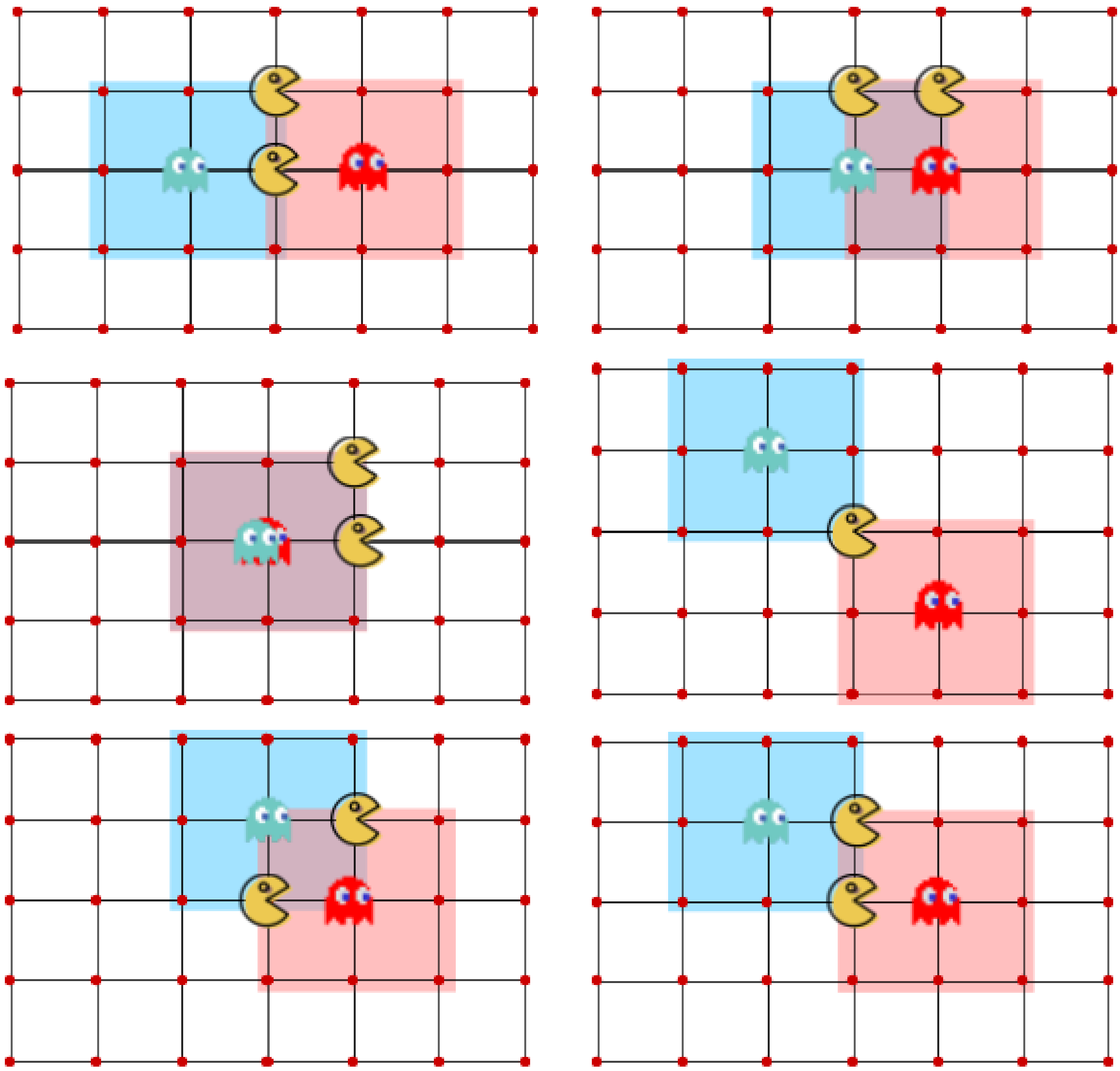
La preuve est faite sur le fantôme bleu mais elle peut se généraliser sur le fantôme rouge par symétrie. □

Conséquence du théorème :
Par le lemme 1 et le théorème précédent, il existe un tour au début duquel Pacman sera au même temps dans le carré 3x3 qui entoure le fantôme rouge F_R et celui qui entoure le fantôme bleu F_B.

Les croisements possibles des carrés et les position possible de Pacman sont à symétrie près :

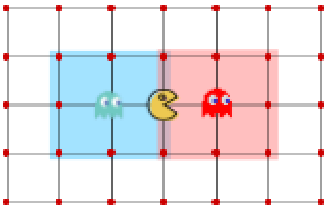
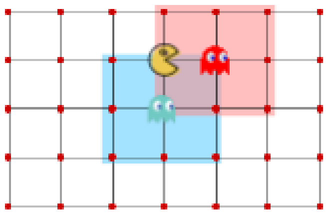
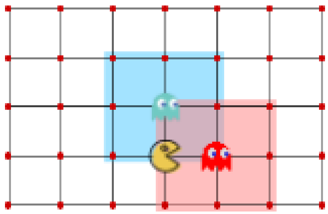
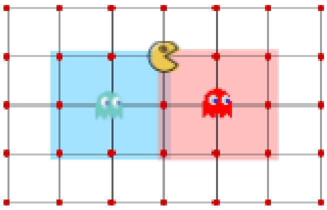
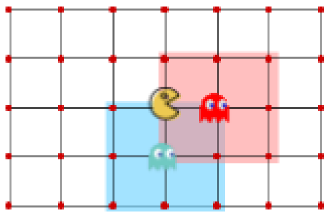
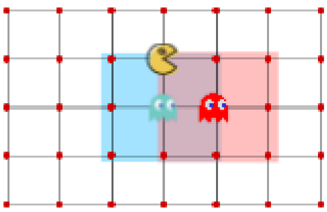
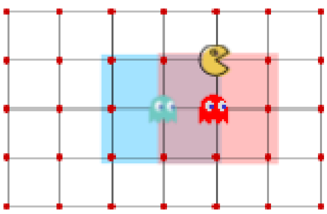
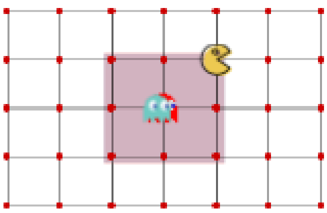
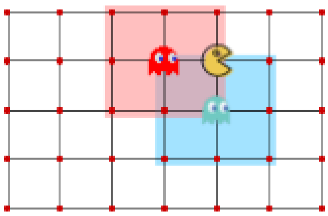


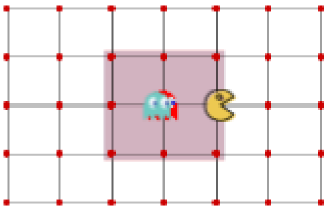
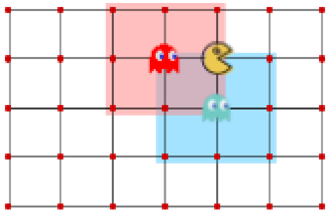
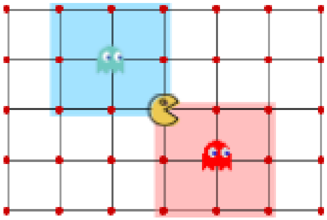
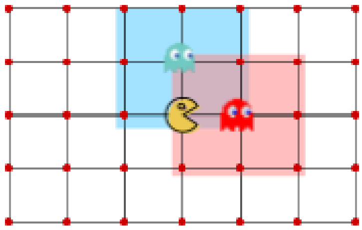
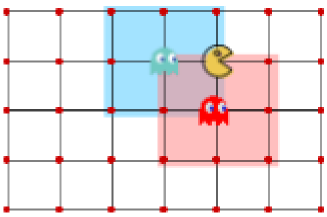
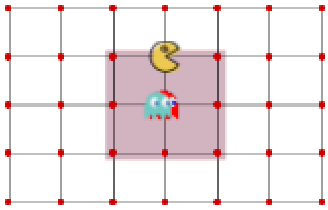
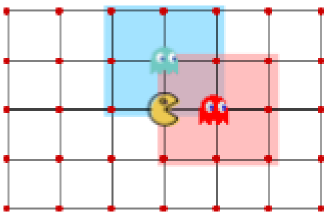
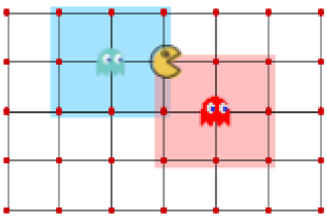
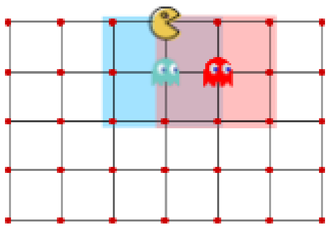
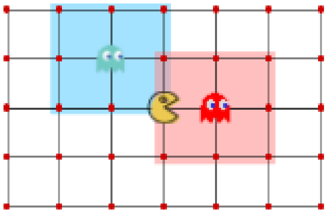
De même, par symétrie du comportement des fantômes en fonction des déplacements de Pacman, tous les cas peuvent être traités comme les configuration ci-dessous :



Au total, nous avons donc 11 configurations à étudier.

Ces configurations sont illustrées dans le tableau ci-dessous, associées chacune à un numéro et un nombre de coups maximum qui n'aboutissent pas à la capture de Pacman au tour T+1.

cas	coups possibles	Tour T	Tour T +1
1	2 haut bas		haut : (Cas 8 à symétrie près)  bas : 
2	2 haut rien		haut : meme cas  rien :
3	2 haut gauche		même cas
4	2 haut droit		Même cas
5	3 haut droite rien		haut - droite : même cas  rien :

6	3 haut bas droite		droite : même cas haut-bas (par équivalence) : 
7	1 rien		
8	2 haut droite		haut/ droite (par équivalence) : 
9	2 bas gauche		Même cas
10	1 haut		
11	1 bas		Même cas

Théorème :

Pour chacun des cas cités, il existe un tour T où les fantômes attrapent Pacman.

Remarque : Si Pacman est sur un bord (ex: bord *droit*), alors il aura un déplacement (*droite* dans ce cas) de bloquer.

Preuve :

Pour le cas 11 : Pacman n'a qu'un seul coup possible (bas), comme il ne peut pas indéfiniment aller en bas sans se retrouver coincé au bord de la grille, alors il existe un tour où les fantômes attrapent Pacman.

Pour les cas 3-4-9 : Ici Pacman n'a que 2 coups possible qui le font revenir systématique au même cas, comme il ne peut pas aller indéfiniment dans les 2 mêmes directions (haut/gauche - haut/droite - bas/gauche), sans se retrouver coincé dans un coin, alors il existe un tour où les fantômes attrapent Pacman.

Pour les cas 7-10 : Les deux cas sont équivalents à un tour près au cas 9 et 3 respectivement, ces deux cas ont déjà été traités.

Pour le cas 6 : Pacman a 3 coups possibles dont 2 le faisant revenir au cas 9 déjà traité, et 1 le faisant revenir au même cas. Comme Pacman ne peut pas aller indéfiniment à droite alors il existe un tour où les fantômes attrapent Pacman.

Pour le cas 5 : Pacman à 3 coups possible dont 1 le faisant revenir au cas 9 déjà traité, et 2 le faisant revenir au même cas. Comme Pacman ne peut pas aller indéfiniment en haut/à droite alors il existe un tour où les fantômes attrapent Pacman.

Pour le cas 8 : ce cas est équivalent à un tour près au cas 6.

Pour le cas 2 : Pacman a 2 coups possibles dont 1 qui le mène au cas 9 déjà traité, il ne peut pas aller indéfiniment en haut donc il existe un tour où les fantômes attrapent Pacman.

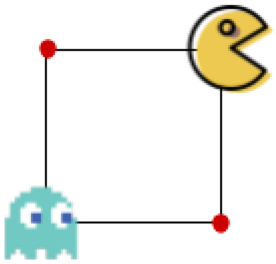
Pour le cas 1 : 2 coups possibles pour Pacman où il se retrouve dans un cas déjà traité (le 8 - 9).

Ce qui conclut la preuve du théorème, on déduit donc que cette stratégie permet d'attraper Pacman sur une grille finie. □

Conclusion

Comme cette stratégie permet d'attraper Pacman avec 2 fantômes sur une grille finie, on en déduit alors que le nombre de fantômes minimum est inférieur ou égale à 2.

Peut-on attraper Pacman avec un seul fantôme ?:
Prenons la configuration ci-dessous sur une grille 2x2 :



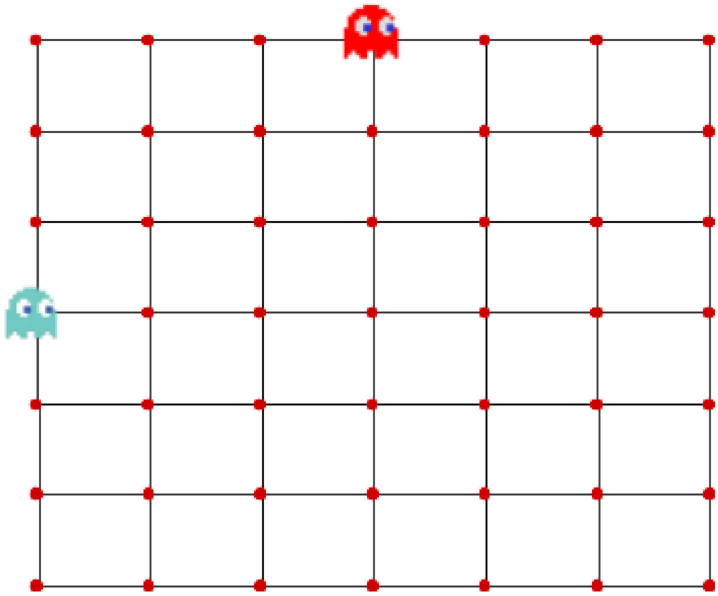
Ici il existe une stratégie pour Pacman qui lui permet de survivre indéfiniment. Donc un fantôme ne suffit pas pour attraper Pacman.

En conclusion le nombre minimum de fantômes pour attrapper Pacman sur une grille finie de taille hxl (h>2 et l>2) est 2.

Autres stratégies

Stratégie 1

Soit 2 fantômes, placement de départ :

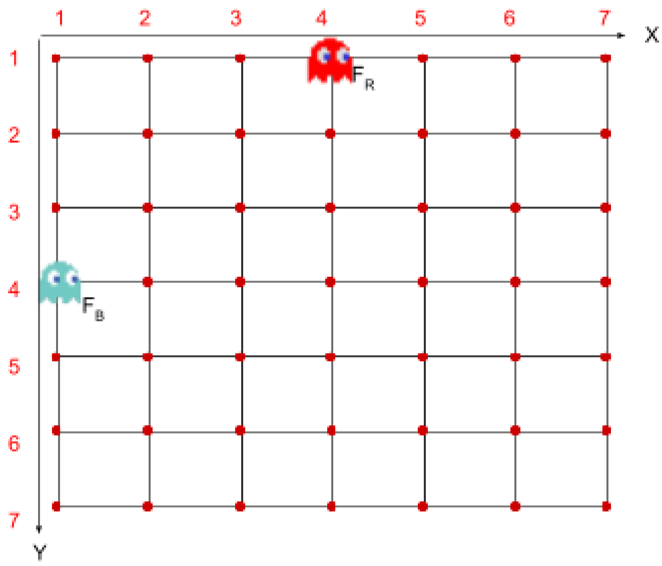


Le but des fantômes est de se rapprocher de Pacman en escalier (en alternant horizontalement/verticalement)

Soit une grille Gr de taille lxh : $Gr = \{ (x,y) \in N^2 \mid 1 \le x \le l \text{ et } 1 \le y \le h \}$

Pour 2 fantôme : $F_R\ (x_R, y_R) \in Gr$ et $F_B\ (x_B, y_B) \in Gr$

Pour pacman $P\ (x_P, y_P) \in Gr$



Algorithme

initialisation : indice=Vrai #permet de définir de quel côté le fantôme se rapproche

Tant que P != F_R et P != F_B :

Si indice alors:

#Pour le fantôme rouge :

on se rapproche en y si aligner approche x

approche_y (F_R)

#Pour le fantôme bleu :

on se rapproche en x si aligner approche y

approche_x (F_B)

Sinon: #indice==Faux

#Pour le fantôme rouge :

on se rapproche en x

approche_x (F_R)

#Pour le fantôme bleu :

on se rapproche en y

approche_y (F_B)

indice ← non indice

Tour de Pacman

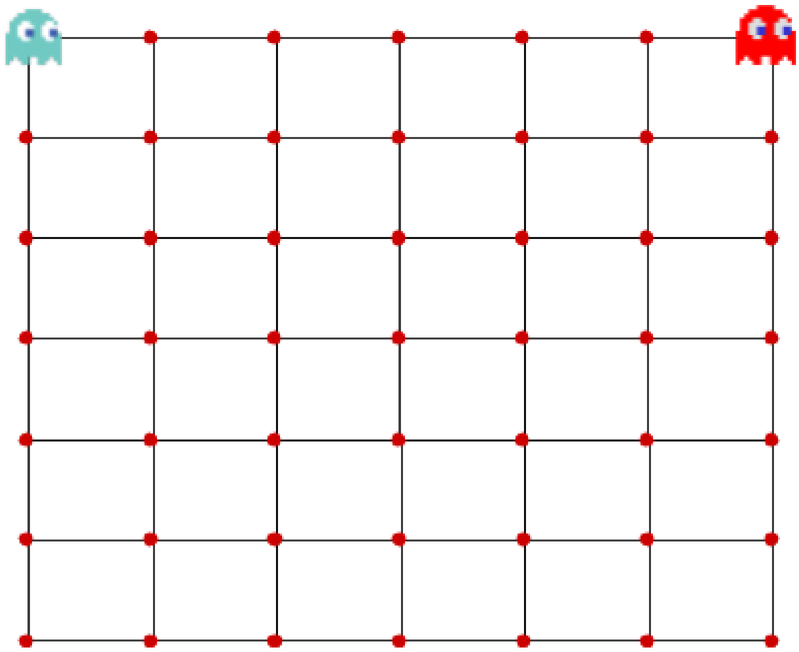
Les procédures approche_x et approche_y :

```
approche_x (F) :
    Si xF<xp alors :
        xF ← xF + 1            #droite
    Sinon :
        Si xF>xp alors :
            xF ← xF - 1            #gauche
        Sinon :                #Le fantôme est aligné en x
            Si yF < yP alors :
                yF ← yF + 1    #Bas
            Si yF > yP alors :
                yF ← yF - 1    #Haut

approche_y (F) :
    Si yF<yp alors :
        yF ← yF + 1            #Bas
    Sinon :
        Si yF>yp alors :
            yF ← yF - 1            #haut
        Sinon :                #Le fantôme est aligné en y
            Si xF<xP alors :
                xR ← xR + 1    #Droite
            Si xR>xP alors :
                xR ← xR - 1    #Gauche
```

Stratégie 2

Soit 2 fantômes, placement de départ :



Le but est de garder un fantôme sur la diagonale en rapprochant l'autre

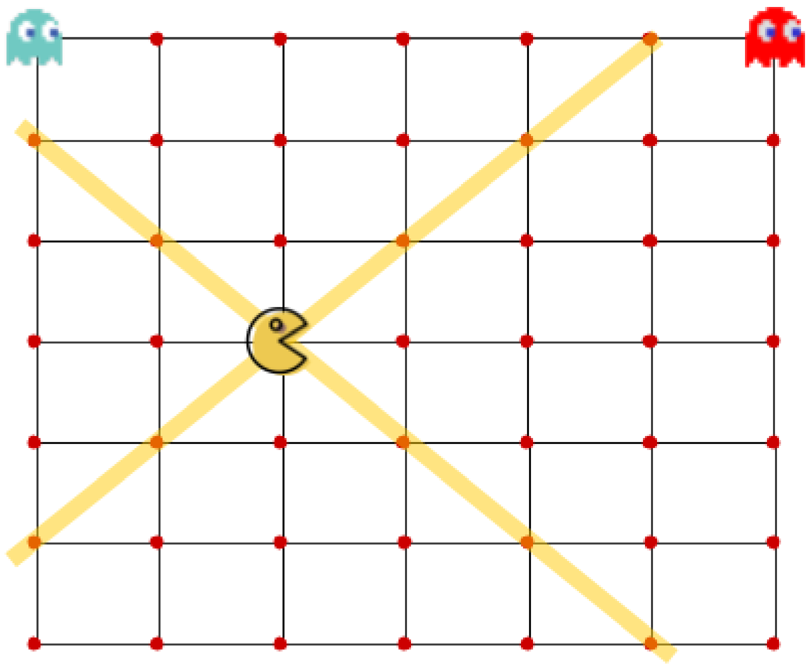
Soit une grille Gr de taille lxh : $Gr = \{ (x,y) \in N^2 \mid 1 \leq x \leq l \text{ et } 1 \leq y \leq h \}$

Pour 2 fantôme : $F_R (x_R , y_R) \in Gr$ et $F_B (x_B , y_B) \in Gr$

Pour pacman $P (x_P , y_P) \in Gr$

On définit l'ensemble des diagonales de Pacman comme :

$D = \{ (x,y) \in G \mid \exists\ n \in Z\ y = y_P + n \text{ et } x = x_P - n \} \cup \{ (x,y) \in G \mid \exists\ n \in Z\ y = y_P + n \text{ et } x = x_P + n \}$



Algorithme

initialisation : i = Faux

Tant que P != F_R et P != F_B :

Si non i :

Si $F_R \notin D$ et $F_B \notin D$:

rapprocher(F_R)

rapprocher(F_B)

Si $F_R \in D$: # on définit des rôles

Pivot = F_R

App = F_B

i ← Vrai

Si $F_B \in D$:

Pivot = F_B

App = F_R

i ← Vrai

Tour de Pacman

Sinon :

Si Pivot $\notin$ D :

rapprocher(Pivot)

rapproche (App)

Tour de Pacman

```
Procédure rapprocher (F) :
    Si P!=F :
        Δx = |x_P - x_F|
        Δy = |y_P - y_F|
        Si Δx < Δy :
            si y_P > y_F :
                y_F ← y_F + 1          #Bas
            Sinon :
                y_F ← y_F - 1          #Haut
        Sinon :
            si x_P > x_F :
                x_F ← x_F + 1          #Droite
            Sinon :
                x_F ← x_F - 1          #Gauche
```

Lemme 1 :

Si un fantôme ne fait que se rapprocher de Pacman (suivant la procédure rapprocher (F)) à chaque tour, alors il existe un tour au début duquel le fantôme sera dans la diagonale de Pacman.

Preuve :

Soit une grille G et un fantôme F, en suivant l'algorithme suivant :

Tant que $F \notin D$:

rapprocher (F)

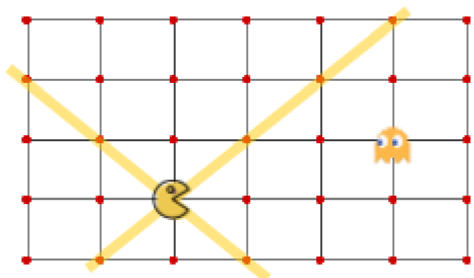
Coup de Pacman

La preuve du lemme 1 revient a montrer que cette boucle est finie.

Soient : $\Delta x = |x_P - x_F|$, $\Delta y = |y_P - y_F|$ et $\Delta = |\Delta x - \Delta y|$

$\Delta = 0$ revient à dire que le fantôme F est dans la diagonale de Pacman.

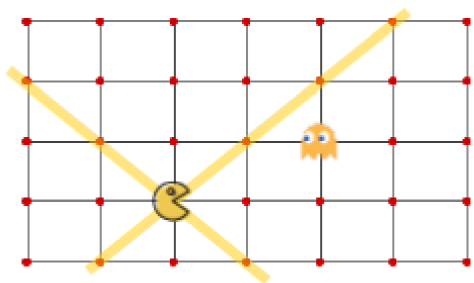
À symétrie près, on peut supposer que $x_F \geq x_P$ et $y_F \leq y_P$ comme sur le dessin ci-dessous. Suivant le coup de Pacman Δ reste stable ou diminue :



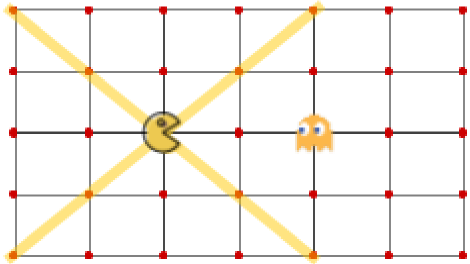
Tour T ($\Delta = 2$)

Suivant le coup de Pacman :

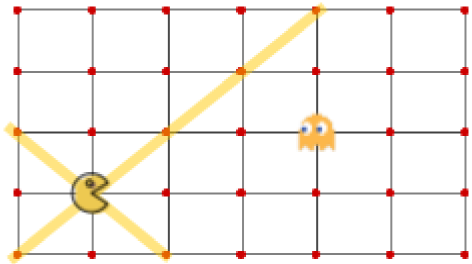
Pacman reste immobile (Δ diminue $\Delta = 1$) :



Haut :

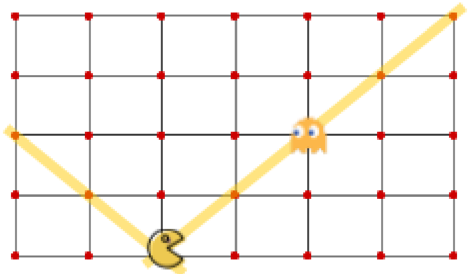


Gauche :

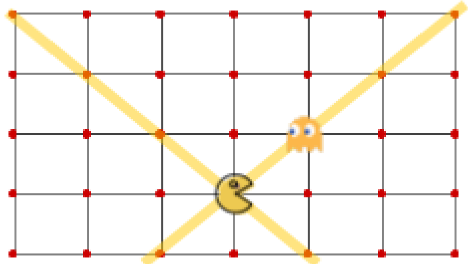


Dans ces cas là Δ reste stable (Δ = 2)

Bas :



Droite :



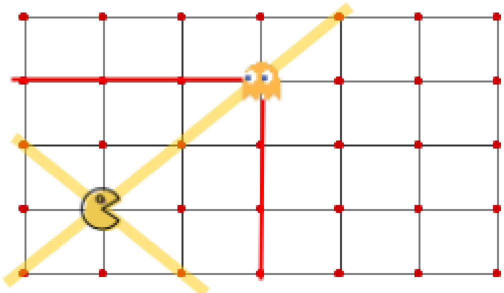
Dans ces cas là Δ diminue (Δ = 0)

Pacman ne peut pas aller indéfiniment en bas/ à droite, donc il existe un tour où Δ s'annule.□

Remarque : si le fantôme Pivot est dans la diagonale au début du tour T, alors il y sera encore au début du tour T + 1

Lemme 2 :

Le Pivot délimite l'espace où Pacman peut se déplacer, Pacman ne peut donc pas passer à travers le pivot, le dessin ci-dessous illustre le fantôme sur la diagonale haut-droite de Pacman, les autres cas possible où $F \in D$ peuvent se déduire par symétrie et sont traités de la même manière :

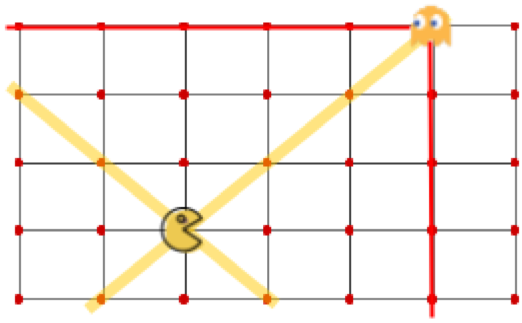


Pacman ne peut pas passer au-delà des traits rouge décrits par le fantôme (suivant le fantôme/ se déplaçant avec le fantôme).

Preuve :

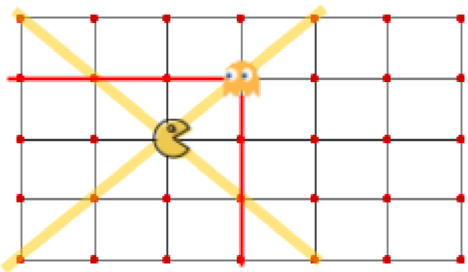
Supposons que le fantôme pivot F est aligné diagonalement avec PacMan, alors et jusqu'à la fin de la partie, $x_P \leq x_F$ et $y_P \geq y_F$ avec égalité dans l'un des deux cas si et seulement si PacMan est capturé.

Soit la configuration suivante pour le tour T :



Si Pacman va en bas, à gauche où ne fait rien alors il reste en dessous des traits décrits, et il n'y a rien à montrer.

Si Pacman se rapproche du fantôme (va en haut ou à droite), alors la distance entre Pacman et le fantôme diminue, et il existe un tour où Pacman et le fantôme seront dans une configuration équivalente à celle ci-dessous :



Comme le fantôme reste immobile alors Pacman ne peut aller en haut / à droite à moins de se faire manger au prochain tour. □

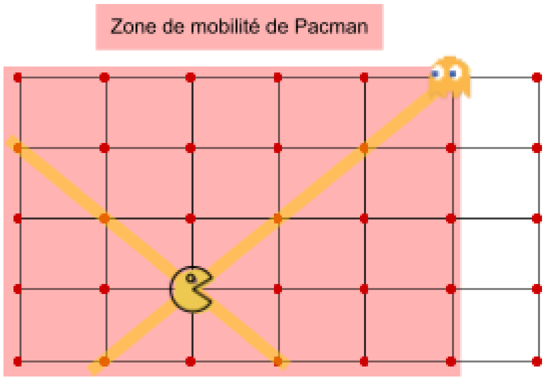
Notation : On appelle la zone entre les traits décrits par le Pivot et les bords de la grille zone de mobilité de Pacman.

Lemme 3 :

Une fois le fantôme dans la diagonale de Pacman, si il bouge alors sa zone de mobilité sera réduite.

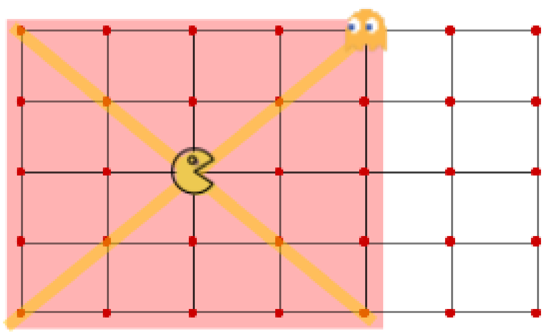
Preuve :

Supposons la configuration suivante :

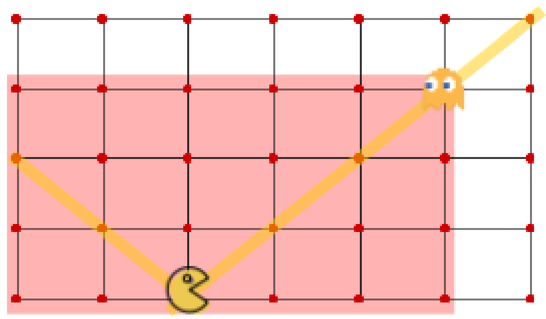


Suivant les déplacement de Pacman :

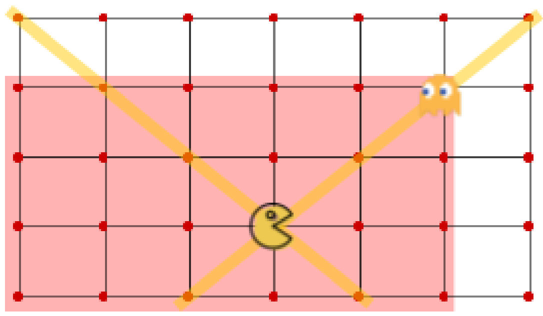
Haut



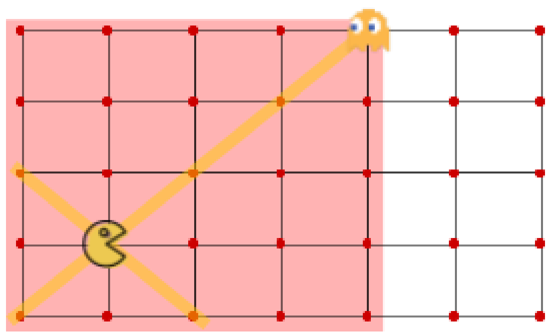
Bas



Droite



Gauche



Ce qui prouve le lemme. □

Remarque : La zone de mobilité de Pacman reste stable si ce dernier ne fait rien.

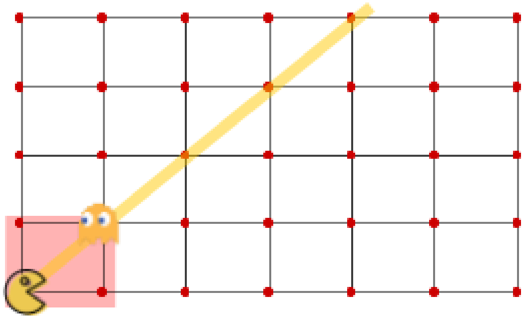
Lemme 4 :

La distance entre Pacman et le fantôme App ne peut que diminuer où reste stable.

Preuve :

Cela peut se démontrer par une étude de cas comme on a pu le faire dans des lemmes précédents. □

Conclusion : Par le lemme 3 on sait que si Pacman bouge alors sa zone de mobilité se réduit, donc si il ne fait que bouger il existe un tour ou Pacman sera coincé dans un coin, soit dans la configuration suivante ou dans une configuration équivalente :



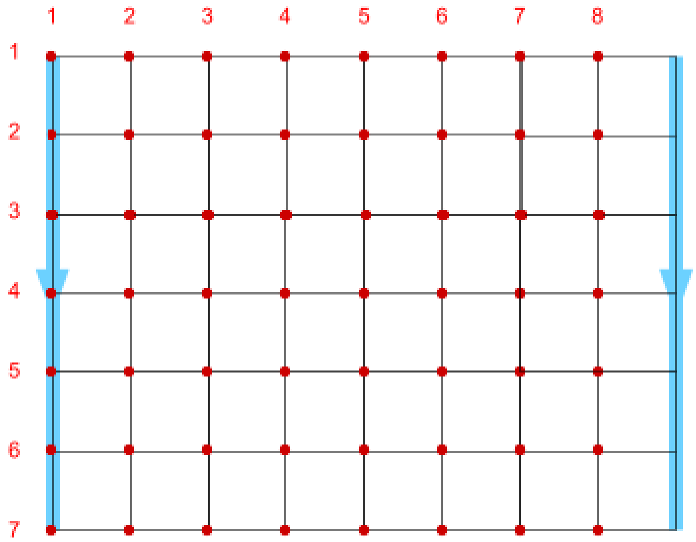
Donc le fantôme App s'approche de Pacman et il existe un tour où le fantôme App attrape le Pacman.

Si Pacman ne bouge pas alors par le lemme 4 il existe un tour où fantôme App attrape Pacman.

Stratégie sur un cylindre

Définition

Soit une grille Gr de taille lxh : Gr = { (x,y)∈ Z/lZ * Z | 1 ≤ y ≤ h }



Dans la représentation, si x = l est assimilé à x = 0.

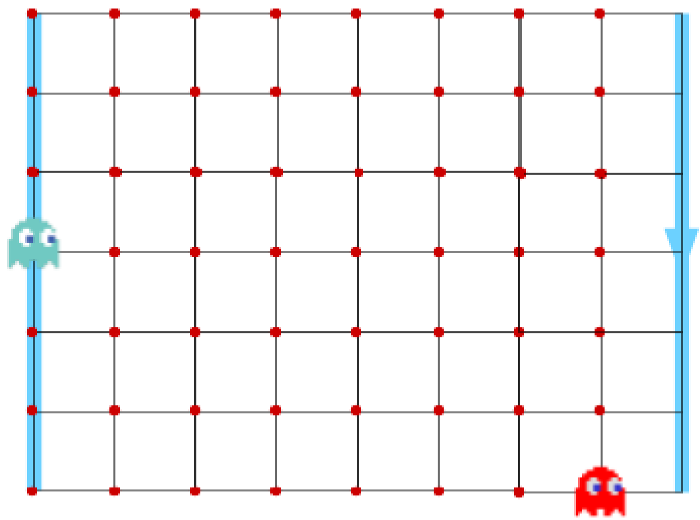
Pour 2 fantôme : F_R (x_R , y_R) ∈ Gr et F_B (x_B , y_B) ∈ Gr

Pour pacman P (x_P , y_P) ∈ Gr

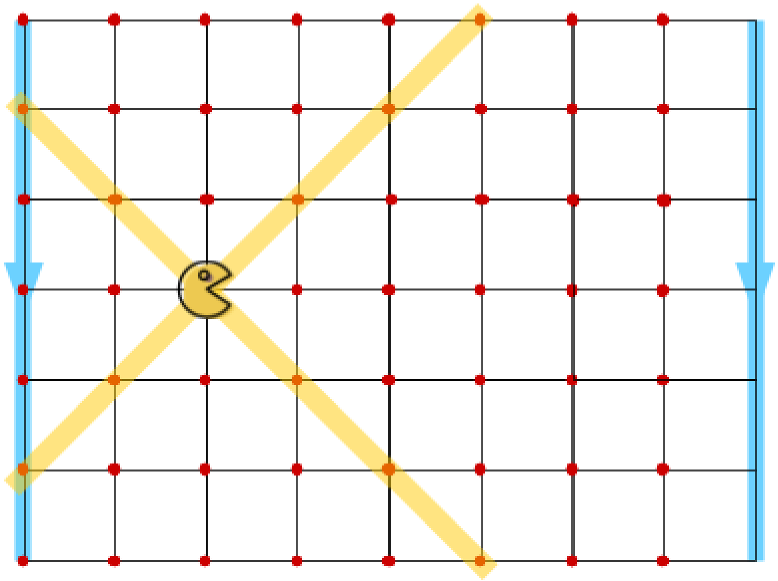
On définit la diagonale de Pacman :

D = { (x,y)∈ G| ∃ n∈Z $y = y_P + n$ et $x = x_P - n$ }∪{ (x,y)∈ G| ∃ n∈Z $y = y_P + n$ et $x = x_P +$ n }

Placement de départ :



Les diagonales décrites par Pacam sont représentés comme ci-dessous :



La stratégie consiste à aligner le fantôme bleu avec Pacman horizontalement, et à placer sur le diagonale le fantôme rouge.
Une fois la diagonale déterminer le fantôme bleu se rapprochera de Pacman a l'opposé de la diagonale.

Algorithme

Dans l'algorithme qui suit, la procédure rapprocher (F) est la même que celle dans l'algorithme précédent

initialisation : align = Faux ; diag = Faux ; droite = Vrai ;

Tant que P != F_R et P != F_B :

    Si align :

        Si diag :

            # coup de F_R

            Si $F_R \notin D$:

                rapprocher (F_R)

            # coup de F_B

            Si $y_B == y_P$:

                Si droite :

                    droite (F_B)

                Sinon :

                    gauche (F_B)

            Sinon :

                aligner_y (F_B)

            Tour de Pacman

        Sinon :

            rapprocher (F_R)

            Si $F_R \in D$:

                diag = Vrai

                Si $x_R < x_P$:

                    droite ← Faux

            Tour de Pacman

    Sinon :

        aligner_y (F_B)

        Si $y_B == y_P$:

            align = Vrai

        Tour de Pacman

Procédure aligner_x et aligner_y :

aligner_x (F) :

Si $x_F < x_P$:

droite (F)

Si $x_F > x_P$:

gauche (F)

aligner_y (F) :

Si $y_F < y_P$:

bas (F)

Si $y_F > y_P$:

haut (F)

Esquisse de preuve

Lemme 1 :

Il existe un tour au début duquel le fantôme Bleu est aligné horizontalement avec Pacman

Preuve : L'écart vertical entre Pacman et F_B ne peut que rester stable ou diminuer, ceci se prouve par étude de cas (comme vu dans la preuve des lemmes précédents).
Si Pacman se déplace verticalement au sens contraire du fantôme bleu alors l'écart vertical reste stable, autrement il diminue.
L'étude de cas nous montre qu' un coup sur cinq permet à Pacman de garder l'écart vertical, comme il ne peut pas faire indéfiniment le même coup, alors l'écart vertical entre Pacman et le fantôme diminue strictement et il existe un tour où F_B est aligné avec Pacman. □

Remarque : Une fois le fantôme bleu aligner Pacman ne peut plus traverser (passer d'une case x=l a x=1 en un coup ou inversement) .

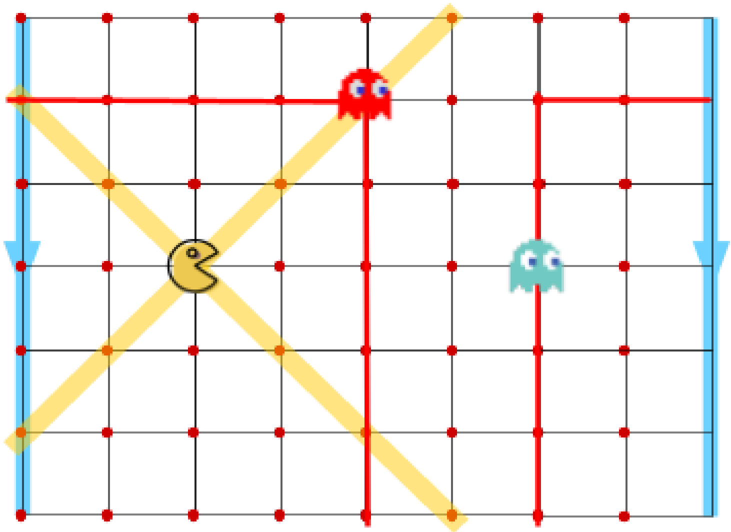
Lemme 2 :

Il existe un tour au début duquel le fantôme rouge est sur la diagonale de Pacman.

Preuve : La preuve est identique à celle du lemme 1 dans la stratégie 2. □

Lemme 3 :

Les deux fantômes délimite la grille pour Pacman, comme le montre dans le dessin ci-dessous :



Preuve :

Cela peut se démontrer comme on a pu le faire dans le lemme 2 de la preuve précédente (page 26).□

La suite de la preuve se rédige comme la preuve précédente en considérant la grille fini délimitée par le fantôme bleu.

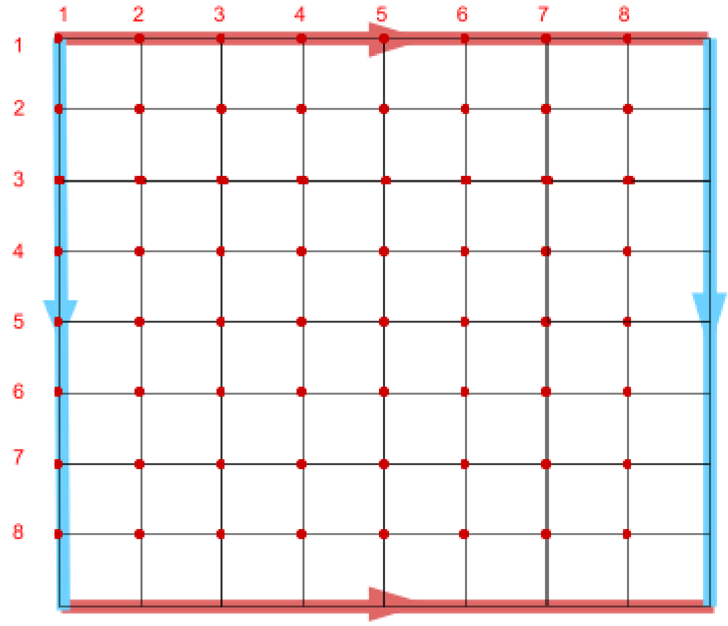
Conclusion

Comme cette stratégie permet d'attraper Pacman avec 2 fantômes sur un cylindre, on en déduit alors que le nombre de fantômes minimum est inférieure ou égale à 2.
Par le même raisonnement que celui de la conclusion de la stratégie sur une grille finie (page 19), le nombre minimum de fantômes pour attraper Pacman doit être supérieur ou égale à 2.
On en conclut que le nombre minimum de fantômes pour attraper Pacman sur un cylindre est 2.

Stratégie sur un tore

Définition

Soit une grille Gr de taille lxh : $Gr = \{ (x,y) \in Z/lZ * Z/hZ \}$



Dans la représentation : $x = l$ est assimilé à $x = 0$ et $y = h$ assimilé à $y = 0$.

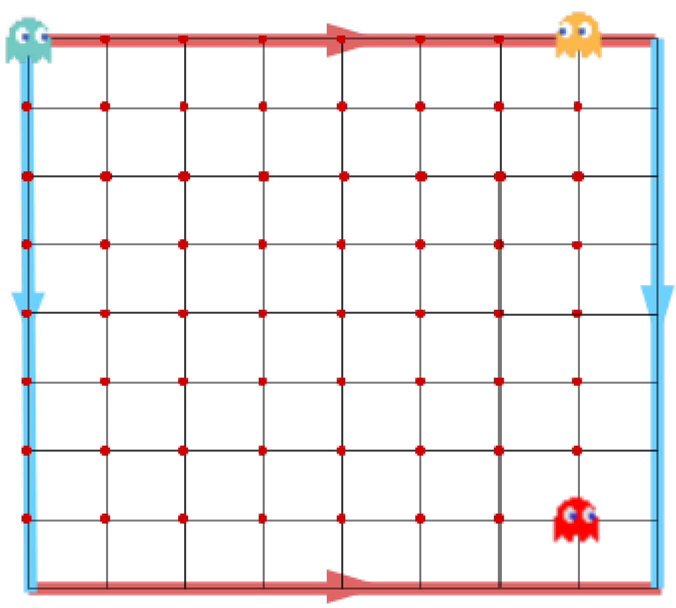
Pour 3 fantôme : $F_R (x_R , y_R) \in Gr$ et $F_B (x_B , y_B) \in Gr$ et $F_J (x_J , y_J) \in Gr$

Pour pacman $P (x_P , y_P) \in Gr$

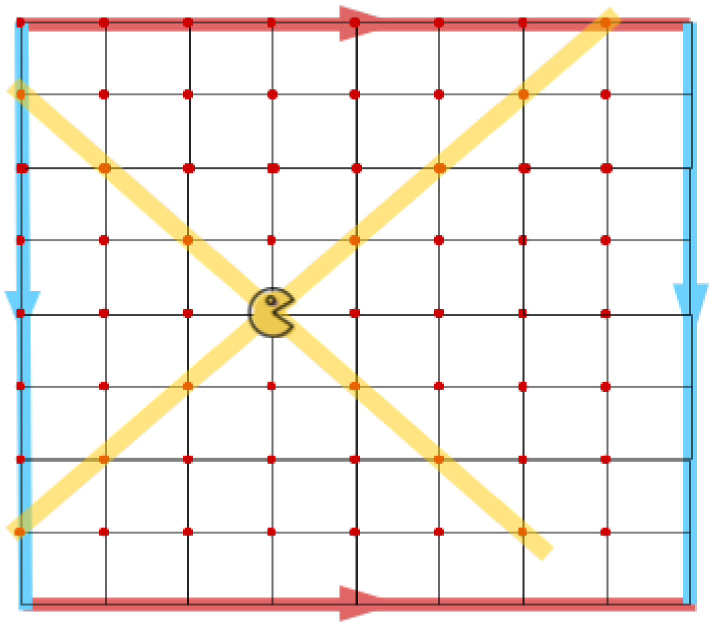
On définit la diagonale de Pacman :

$D = \{ (x,y) \in G | \exists n \in Z \ y = y_P + n \text{ et } x = x_P - n \} \cup \{ (x,y) \in G | \exists n \in Z \ y = y_P + n \text{ et } x = x_P + n \}$

Placement de départ :



Les diagonales décrites par Pacam sont représentés comme ci-dessous :



La stratégie consiste à aligner un des deux fantômes (bleu ou rouge) avec Pacman verticalement, on appelera ce fantôme F_V, et le deuxieme horizontalement (F_H), et à placer sur le diagonale le fantôme jaune.

Une fois la diagonale déterminer le fantôme à l'horizontale se rapprochera de Pacman à l'opposé de la diagonale.

Algorithme

Dans l'algorithme qui suit, les procédures rapprocher, aligner_x et aligner_y sont les mêmes que celles dans l'algorithme précédent.

```
initialisation : alignV = Faux ; alignH = Faux ; diag = Faux ; droite = Vrai ;
Tant que P != F_V et P != F_H et P != F_J :
    Si alignH :
        Si diag :
            # coup de F_J
            Si F_J ∉ D :
                rapprocher (F_R)
            #coup de F_V
            aligner_x ( F_V )
            # coup de F_H
            Si y_H == y_P :
                Si droite :
                    droite ( F_H )
                Sinon :
                    gauche (F_H )
            Sinon :
                aligner_y (F_H )
            Tour de Pacman
    Sinon :
            rapprocher (F_R )
            Si F_J ∈ D :
                diag ← Vrai
                Si x_J < x_P :
                    droite ← Faux
            Tour de Pacman
```

Sinon :

Si alignV :

aligner_x (F_V)

aligner_y (F_H)

Si y_V == y_P :

alignH ← Vrai

Tour de Pacman

Sinon :

gauche (F_B)

droite (F_R)

Si x_R == x_P :

alignV ← Vrai

F_V ← F_R

F_H ← F_B

Si x_B == x_P :

alignV ← Vrai

F_V ← F_B

F_H ← F_R

Tour de Pacman

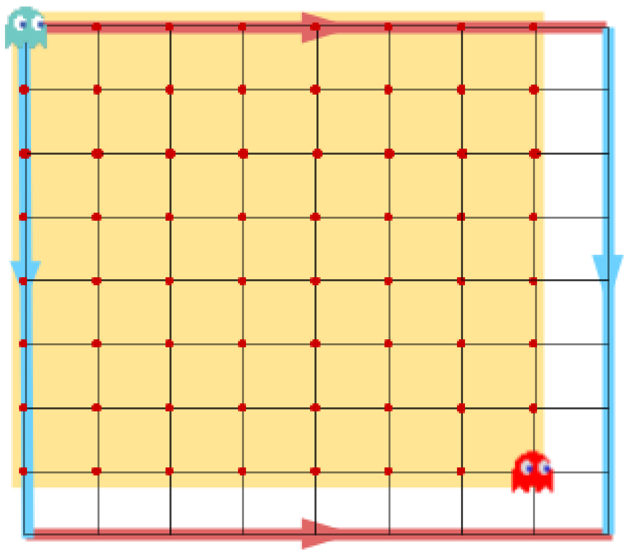
Esquisse de preuve

Lemme 0 :

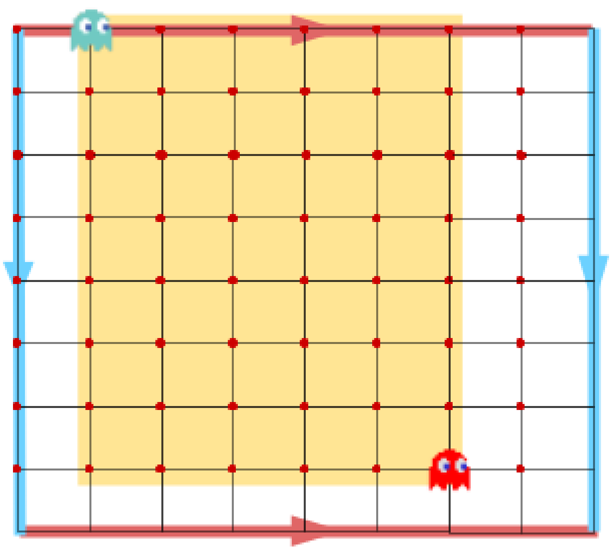
Il existe un tour au début duquel un fantôme (bleu ou rouge) est aligné avec Pacman.

Preuve :

Par l'absurde, les deux fantômes décrivent un bande qui rétrécit à chaque tour :



Si Pacman n'est pas aligné avec un des deux fantômes au premier tour, alors au second tour il sera forcément dans la bande décrite au 2eme tour :



Donc il existe forcément un tour au début duquel Pacman sera aligné à un des deux fantômes. □

Remarque : Une fois le fantôme aligner verticalement avec Pacman, Pacman ne peut plus traverser (passer d'une case où y = h à une case y = 1 en un seul coup).

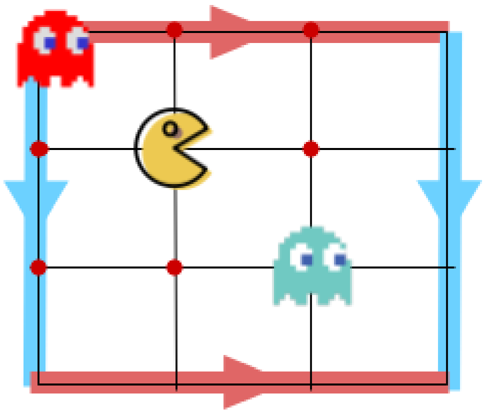
Donc le reste de la preuve est le même que la preuve précédente.

Conclusion

Comme cette stratégie permet d'attraper Pacman avec 3 fantômes sur une grille tore, on en déduit alors que le nombre de fantômes minimum est inférieure ou égale à 3.

Peut-on attraper Pacman avec un 2 fantômes ?:

Prenons la configuration ci-dessous sur un tore 3x3 :



Ici il existe une stratégie pour Pacman qui lui permet de survivre indéfiniment.

Si Pacman se trouve sur n'importe quelle case du tore, il aura 4 déplacements possibles (haut-bas-droite-gauche), contrairement à une grille fine ou un cylindre qui possèdent des bords infranchissable.

Cette configuration bloque tous les déplacements de Pacman mais ne permet pas de l'attraper, un troisième fantôme est donc nécessaire.

En conclusion le nombre minimum de fantômes pour attrapper Pacman sur un tore taille hxl (h≥3 et l≥3) est 3.

Grille infinie

La stratégie précédente nous permet d'attraper Pacman sur un tore de taille hxl (avec h,l $\in$ N) avec 3 fantômes.
Pour passer d'un tore à une grille infini : on considère le tore comme une grille fini de taille hxl, et on peut coller une infinité de grilles les uns après les autres.
Dans ce cas là, il suffirait de répliquer la configuration des fantômes sur chaque grille en les faisant suivre l'algorithme écrit auparavant.

Automates

Pour une grille de dimension **hxl** (n sommet), avec **F** fantômes distincts, nombre de positionnement possible pour les fantômes : $\mathbf{n^F}$
Nombre de combinaison de départ en incluant Pacman : $\mathbf{n \times n^F}$

Soit un état **e** définie comme triplet : ((coordonnée des fantômes), coordonnée de Pacman, Tour du joueur)
où le tour du joueur indique si c'est à Pacman ou au fantôme de se déplacer.

Soit **Q** un ensemble d'état qui représente toutes les combinaisons de placement possible sur une grille pour Pacman et les fantômes.
Soit **F** un ensemble d'état regroupant tous les états où Pacman est déjà sur un fantôme.
En considérant **Qini** = **Q\F**, on peut construire avec un automate
A = (Q , (haut,bas,droite,gauche) , Qinit , δ , F), avec **δ** la fonction de transition.

Construire un automate a partir d'une stratégie

Si on considère une stratégie donnée comme une fonction de transition d'un état $\mathbf{e_F}$ (ou c'est aux fantômes de jouer) vers un état $\mathbf{e_P}$ (où c'est à Pacman de jouer) par une **ε**-transition, et pour chaque état $\mathbf{e_P}$ on ajoute les transitions correspondantes aux mouvements que Pacman pourrait faire (haut-bas-droite-gauche-rien), alors on obtient un automate non déterministe avec des ε-transition.

On peut alors vérifier si notre stratégie est correcte par un algorithme de détection de boucle, si il existe au moins une boucle dans l'automate c'est qu'il existe pour Pacman une façon de jouer lui permettant d'échapper indéfiniment au fantômes.

Exploitation de l’archive

Github : https://github.com/dontbesuspicious/Stage2022

L’archive contient le code permettant de vérifier si la stratégie 1 est correcte :
Les fichiers fantome.py grille.py et pacman.py définissent les classes indiquées dans leur nom.
Le fichier strategie.py contient la stratégie codée de façon à renvoyer un ensemble d’état successeur à un état $\mathbf{e}_F$ donné en argument, le fichier contient aussi la fonction permettant de renvoyer les successeur d’un état **e** donné est la fonction permettant de détecter un cycle dans un automate et de le renvoyer sous forme de liste d'état.

Le fichier test_strategie.py permet de tester si la stratégie est correcte ou non sur une grille de taille hxl choisie au début du programme.

Conclusion

Le sujet de ce stage m’a permis d'assouvir une partie de ma curiosité mathématique, en m’apprenant notamment la complexité d’une rédaction de preuve, mais aussi l’étendu que pouvait avoir un sujet relativement simple.

L'expérience dans l’institut Fourier était épanouissante, le rythme de travail était vraiment agréable, je suis reconnaissante envers l’université pour m’avoir permis de faire ce stage grâce à la procédure de stage d'excellence, ainsi qu'à l'entité d'accueil et au professeur de m’avoir encadré

Bibliographie

Pac-Man contre les fantômes, WordPress.com, Rémi Molinier, le 13 décembre 2021

North-Holland, Discrete Applied Mathematics 8 (1984) 1-12, A GAME OF COPS AND ROBBERS

Le jeu de Pac-Man, Groupe SiRC de l'IREM de Grenoble

Situation de recherche pour la classe : Pac-Man contre les fantômes, Actes du colloque CORFEM 2021