Rapport 2021-2022
du groupe "Analyse au lycée" de l'IREM de Grenoble

Marie Busser (Lycée de Bonneville), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche à Chamonix), Florence Michon (Lycée Frison-Roche à Chamonix) et Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes)

2 septembre 2022

L'objectif du groupe, créé en septembre 2020, est de repenser l'introduction des notions centrales d'analyse au lycée en commençant par l'exponentielle, dont la place a changé avec la dernière réforme du lycée (elle doit maintenant être introduite en classe de première).

En continuité avec l'année précédente, cette année 2021–2022 s'est centrée sur deux thèmes : l'analyse et la modélisation.

— Nous avons continué à produire des tâches d'introduction en lien avec l'analyse. Plus précisément, nous avons créé une tâche une tâche sur les fonctions composées (qui est sur le site web, avec une fiche prof détaillant notre démarche), et nous avons peaufiné une tâche "graphique" d'introduction à l'exponentielle. Il y a également une réflexion en cours sur l'introduction à la dérivée.

— En lien avec l'tâche de Rogalski étudiée en 2020–2021 (problème de dilution), nous aimerions mettre en place quelques documents formant un parcours "modélisation" cohérent tout au long du lycée. Nous en sommes surtout à une phase de bibliographie, mais avons déjà décidé d'une petite expérimentation pour l'an prochain.

1 Analyse

À la suite de l'année 2020–2021, il nous est apparu qu'un certain nombre de difficultés des élèves dans la manipulation de la fonction exponentielle étaient liées à la perception des fonctions de manière abstraite, et en particulier à la composition des fonctions. L'introduction de la fonction exponentielle est la première occasion pour les élèves de se confronter à une fonction assez abstraite, et à faire des raisonnements dans un registre symbolique sur des fonctions abstraites.

— En effet, elle est définie par une équation différentielle [1] et elle n'est donc pas définie "algébriquement" comme la plupart des fonctions que les élèves ont vues jusqu'alors. En un sens, c'est presque une fonction abstraite générale, sauf que les élèves connaissent des propriétés sur cette fonction : elle est dérivable et égale à sa fonction dérivée et vaut 1 en 0.

— C'est également la première fois que les élèves sont confrontés à des démonstrations abstraites de manipulation de ce qu'on pourrait appeler une "algèbre de la dérivation", afin d'obtenir l'unicité de la solution à l'EDO définissant la fonction exponentielle, de démontrer qu'elle ne s'annule pas, et qu'elle vérifie $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

1. ou par une équation fonctionnelle, selon les classes

Lorsqu'on dérive $\exp(x+y)$ en x, à y fixé, il faut pouvoir concevoir la fonction $x \mapsto \exp(x+y)$, avec y comme paramètre. De même, les exercices classiques d'utilisation des propriétés de l'exponentielle vont impliquer la dérivation de fonction du type $\exp(ax+b)$. Par ailleurs la dérivation de fonctions composées est souvent une difficulté pour les élèves, et d'un autre côté, les programmes et manuels n'insistent pas sur cette notion en tant que telle. Il nous est apparu utile de faire une tâche sur les fonctions composées, à la fois pour enrichir la compréhension que les élèves ont des fonctions, mais aussi pour préparer le terrain à la dérivation de fonction composée et aux manipulations abstraites du chapitre sur l'exponentielle.

Signalons ici une difficulté : la notation e^x a tendance à moins mettre en évidence la fonction exp que la notation $\exp(x)$. Il nous semble utile de séparer, au moins dans un premier temps, les raisonnements et exercices algébriques utilisant le fait que l'exponentielle soit une fonction puissance, des raisonnements utilisant la propriété ayant servi à définir l'exponentielle ($f' = f$ et condition initiale).

Le groupe s'est donc penché sur deux tâches : une tâche sur les fonctions composées, que l'on trouvera à cette adresse :

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/analyse-au-lycee/activite-sur-la
kjsp?RH=413148517470877

et une "tâche graphique d'introduction à l'exponentielle", (et un cours associé) qui sera bientôt disponible sur le site de l'IREM. Décrivons brièvement cette tâche. Il s'agit de demander aux élèves, successivement :

1. de chercher s'ils connaissent des fonctions égales à leur dérivée (ils manipulent alors un registre "algébrique", qui correspond essentiellement aux règles de dérivations des fonctions polynômes)
2. de chercher si les solutions trouvées conviennent encore si on ajoute la contrainte $f(0) \neq 0$,
3. de décider, pour quelques graphes de fonctions fournis, s'il est plausible que les fonctions représentées vérifient $f' = f$,
4. de montrer, en s'appuyant sur un graphique, qu'une solution de $f' = f$ et $f(0) \neq 0$ ne peut pas croiser l'axe des abscisses.

Plusieurs types d'activités cognitives sont regroupées dans cette tâche :

- un travail de dérivation de type algébrique, (première étape)
- une réactivation du lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction, avec un appui graphique (étapes 3 et 4)
- une réactivation du lien entre signe de la dérivée et pente de la tangente, avec un appui graphique (étape 3)
- des va-et-vient entre différents registres (graphique, symbolique, algébrique) (étape 3)
- un travail de démonstration qui s'appuie sur un graphique (étapes 3 et 4) et qui peut être plus ou moins poussé en termes de rigueur et de rédaction.

Ce dernier point fait d'ailleurs encore l'objet d'une réflexion de la part du groupe.

2 Modélisation mathématique

La question de la modélisation est apparue naturellement pour le groupe dès le début : la façon dont la fonction exponentielle est introduite en spécialité maths (solution d'une EDO) suggère qu'il s'agit d'un outil de modélisation (c'est d'ailleurs explicite dans les programmes actuels). Avoir des exemples d'applications des mathématiques est toujours tentant pour les enseignants, nous y voyons la possibilité de motiver certains élèves qui y seraient sensibles, mais également de montrer une image plus fidèle de la place des mathématiques dans les sciences. Parler d'applications des mathématiques n'impose pas forcément de faire pratiquer aux élèves une activité de modélisation, mais il nous semble qu'il y a dans la manière dont les mathématiques sont appliquées des choses importantes à comprendre et à apprendre.

S'il n'est pas certain que ce soit aux enseignants de mathématiques de prendre en charge l'enseignement de la modélisation, il n'est pas clair non plus que les programmes actuels lui laissent une place raisonnable. Le terme de modélisation apprait dans les programmes de spécialité physique et mathématiques, mais sans contenu conséquent. L'enseignement scientifique commun est parcouru de questions de modélisations sans contenu explicite sur ce que signifie modéliser en sciences, sur ce à quoi il faudrait faire attention. Cette situation est peut-être une opportunité : elle laisse une certaine liberté aux enseignants de lycée pour réfléchir collectivement à la place de cette notion, qui est intrinsèquement interdisciplinaire. Quand l'institution se charge de figer les cadres, le résultat est souvent décevant ... Une aventure interdisciplinaire étant source de contraintes supplémentaires, nous avons restreint nos ambitions à l'objectif, déjà ambitieux, de construire un parcours de tâches de modélisation au lycée (sur les trois classes). Aucun d'entre nous n'étant spécialiste de modélisation, nous avons commencé à nous (auto-)former à ces questions de modélisation mathématique en commençant par un travail de bibliographie, tout en prenant contact avec un doctorant spécialiste de l'enseignement de la modélisation, Valentin Roussel.

Le travail réalisé cette année est donc essentiellement un travail de bibliographie, dont le contenu est présent sur le site du groupe https://moodle.caseine.org/course/view.php?id=657. Pour l'an prochain, les objectifs sont :

— de continuer à défricher la bibliographie, à la fois en termes théoriques et en termes de contenus de tâches de modélisation,

— de mettre rapidement les mains dans le cambouis en testant dans plusieurs classes une tâche de modélisation autour des empilements de sphères (avec des balles de ping-pong).