Rapport 2020-2021
du groupe "Analyse au lycée" de l'IREM de Grenoble

Marie Busser (Lycée de Bonneville), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche à Chamonix), Florence Michon (Lycée Frison-Roche à Chamonix) et Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes)

10 septembre 2021

1 Motivation du groupe et cadre théorique

L'objectif du groupe est de repenser l'introduction des notions centrales d'analyse au lycée en commençant par l'exponentielle, dont la place a changé avec la dernière réforme du lycée (elle doit maintenant être introduite en classe de première). Cette année 2020-2021 s'est centrée sur le *choix, l'adaptation et la création de situations d'introduction de l'exponentielle en classe de première*. Nous avons exploré un peu la biblio en partant d'une très bonne brochure de l'IREM de P7 sur l'exponentielle, [1]. Par rapport à cette brochure, il nous a fallu nous l'approprier, l'adapter au cadre de la première (lorsque la brochure de l'IREM de P7 a été écrite, l'exponentielle était introduite en terminale, donc après une plus grande familiarisation avec la notion de dérivée) et la compléter.

1.1 Contexte mathématique

D'un point de vue historique, il semble que les motivations soient notamment les suivantes [1] :

— puissances fractionnaires : très ancien, traces babyloniennes pour des calculs d'intérêt, puis Oresme au XIVème siècle, et rôle important de la notation popularisée par Descartes au milieu du XVIIème s. puis par Newton et Leibniz (cf. [1] p.11),

— logarithmes : développés par Napier au début du XVIIème pour faciliter le calcul du produit de deux nombres avec beaucoup de chiffres (notamment avec pour motivation les calculs en astronomie),

— problème de corde vibrante de Florimont de Beaune au milieu du XVIIème, étudié par Descartes puis Leibniz, faisant apparaître une fonction solution de f'=Cf avec C constante,

— dans la seconde moitié du XVIIème, de nombreux problèmes utilisent logarithme et exponentielle : spirale logarithmique, chaînette etc.

Par ailleurs, les liens mathématiques entre ces différentes notions se font tout au long du XVIIème siècle :

— quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent et popriété de transformation d'un produit en addition (le calcul infinitésimal n'est pas encore développé, mais on reconnait maintenant l'apparition du logarithme naturel comme primitive de la fonction inverse),

— Huygens fait le lien entre la quadrature de l'hyperbole et le logarithme naturel

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles

— Correspondance de Leibniz et Huygens où le premier donne un nom à la base du logarithme naturel.
— Leibniz fait le lien entre le problème de Florimond de Beaune et la quadrature de l'hyperbole.
— dans la première moitié du XVIIIème Euler donne son nom définitif à e et évalue ses 7 premières décimales.

Nous ne savons pas si la question de la démonstration directe de l'existence d'une fonction solution de l'équation $f' = f$ et $f(0) = 1$ est abordée à cette époque (sans passer par la définition du logarithme via la quadrature de l'hyperbole et de l'exponentielle comme la réciproque du log).

1.2 Contexte curriculaire

Une progression relativement conforme au point de vue historique pourrait être :

1. puissances fractionnaires
2. dérivée et calcul intégral
3. définition du logarithme naturel comme primitive de la fonction inverse s'annulant en 1
4. définition de l'exponentielle comme réciproque du logarithme

C'était d'ailleurs le chemin choisi de 1967 jusqu'à l'an 2000, cf. [1] p.6. Ceci dit, cette progression demandait d'admettre des résultats du côté du calcul intégral (comme l'existence de primitives) et peut sembler un bien grand détour pour "simplement étendre" les puissances de nombres fractionnaires aux puissances de nombres réels, mais elle permet de faire apparaître de manière assez naturelle la base e. Un deuxième axe suggéré par le Problème de Florimond de Beaune consiste à introduire l'exponentielle comme la solution d'une EDO. Ce qui ne semble pas spécialement "élémentaire" non plus.

On peut imaginer essentiellement [2] trois voies pour l'introduction théorique de la fonction exponentielle au lycée :

— solution de l'EDO $f' = f$ et $f(0) = 1$, appelons cette approche [EDO]
— solution dérivable de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)f(y)$ satisfaisant $f'(0) = 1$, appelons cette approche [Puissances],
— réciproque du logarithme naturel.

La dernière voie n'est a priori plus possible depuis que l'exponentielle est passée en classe de première, les logarithmes étant vus en terminale (ainsi que le calcul intégral). La solution privilégiée par le programme est la voie [EDO].

2. Voir notamment [1] pages 5 et 47.

- **Fonction exponentielle**

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.
- Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $((1 + \frac{1}{n})^n)$.

Approfondissements possibles

- Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

L'étude de la fonction exponentielle selon la voie [EDO] demande certaines connaissances présentes dans d'autres parties du programme de 1ère en Analyse : notion de nombre dérivé, fonction dérivée et théorèmes, suites géométriques mais aussi des connaissances anciennes de seconde : fonction, graphe d'une fonction, variations d'une fonction ... Ainsi, dans la pratique, l'introduction de la fonction exponentielle ne peut être proposée qu'après ces apprentissages longs et compliqués et devrait se situer dans les programmations au 3ème trimestre.

Quelle que soit la voie choisie, [EDO] ou [Puissances], il y a des difficultés conceptuelles importantes, certaines liées à l'organisation des programmes en France.

Difficultés identifiées dans la voie [EDO] :

— l'inconnue est une fonction, c'est quelque chose de nouveau,

— la démonstration de l'existence n'est pas vraiment à la portée d'un élève de première. Voir appendice C pour une approche rigoureuse via la méthode d'Euler.

— la motivation n'est pas évidente a priori : pourquoi s'intéresser à cette équation ?

Difficultés identifiées dans la voie [Puissances] :

— une première partie implicite est la construction des puissances fractionnaires de nombres réels, point qui semble aujourd'hui étrangement absent des programmes

— pour construire les puissances réelles de nombres réels, il faut s'aventurer dans la compréhension de ce que sont les nombres réels et la manière dont on peut les approcher avec des rationnels[3]

— pour arriver à l'exponentielle, il faut justifier la base e, et c'est là qu'on peut distinguer la solution dérivable de l'équation fonctionnelle, vérifiant $f'(0) = 1$, ce qui semble assez artificiel.

3. Voir par exemple http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log_exp.pdf

Pour finir cette section, remarquons que nous nous sommes posé la question de ce choix institutionnel de proposer l'étude de l'exponentielle en 1ère et non plus en terminale comme cela se faisait dans les programmes antérieurs. Dans le programme, on peut relever la justification suivante :

« Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution. »

Au passage, on remarque que l'exemple de la dilution qui est à la base de l'activité présentée en section 2.2 est ici explicite, mais dans la liste détaillée cet exemple disparait : ne restent que la radioactivité et le calcul d'intérêts, qui semblent pourtant moins pertinents. En effet, la radioactivité est un concept physique trop compliqué pour se prêter à autre chose qu'une acceptation docile du modèle, et le calcul d'intérêts est en général traité de manière discrète.

2 Quelques situations

Dans la suite, nous présentons une tâche de modélisation menant à l'introduction des fonctions puissances , donc liée à la voie théorique [Puissances], une autre tâche de modélisation pouvant permettre de préparer la voie [EDO] et une tâche algébrique et graphique dans l'esprit [EDO], mais ne motivant pas la formation de l'EDO.

2.1 Equation fonctionnelle : croissance d'une population de bactéries, selon Mariza Grand'henry-Krysinska et Maggy Schneider-Gilot

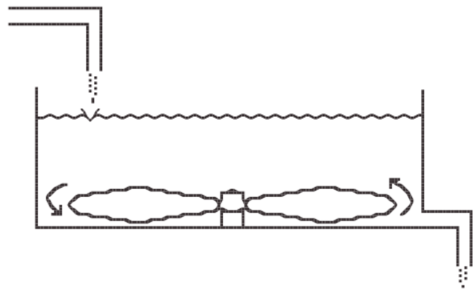
Cette activité [3] permet d'introduire la fonction exponentielle en base 2 par une modélisation en lien avec l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$. Une situation similaire est présentée dans [5] qui est mentionnée dans [1].

2.2 [EDO] : dilution saline, selon Marc Rogalski

Cette situation d'introduction consiste en la modélisation de la dilution d'une solution saline à volume constant et à concentration homogène, qui mène à une équation différentielle de type $f' = -Cf$ avec C constante. Cette activité est notamment mentionnée dans [1]. On peut en trouver une variante dans le livre [7], chapitre 3. Elle a fait l'objet de deux articles, [6] et [4].

Florence a expérimenté cette tâche dans sa classe de Terminale, spé Maths.

2.2.1 Enoncé



Un bassin contient 100 litres d'eau salée, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/min, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/min. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?

2.2.2 Plan prévu de la séance

- Phase 1 : individuelle appropriation du problème : 5-10 min
- Phase 2 : en groupe de 4 élèves avec trace écrite de la recherche : 30 minutes. Aide : à la discrétisation : deux expériences de pensée envisagée (EP1 et EP2),
  - EP1 : arrêt robinet d'eau pure au début de la min, laisse couler le robinet de vidange pendant une minute puis complète de façon instantanée avec 10L d'eau pure (concentration en sel constante)
  - EP2 : arrêt de la vidange pendant une minute (la quantité de sel est constante) puis vidange instantanée.
- Phase 3 : synthèse Hypothèses de travail (EP1 , EP2) ; modélisation mathématique ; validité du résultat : modèle discret peu réaliste ?, nature continue de la situation ; améliorer le résultat donc passage au continu : 15 min
- Phase 4 : recherche par groupe puis collective. Description plus précise avec un nouveau modèle continu plus conforme à la réalité : 20 min

2.2.3 Détails

Entre deux instants $t_1 < t_2$ le volume V d'eau contenu dans le bassin ne change pas (100 litres avec les condtions numériques de l'énoncé) puisque débit entrant et sortant sont identiques. Par contre, la quantité de sel présente dans le bassin diminue puisqu'on enlève de l'eau salée, et qu'on rajoute de l'eau pure. Notons $S(t)$ la quantité de sel contenue dans le bassin à l'instant t. Entre t_1 et t_2, la quantité de sel perdue est $S(t_1) - S(t_2)$. Dans cet intervalle de temps, le volume d'eau salée retiré vaut $V_r = D(t_2 - t_1)$, où D est le débit (10 litres par minute dans l'énoncé). La quantité de sel retirée dans ce volume est égale à la concentration de sel dans ce volume multipliée par V_r. La concentration de sel dans ce volume n'est pas évidente[4] à exprimer à partir de la fonction S,

4. Il s'agit en fait de la moyenne de la concentration de la solution évacuée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, mais l'intégrale n'est pas encore disponible.

mais si on fait l'hypothèse que le bassin est toujours homogène[5], il est naturel de supposer que la concentration de sel dans ce volume est comprise entre la concentration de sel dans le bassin à l'instant t_1 et la concentration de sel dans le bassin à l'instant t_2. Notons $C(t)$ la concentration de sel dans le bassin à l'instant t. On a donc :

$$C(t_2)V_r \leq S(t_1) - S(t_2) \leq C(t_1)V_r \tag{1}$$

La borne de droite correspond en fait à EP1 : en arrêtant le robinet d'eau pure entre t_1 et t_2, la concentration en sel entre ces deux instants reste constante dans le bassin. La borne de gauche correspond à EP2 : la vidange instantanée est effectuée à un moment où la concentration dans le bassin est égale à $\frac{S(t_1)}{V+V_r}$, ce qui donne une perte de sel égale à $S(t_1)\frac{V_r}{V+V_r}$, or

$$S(t_1) - S(t_2) \geq S(t_1)\frac{V_r}{V + V_r} \iff S(t_1) - S(t_2) \geq C(t_2)V_r \ .$$

On obtient donc à partir de (1)

$$C(t_2)D(t_2 - t_1) \leq S(t_1) - S(t_2) \leq C(t_1)D(t_2 - t_1)$$

ou encore :

$$S(t_2)(t_2 - t_1)\frac{D}{V} \leq S(t_1) - S(t_2) \leq S(t_1)(t_2 - t_1)\frac{D}{V} \tag{2}$$

En faisant tendre t_2 vers t_1, ou l'inverse, on obtient la continuité de S (en supposant que C est bornée, ce qui est "physiquement évident"). Puis en divisant par $(t_2 - t_1)$ et en faisant tendre à nouveau t_2 vers t_1 ou l'inverse, on obtient, à l'aide du théorème des gendarmes (non connu à ce stade-là mais facile à accepter pour les élèves) que S est dérivable et que

$$S'(t) = -S(t)\frac{D}{V} \ . \tag{3}$$

2.2.4 Premier bilan de la séance par Florence

La phase 1 a duré 10 min : des élèves ont demandé d'avoir plus de temps que les 5 minutes prévues.

La phase 2 : j'avais constitué 5 groupes de 4 ou 3 élèves. Certains groupes ont démarré assez vite d'autres ont mis plus de temps mais se sont finalement engagés dans une procédure. 2 groupes ont utilisé EP1, 1 groupe a utilisé EP1 et EP2(l'élève a eu du mal à faire partager son point de vue, j'ai dû intervenir pour qu'il développe sa méthode) d'ailleurs sa méthode n'apparaît pas dans le CR du groupe. 2 groupes voulaient trouver la fonction de type exponentielle mais se sont finalement résignés à utiliser une discrétisation du type EP1. Dans tous les groupes j'ai du intervenir pour faire verbaliser le type de modèle : robinet eau pure ou vidange fermé et j'ai proposé l'autre. Tous les groupes ont voulu passer à la seconde pour diminuer l'erreur. Cette phase a duré 40 minutes

La phase 3 : durée 20 minutes : passage d'un groupe type EP1 puis élève EP2 et après ? Des élèves se seraient contentés de l'approximation en passant à la seconde, d'autres se disent qu'une fonction ce serait mieux.

La phase 4 : je ne les ai pas laissés chercher, je ne savais pas vraiment comment leur donner une piste. J'ai donc fait un travail collectif où ils ont peu participé... j'ai passé sous silence la continuité

5. Ce qui est une idéalisation, qui correspond à l'hypothèse d'une homogénéisation instantanée du bassin.

et la dérivabilité. Ils ont été étonnés de la simplicité de l'équation différentielle trouvée. Cette phase a duré 20-25 minutes.

Equation à résoudre pour la séance suivante. Ils ont estimé que la réponse est très proche de celle trouvée avec EP1 à la seconde.

Ils ont trouvé le problème intéressant mais dur ils m'ont dit qu'ils n'auraient pas pu trouver seuls l'équation différentielle.

Conclusion personnelle : très bon problème après les équations différentielles et avant le calcul intégral. La phase 4 est à améliorer dans sa mise en œuvre. . .

2.2.5 Bilan

L'obtention de l'EDO (3) n'est pas naturelle pour les élèves : rien n'indique qu'il soit plus facile de répondre à la question initiale après avoir obtenu cette EDO. Par contre, l'encadrement (2) est extrêmement efficace pour obtenir numériquement une réponse aussi proche que l'on souhaite à la question posée initialement. Cet encadrement correspond en fait à un pas de la méthode d'Euler explicite (à droite) et implicite (à gauche), cf. appendice C. On s'attend à ce que les élèves choisissent EP1 ou EP2 et ne formalisent pas spontanément le côté approximatif du résultat obtenu. A la fin de la phase 3, on peut amener les élèves à obtenir l'encadrement (2). Par contre, l'obtention de l'EDO (3) n'est pas naturelle au niveau de la classe de première avant l'introduction de l'exponentielle, donc à ce niveau, et si cette tâche est utilisée pour introduire la fonction exponentielle, il est probablement préférable que l'enseignant prenne la main en expliquant qu'il va montrer que la solution et sa dérivée satisfont une relation remarquable.

La question de la place de cette situation dans le cours se pose. Son intérêt principal est double :

— "Justifier", pas complètement rigoureusement mais grâce à une expérience idéalisée, l'existence d'une fonction f vérifiant $f' = Cf$ avec C une constante,

— Effectuer un travail de modélisation significatif : il y a un travail de mathématisation non négligeable permettant de réinvestir les suites géométriques et la possibilité d'avoir plusieurs modèles (via EP1, EP2 puis la solution de l'EDO).

Le premier point suggère de l'utiliser en introduction, mais sa richesse et son aspect modélisation peut aussi amener à lui préférer une activité plus intra-mathématique comme tâche d'introduction, afin d'éviter une certaine "dispersion cognitive". Ceci a justifié la mise au point de l'activité suivante.

2.3 [EDO] : une introduction algébrique et graphique

L'objectif est de proposer une activité investissant fortement le registre graphique autour de la recherche d'une fonction qui serait égale à sa dérivée (ou à un multiple de sa dérivée), amenant les élèves à la forme nécessaire du graphe d'une telle fonction. Dans cette activité, on fait l'impasse sur la motivation de l'EDO. Deux versions de l'activité ont été testées, une par Damien, et une autre par Marie. Un objectif pour l'an prochain est de peaufiner cette activité.

A Organisation

Le groupe est constitué en septembre 2020 à l'initiative de Damien Jacquemoud, enseignant au lycée Frison-Roche à Chamonix.

La mise en place a pris un peu de temps, les disponibilités de chacun étant limitées. La crise sanitaire a également compliqué la donne. Néanmoins, dès le départ, il était entendu que le groupe travaillerait en partie à distance, via bbb ou zoom étant donné la distance entre Chamonix et Grenoble. Cela a compliqué l'interaction, notamment car un seul d'entre nous avait accès à une tablette permettant de remplacer un tableau noir.

Un espace a été créé sur Caseine[6]. C'est un moodle très ouvert, notamment n'importe quel enseignant du secondaire peut y accéder avec ses identifiants académiques. Le groupe a en partie fonctionné un peu comme un groupe de lecture de certains articles d'enseignement des maths. Pour pouvoir annoter collectivement les articles, nous avons ajouté Perusall sur caseine mais pour l'instant nous n'avons pas encore pleinement profité de cet outil.

B Diffusion

Une présentation du travail du groupe a été faite le 2 juillet 2021 à Autrans, lors du séminaire annuel de l'IREM de Grenoble. Lorsque les activités auront été paufinées, nuos prévoyons d'en rendre accessible une version dédiée aux enseignants sur le site de l'IREM de Grenoble.

Par ailleurs, le site Caseine est accessible de l'extérieur, ce qui permet de montrer une trace du travail du groupe à des enseignants qui seraient intéressés.

C Commentaires sur la méthode d'Euler pour $f' = f$

La méthode d'Euler est à la fois une méthode d'approximation de la solution d'une équation différentielle et une méthode permettant de prouver l'existence d'une solution. Le lien avec l'existence d'une solution en général n'est pas élémentaire (utilise Ascoli, cf. [2] p.137), mais dans le cas particulier des fonctions exponentielles, il peut être fait de manière élémentaire, en utilisant essentiellement la formule du binôme. De plus, la méthode d'Euler mène naturellement à la démonstration de la formule

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(h)$$

Quelques détails : en prenant $h \geq 0$, on note u_n (qui dépend de h, mais on omet la dépendance ds la suite) la valeur obtenue après n pas de taille $\frac{h}{n}$ de la méthode d'Euler explicite pour la résolution de $f' = f$ avec $f(0) = 1$. u_n est donc une approximation de $f(h)$. On a $u_n = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$. On note v_n l'approximation obtenue par la méthode d'Euler implicite. On a $v_n = \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{-n}$ (on suppose alors $n > h$). On peut alors procéder dans l'ordre suivant pour définir l'exponentielle :

1. u_n est une suite croissante (formule du binôme par ex.)
2. v_n est décroissante (former v_n/v_{n+1} + inégalité de Bernoulli).
3. $u_n \leq v_n$, donc les deux suites convergent.
4. $u_n/v_n = 1 - \frac{h^2}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ tend vers 1 (formule du binôme), donc les deux suites convergent vers la même limite, que l'on appelle $f(h)$.
5. Pour $h < 0$, les rôles des deux suites sont échangés, et on définit $f(h)$ par la même formule.

6. http://moodle.caseine.org/course/view.php?id=657

6. On montre que $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ pour x et y de même signe en utilisant u_n, et l'autre inégalité pour x et y de même signe en utilisant v_n. Pour x et y de signes différents, on obtient les inégalités dans l'autre sens.
7. On a ainsi l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$.
8. On montre que $1 \leq u_n \leq 1+h+h^2$ pour $0 \leq h \leq 1$ (formule du binôme), et $\frac{1}{1-h+h^2} \leq v_n \leq 1$ pour $-1 \leq h \leq 0$, ce qui implique la dérivabilité en 0 de f et $f'(0) = 1$, puis $f'(x) = f(x)$ grâce à l'équation fonctionnelle.

Dans la suite, on donne quelques détails.

C.1 Détails

La méthode d'Euler consiste à résoudre le problème suivant de manière approchée :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \tag{4}$$

en procédant par "petit pas", en partant de $x = 0$ pour utiliser la condition initiale et en approchant la dérivée par un taux de variation. Dans la suite, on prend des pas constants égaux à h/n. **Jusqu'à la section C.5 $h \geq 0$ et n entier strictement supérieur à h.**

On note y^n la solution approchée de (4). On définit alors $y^n(0) = y_0$, puis on choisit $y^n(h/n)$ en faisant en sorte que le taux de variation entre 0 et h/n soit égal à $y(0)$:

$$\frac{y^n(h/n) - y^n(0)}{h/n} = y^n(0)$$

Ce qui donne

$$y^n(h/n) = y^n(0)(1 + \frac{h}{n})$$

Et on pose que y^n est affine sur $[0, h/n]$.

Puis on recommence sur $[h/n, 2h/n]$ etc. D'où, pour k entier naturel :

$$y^n((k+1)h/n) = y^n(kh/n)(1 + \frac{h}{n})$$

Cette méthode est en fait une méthode d'Euler *explicite*. La méthode d'Euler *implicite* consiste ici à égaler le taux de variation de y^n sur $[kh/n, (k+1)h/n]$ avec la valeur de y^n à l'extrémité droite de l'intervalle. On obtient (rappelons que $n > h$ par hypothèse) :

$$z^n((k+1)h/n) = \frac{z^n(kh/n)}{1 - \frac{h}{n}}$$

Notons $u_n = y^n(h) = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$ et $v_n = z_n(h) = \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{-n}$ qui sont donc censées être des approximations de $f(h)$ dont on espère qu'elles tendent vers $f(h)$ lorsque n tend vers l'infini [7].

7. Il y a convergence uniforme sur tout compact vers f des fonctions $h \mapsto u_n(h)$ et $h \mapsto v_n(h)$, mais ici on ne parlera que de la convergence ponctuelle

C.2 (u_n) est une suite croissante

On peut utiliser la formule du binôme de Newton. Comme $h \geq 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{h}{n+1}\right)^k \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{h^k}{(n+1)^k} \end{aligned}$$

et

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{h^k}{n^k}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{(n+1)^k} \geq \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \tag{5}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n+1}{k}}{(n+1)^k} &= \frac{(n+1)\dots(n+1-k+1)}{(n+1)^k} \\ &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &\geq 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} &= \frac{n\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ce qui montre (5).

C.3 (v_n) est décroissante

En utilisant l'inégalité de Bernoulli[8] :

8. Pour tout entier $n \geq 1$ et réle $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, qui est une conséquence triviale de la formule du binôme lorsque $x \geq 0$, ce qui est notre cas ici. Sinon, peut se démontrer par récurrence

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1-h)^{n+1}n^n}{(n-h)^n(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{n+1-h}{n+1}\left(\frac{(n+1-h)n}{(n-h)(n+1)}\right)^n \\
&= \left(1-\frac{h}{n+1}\right)\left(1+\frac{h}{(n-h)(n+1)}\right)^n \\
&\geq \left(1-\frac{h}{n+1}\right)\left(1+\frac{nh}{(n-h)(n+1)}\right) \\
&= 1-\frac{h}{n+1}+\frac{nh}{(n-h)(n+1)}-\frac{nh^2}{(n-h)(n+1)^2} \\
&= 1+\frac{h^2}{(n-h)(n+1)^2} \\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

C.4 $u_n \leq v_n$

En effet,

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(1-\frac{h^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

On en déduit que (u_n) est croissante et majorée, donc converge, et que (v_n) est décroissante et minorée, donc converge.

C.5 $u_n/v_n = 1 - \frac{h^2}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ et définition de $f(h)$ pour $h \geq 0$

En utilisant la formule du binôme,

$$
\begin{aligned}
\frac{u_n}{v_n} &= \left(1-\frac{h^2}{n^2}\right)^n \\
&= 1-\frac{h^2}{n}+S
\end{aligned}
$$

avec

$$S = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-h^2}{n^2}\right)^k$$

On a, pour $n \geq 2h$,

$$\begin{aligned}
|S| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{h^2}{n^2}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} n^k \left(\frac{h^2}{n^2}\right)^k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{h^{2k}}{n^k} \\
&\leq \frac{h^4}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{2k}}{n^k} \\
&\leq \frac{h^4}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 2\frac{h^4}{n^2}
\end{aligned}$$

Une conséquence de ce résultat est que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, que l'on note $f(h)$.

C.6 $h < 0$ et définition de $f(h)$ pour $h < 0$

En notant $u_n(h) = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$ et $v_n(h) = \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{-n}$, on remarque que si $h < 0$, et en supposant $n > |h|$,

$$u_n(h) = \frac{1}{v_n(|h|)} \quad \text{et} \quad v_n(h) = \frac{1}{u_n(|h|)}$$

Donc les sections précédentes montrent que $(u_n(h))_{n\geq 0}$ est décroissante $(v_n(h))_{n\geq 0}$ est croissante, $u_n(h) \geq v_n(h)$ pour tout n et

$$v_n/u_n = 1 - \frac{h^2}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi, pour $h > 0$, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, que l'on note à nouveau $f(h)$.

C.7 $f(x + y) = f(x)f(y)$

Soient x et y deux réels. Si x et y sont de même signe, en développant $(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})$, on remarque que $u_n(x)u_n(y) \geq u_n(x + y)$. En développant $(1 - \frac{x}{n})(1 - \frac{y}{n})$, on remarque que pour n assez grand, $v_n(x)v_n(y) \leq v_n(x + y)$. En passant à la limite, on obtient que $f(x)f(y) = f(x + y)$.

Si x et y sont de signes distincts, en développant $(1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{y}{n})$, on remarque que $u_n(x)u_n(y) \leq u_n(x+y)$. En développant $(1-\frac{x}{n})(1-\frac{y}{n})$, on remarque que pour n assez grand, $v_n(x)v_n(y) \geq v_n(x+y)$. En passant à la limite, on obtient que $f(x)f(y) = f(x + y)$.

On obtient donc en toute généralité l'équation fonctionnelle : pour tous réels x et y,

$$f(x)f(y) = f(x + y)$$

Et on sait que $f(0) = 1$, en prenant la limite de $u_n(0)$. Notamment, $f(-x)f(x) = 1$, ce qui montre que f ne s'annule jamais et que $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

C.8 $f' = f$

Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en dérivant l'équation fonctionnelle en x, on obtient que pour tous x et y réels, $f'(x+y) = f'(x)f(y)$, d'où $f'(y) = f'(0)f(y)$ pour tout y. Il suffit donc de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1$. Comme, pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(x)f(y) - f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y) - 1}{y}$$

on voit que f est dérivable en x si et seulement si f est dérivable en 0. Il ne reste plus qu'à montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Or en utilisant la formule du binôme, on a,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{h^k}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} \\ &= 1 + h + \sum_{k=2}^{n} \frac{h^k}{k!} \end{aligned}$$

Or, si $|h| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{h^k}{k!} \right| &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{|h|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{|h|^k}{2^{k-1}} \\ &\leq \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{|h|}{2}\right)^{k-2} \\ &\leq \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &\leq |h|^2 \end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite, on obtient que si $|h| \leq 1$,

$$|f(h) - 1 - h| \leq h^2$$

Ce qui, en divisant par h et faisant tendre h vers 0, donne la dérivabilité de f en 0 et le fait que $f'(0) = 1$.

Références

[1] S. Alory, R. Chorlay, C. Derouet, D. Pasquerault, M. Rogalski, S. Rousse, F. Vandebrouck, and L. Vivier. Introduction de la fonction exponentielle, 2017. Brochure de l'IREM 99. Université Paris-Diderot 7, `http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS17006.pdf`.

[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* Les Ulis : EDP Sciences, 4th edition edition, 2016.

[3] Mariza Grand'Henry-Krysinska and Maggy Schneider-Gilot. Genèse du modèle eponentiel. *petit x*, pages 5–24, 2017.

[4] Nicolas Magnin and Marc Rogalski. Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale s, mise en œuvre dans la classe. *Bulletin vert de l'APMEP*, pages 17–28, 2011. https ://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA11003.pdf.

[5] Hugues Rezard. De la reproduction exponentielle au logarithme népérien. *Repères-IREM*, pages 75–90, 1994. https ://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR97100/IWR97100.pdf.

[6] Marc Rogalski. Mise en equation differentielle et mesure des grandeurs. *Repères-IREM*, pages 27–48, 2006. https ://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WR/IWR06014/IWR06014.pdf.

[7] Anthony M. Starfield, Karl Smith, and Andrew L. Bleloch. *How to Model It : Problem Solving for the Computer Age.* McGraw-Hill, Inc., USA, 1993.