POUR TOUT ENTIER n, $\sqrt{n}$ EST ENTIER OU IRRATIONNEL

Un classique à revisiter dans nos classes

Michel HENRY
IREM de Franche-Comté

Dans la foulée du théorème de Pythagore, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ devrait faire partie du bagage espéré des élèves de seconde. Qu'en est-il pour $\sqrt{n}$? Le point de départ de ma réflexion est l'article de Jean-Pierre Kahane [1] dans lequel il expliquait pourquoi, selon Platon, Théodore, le prof de maths de Théétète savait montrer l'irrationalité de $\sqrt{n}$ pour tous les n non carré parfait jusqu'à $n = 17$ et pas au-delà.

Les démonstrations qui suivent sont à la portée des élèves de Terminale et peuvent être source d'exercices de logique et d'arithmétique.

1. — L'irrationalité de $\sqrt{n}$, conséquence immédiate du lemme de Gauss

En mathématiques, le *lemme d'Euclide* est un résultat d'arithmétique élémentaire sur la divisibilité qui correspond à la proposition 32 du Livre VII des *Éléments* d'Euclide. Il s'énonce ainsi [2] :

> Lemme 1 d'Euclide : Soient b et c deux entiers. Si un nombre premier p divise le produit $b\,c$, alors p divise b ou c.

Une généralisation est donnée par le *lemme de Gauss* :

> Lemme 2 de Gauss : Soient trois entiers, a, b et c. Si c divise le produit $a\,b$ et si c est premier avec a, alors c divise b.

Nous utiliserons le lemme 3 suivant, conséquence immédiate [3] :

> Lemme 3 : Si p est un nombre premier et s'il divise a^2, alors p divise a.

1 La théorie des corps quadratiques réels dans *L'Enseignement mathématique, 1985*
2 Dans la suite si l'entier b est un diviseur du nombre a (i.e. s'il existe un entier q tel que $a = b\,q$), on écrira : b divise a ou, comme le fait Euclide : b mesure a.
3 Cette propriété se trouve aussi dans les Éléments d'Euclide (Livre VII, prop. 25) sous une forme contraposée plus générale : *Si deux nombres sont premiers entre eux, le carré de l'un est premier avec l'autre* (cf. le § II.6).

En effet, p étant premier, p et a ne peuvent avoir que p comme diviseur commun. Si p ne divisait pas a, alors p et a seraient premiers entre eux et d'après le lemme de Gauss, p divisant le produit $a \times a$, p diviserait le second facteur a ! [4]

I. 1 - $\sqrt{2}$ *est irrationnel : la crise*

A l'occasion de travaux sur la mesure commune de deux segments – notamment dans le cas fameux du côté d'un carré et de sa diagonale –, les mathématiciens grecs de l'époque antique ont semble-t-il « découvert » l'irrationalité [5]. L'histoire a retenu la légende rapportant le désarroi de la secte pythagoricienne devant l'effondrement de sa construction réductrice du monde réel en termes de nombres entiers : Hippasos de Métaponte, celui qui vendit la mèche, fut englouti par les flots [6].

L'aire du carré construit sur la diagonale d'un carré donné est double de celle de ce dernier, alors que leurs côtés ne sont pas dans un rapport exprimable avec les connaissances numériques des Anciens. Cette construction de géométrie très élémentaire est exploitée par Socrate pour amener le serviteur de Ménon au constat de sa connaissance [7].

La preuve de l'incommensurabilité entre la diagonale et le côté d'un carré peut être purement géométrique : si la diagonale et le côté étaient mesurés par une même unité (i.e. en seraient des multiples entiers), on pourrait construire un carré de côté plus petit que la moitié du précédent et qui serait mesuré par cette même unité. On peut itérer cette construction jusqu'à obtenir une longueur mesurée par une unité plus grande qu'elle ! Cette démonstration (dite par anthyphérèse [8]) met en œuvre l'opposition de nature entre les nombres (entiers), prototypiques du discret, et les grandeurs (au sens euclidien), représentatives du continu (i.e. divisibles à l'infini).

Une démonstration d'inspiration arithmétique figure dans la traduction par François Peyrard (1819) [9] des *Éléments* d'Euclide, formulée dans le cadre géométrique (Livre X, prop. 117, cf. cette démonstration donnée en annexe 1) [10].

La preuve arithmétique était déjà donnée par Aristote [11] (384-322 av. J.-C.), inspirant la

4 Le symbole ! signifie la mise en évidence d'une contradiction avec une hypothèse introduite antérieurement. Le raisonnement *par l'absurde* permet alors de conclure que cette hypothèse est fausse, ceci en admettant la non contradiction du reste de la théorie.

5 Voir Evelyne Barbin, « Nombres et grandeurs des pythagoriciens aux algébristes de la Renaissance », dans Evelyne Barbin, *De grands défis mathématiques : D'Euclide à Condorcet*, Paris, Vuibert, 2011, p. 16-17.

6 Jean Dhombres, dans *Nombre, mesure et continu*, rapporte le commentaire de Proclus (Ve siècle après J.-C.) : « *Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de formes doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants* ».

7 Dialogue du Ménon de Platon (428-347 av. J.-C.) dans lequel Socrate fait « accoucher » le serviteur d'une connaissance qu'il portait sans le savoir (la maïeutique).

8 L'anthyphérèse de deux grandeurs est la suite des quotients successifs obtenus par une application répétée de l'algorithme d'Euclide (Livre VII, prop. 2).

9 *Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*, réédité par la Librairie Blanchard, Paris, 1993.

10 Le Livre X des *Éléments* traite des grandeurs incommensurables et propose une classification à base géométrique de l'irrationalité. Malgré les Livres d'arithmétique précédents (Livres VII à IX), les nombres considérés sont des mesures entières de grandeurs. Des recherches récentes (Bernard Vitrac, *Euclide, les Éléments*, vol. 3 p. 411, PUF, 1998) semblent indiquer que cette proposition 117 ne figurait pas dans l'original des *Éléments* (IIIe siècle av. J.C.) et a été rajoutée par les premiers commentateurs avant le IVe siècle de notre ère, reprenant la démonstration d'Aristote.

11 Notamment dans *Les Premiers Analytiques*, mais il l'évoque à plusieurs reprises comme une propriété familière de son lecteur. Sa réduction à l'absurde tient au fait qu'il n'existe aucun nombre qui soit à la fois pair et impair.

démonstration traditionnelle [12] que l'on peut décomposer ainsi :

— Supposons qu'il existe un nombre rationnel α dont le carré est égal à 2. Notons que α n'est pas entier, puisque 2 ne figure pas dans la suite croissante des carrés parfaits.

— Ce rationnel α peut être représenté par une fraction irréductible a/b [13]. D'après la remarque précédente, on a nécessairement : $b > 1$.

— Conservant avec l'existence de α les propriétés des opérations arithmétiques, on a :
$$a^2 = \alpha^2\, b^2 = 2\, b^2$$

— a^2 est donc pair. Mais comme le carré de tout nombre impair est impair (si $m = 2k + 1$, alors $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k'+1$), a est nécessairement pair : c'est le principe du tiers exclu (un nombre ne peut être à la fois pair et impair, argument d'Aristote).

— On a donc $a = 2\,a'$, d'où $4\,a'^2 = 2\,b^2$ et $2\,a'^2 = b^2$. b^2 est donc pair, ce qui, comme précédemment, montre que b est pair.

— La fraction a/b n'est donc pas irréductible puisque a et b ont 2 pour diviseur commun ! L'hypothèse que α est un nombre rationnel conduit à une contradiction, elle est donc à rejeter.

Si l'on considère le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré comme un *nombre* (que nous désignerons par $\sqrt{2}$ en application du théorème de Pythagore), ce nombre ne peut donc être rationnel. Il ne fait pas partie des nombres concevables en tant que tels par les Grecs, et pourtant il est facilement constructible en géométrie comme côté du carré construit sur la diagonale d'un carré de côté égal à une unité.

La question générale de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ pour tout n non carré parfait ne semble pas intéresser les Anciens. En tout cas, elle ne figure pas explicitement dans les *Éléments* d'Euclide. Il est curieux de constater que tous les arguments nécessaires sont rassemblés dans le Livre VII [14] (prop. 20 à 25), comme nous le verrons dans la deuxième partie de cet article.

Cependant, les cas $n = 3, 5, ..., 17$ ont été résolus séparément [15]. Pourquoi produire autant de démonstrations (que d'entiers non carrés parfaits), se ramenant de plus en plus laborieusement à des constructions géométriques, alors que l'on peut aisément démontrer la propriété générale pour tout n avec les connaissances en arithmétique de l'époque ? Il y a là une petite énigme historique [16].

I. 2 - $\sqrt{n}$ *est entier ou irrationnel*

L'irrationalité de $\sqrt{n}$ pour tout n entier non carré parfait découle directement du lemme de Gauss appliqué dans le cas particulier du lemme 3. On procède comme pour $\sqrt{2}$:

— Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel non entier. Alors il existe un couple d'entiers non nuls (a, b), premiers entre eux avec $b > 1$,

12 Première question d'écrit au CAPES interne de mathématiques en 2000.

13 Ce raisonnement suppose donc que tout rationnel peut être représenté par une fraction irréductible, conséquence de l'existence du PGCD. L'existence, l'unicité et les propriétés de la fraction irréductible égale à une fraction donnée fait l'objet des propositions 19 à 25 du Livre VII des *Éléments*. Admettons-la.

14 Bernard Vitrac (*Euclide*, *Les Éléments*, vol. 2, p. 288) indique que ce Livre VII est « *attribué à des Pythagoriciens, de l'époque précédant Archytas* » (Archytas de Tarente, 428-347 av. J.-C.).

15 Jean Dhombres (op. cit) rapporte le témoignage de Platon selon lequel Théodor de Cyrène (460-369 av. J.-C.), le professeur de Théétète, avait obtenu l'irrationalité de $\sqrt{17}$. Cf. l'annexe 2.

16 Élucidée par Jean-Pierre Kahane dans son article de *L'Enseignement mathématique*, IIe série, Tome XXXI, fascicule 1-2, janvier-juin 1985. Il y montre que : « *dans le cas* $n = 19$, *la figure est impossible à tracer* ».

tels que $\sqrt{n} = a/b$, fraction irréductible (cf. la note 12).

— Comme $\sqrt{n}$ n'est pas entier, $b > 1$, et par définition de $\sqrt{n}$, $a^2 = n\, b^2$.

— Tout diviseur premier de b serait diviseur de a^2, donc de a (lemme 3) [17] et la fraction a/b ne serait pas irréductible !

L'hypothèse *non entier et rationnel* est donc absurde, sa négation, *entier ou irrationnel*, est donc démontrée.

I. 3 - *Place du lemme de Gauss dans les Éléments*

Remarquons que nous n'avons utilisé que le lemme 3 : *si p premier divise* a^2, *alors p divise a,* que nous avons introduit comme conséquence immédiate du lemme de Gauss. Dans la progression des *Éléments* d'Euclide, le lemme de Gauss est directement issu des propriétés de la division euclidienne, mises en œuvre dans l'algorithme d'Euclide [18], voir II.2 :

> Si a et c sont premiers entre eux, le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide engendré par a et c est égal à 1. En multipliant chaque égalité de cet algorithme par b, on obtient l'algorithme engendré par $a\,b$ et $b\,c$, et le dernier reste non nul est b. Si c divise $a\,b$, c divise tous les restes successifs de cet algorithme jusqu'au dernier non nul : c divise b.

La progression d'Euclide met bien en évidence le rôle de fondement de l'arithmétique joué par la division euclidienne. La démonstration que l'on trouve dans les *Éléments* semble moins simple que la démonstration classique, car elle fait le détour par la *proposition* 20 [19], admise jusqu'ici, qui revient à prouver l'existence et l'unicité d'une fraction irréductible représentant un rationnel donné. La démonstration d'Euclide est assez belle, elle montre bien que la division euclidienne est en fin de compte seule responsable de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ quand n n'est pas un carré parfait.

2. — Les débuts de l'arithmétique dans les *Éléments* d'Euclide.

2. 1 - *La division euclidienne*

Chez Euclide, toute l'arithmétique dans **N***** repose sur cette division qui n'est pas présentée explicitement, tellement elle est *naturelle*. Du point de vue pédagogique, nous en faisons le *Théorème de la division euclidienne* :

> *Pour tout couple d'entiers non nuls (a, b) tels que $a \geq b$, il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que : $a = b\,q + r$, avec $q \geq 1$ et $0 \leq r < b$.*

Résultat obtenu simplement en retranchant b de a autant de fois q qu'il est possible. Le reste r est donc strictement inférieur à b, sinon on pourrait retrancher b de $a - b\,q$ une fois de plus [20]. Dans notre formulation modernisée, r peut être nul : c'est le cas où a est divisible par b[21].

17 On admet ici l'existence d'un diviseur premier pour tout nombre $n \geq 2$ (Livre VII, prop. 32 : *Tout nombre est soit premier soit mesuré par un certain nombre premier*). C'est par exemple le plus petit de ses diviseurs.

18 Ayant $a = b\,q + r$, avec $0 \leq r < b$, si $r \neq 0$, l'algorithme d'Euclide consiste à diviser b par r, ce qui donne un reste $r_1 < r$, puis alternativement les restes successifs entre eux, strictement décroissants, jusqu'à obtenir le dernier reste non nul δ qui est alors divisible par tous les diviseurs communs à a et b. δ est le PGCD de a et b (Livre VII, prop. 2).

19 Livre VII, prop. 20.

20 Ce terme *retranché* qui figure dans les traductions données par Vitrac des propositions suivantes, est constamment utilisé par Euclide.

21 Dans la suite, les nombres considérés sont des entiers naturels non nuls, sauf mention du contraire. Pour rester dans le cadre de l'arithmétique dans **N***, nous éviterons les écritures fractionnaires. Le mot diviseur désigne un entier strictement supérieur à 1 : d est diviseur de a non nul si il existe un quotient $q \geq 1$ tel que $a = d\,q$. Ainsi, deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseur commun.

2. 2 - *La progression dans l'arithmétique d'Euclide jusqu'au lemme de Gauss*[22]

Le premier livre d'arithmétique, le Livre VII, commence par ce que l'on appelle aujourd'hui « l'algorithme d'Euclide » (Livre VII, prop. 1)[23] :

Algorithme d'Euclide : « *Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais le [reste] précédent jusqu'à ce qu'il subsiste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux* ».

Puis il applique cet algorithme à des recherches de PGCD (prop. 2) : « *Étant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure* ».

Euclide établit ensuite quelques propriétés élémentaires des opérations arithmétiques[24] et des proportions, puis il s'intéresse particulièrement aux couples d'entiers proportionnels pour lesquels le second couple est formé par des nombres premiers entre eux que nous proposerons de rassembler sous l'appellation de *théorème d'Euclide*. Il en tire la proposition suivante :

Proposition 24 : « *Si deux nombres sont premiers avec un certain nombre, leur produit sera aussi premier avec ce même [nombre]* ».
Autrement dit : si *a* est premier avec *b* et avec *c*, alors *a* est premier avec le produit *b c*.

D'où le cas particulier qui nous intéresse :

Proposition 25 : « *Si deux nombres sont premiers entre eux, le produit de l'un d'eux* [par lui-même] *sera premier avec celui qui reste.* »
Autrement dit : si *a* est premier avec *b*, alors *a* est premier avec b^2.

Enfin, Euclide déduit de la proposition 24 la forme particulière du lemme de Gauss, utile en pratique :

Proposition 30 : *« Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent un certain [nombre] et si un certain nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un des nombres initiaux. »*
Autrement dit : si *p* premier divise *a b*, il divise *a* ou il divise *b*.

2. 3 - *Couples d'entiers en « même rapport »*

Pour comparer des grandeurs de même espèce, Euclide introduit la notion de « *raison* » comme « *une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes, suivant la quantité* »[25]. S'il ne peut donner une définition claire de cette notion de *raison* (car il s'agit en fait de rapports de nombres lorsque les grandeurs sont mesurées par une unité commune, mais aussi de rapports irrationnels par exemple celui de la diagonale d'un carré par rapport à son côté), il donne par contre une définition très précise mais sophistiquée de la propriété pour deux couples de grandeurs d'être *en même raison* (nous disons : *d'être proportionnelles*). C'est l'objet de la *théorie des proportions* développée dans le Livre V des *Éléments.*

22 On ne peut pas faire plus anachronique !
23 Les énoncés qui suivent ainsi que la numérotation des propositions sont ceux de l'ouvrage de Bernard Vitrac : *Euclide, les Éléments*, vol. 2, PUF, 1994. Pour bien apprécier la démarche euclidienne, il est bon de disposer des énoncés authentiques donnés par Euclide. Nous interpréterons cependant au besoin ces énoncés dans des formulations qui nous sont aujourd'hui plus claires et synthétiques.
24 Leurs démonstrations figurant dans les *Éléments* sont autant de mines d'exercices d'arithmétique pour les étudiants et les élèves de Terminale intéressés par l'arithmétique.
25 Dans sa traduction, Peyrard (op. cit.) utilise le terme de « raison » plus vague que celui de « rapport » figurant dans le texte de Vitrac. Cette notion de raison est introduite dans le Livre V des Éléments comme fondement de la théorie des proportions entre grandeurs, dont la construction est vraisemblablement due à Eudoxe (408-355 av. J.C.). Certains commentateurs prétendent que cette définition (Livre V, def. 3) a été rajoutée par la suite.

Transposée aux couples de nombres entiers, cette notion de *raison* correspond à leur *rapport* qu'Euclide ne définit pas. Par contre, comme pour comparer les *raisons* entre grandeurs, Euclide définit précisément l'égalité entre *rapports* de nombres (Livre VII, def. 21) :

> *Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties.*
> Ce qui signifie : $a/b = c/d$ quand il existe deux entiers p et q tels que $q\ a = p\ b$ *et* $q\ c = p\ d$.

Nous l'utiliserons plutôt sous la forme suivante, énoncée à la proposition 19 :

> *Si quatre nombres sont en proportion, le nombre produit à partir du premier et du quatrième sera égal au nombre produit à partir du deuxième et du troisième ; et si le nombre produit à partir du premier et du quatrième est égal à celui produit à partir du deuxième et du troisième, les quatre nombres seront en proportion.*
> Autrement dit : Les couples de nombres entiers non nuls (a, b) et (c, d) sont en proportion si et seulement s'ils vérifient l'égalité $a\ d = b\ c$.

Euclide énonce ainsi cette proportionnalité : « *a est à b comme c est à d* », locution qui sera symbolisée plus tard par $a : b :: c : d$. Cette notation est maintenant désuète, remplacée pour les nombres par $a/b = c/d$, mais cela suppose d'avoir défini le rationnel représenté par ces fractions, ce qui n'est pas le cas quand a, b, c, d, sont par exemple des aires ou des volumes, mais elle avait l'avantage d'être plus générale, concernant aussi bien des grandeurs que des entiers. Elle autorisait certaines pratiques et techniques de la proportionnalité entre couples de grandeurs non nécessairement commensurables et éventuellement de natures différentes : temps, longueurs, aires, volumes... dans ces cas, cette proportionnalité ne peut être exprimée en termes numériques sans une théorie de la mesure élaborée, supposant la construction des nombres réels.

Pour nous, un rationnel non nul est défini comme quotient de deux entiers (a, b) non nuls, représenté en écriture fractionnaire par a/b. Le fond de la démarche euclidienne est de remarquer que ce rationnel peut être représenté *de manière unique* par une fraction irréductible. Cela revient à montrer qu'il existe un couple unique de nombres non nuls (c, d) premiers entre eux, qui sont dans le même rapport que (a, b) [26]. L'argument essentiel est que les nombres c et d sont les plus petits nombres parmi ceux qui sont en même rapport que les nombres a et b. Il s'en suit que pour tout autre couple (x, y) dans ce même rapport, x et y sont des équimultiples des nombres c et d.

Remarquons que le résultat tire parti du lien entre la relation d'ordre naturel sur $\mathbf{N}^*$ et la relation de divisibilité. Ce lien sera finement exploité par Euclide.

2. 4 - Le *théorème d'Euclide*

a) *Les propositions d'Euclide*

Cette partie du Livre VII, qui dégage les propriétés du couple minimal d'une proportion, comprend les trois propositions suivantes :

---

26 L'existence est immédiate, il suffit de considérer le PGCD δ de a et b, obtenu par exemple par l'algorithme d'Euclide, pour exhiber le couple (c, d) : posant $a = \delta c$ et $b = \delta d$, on a bien $a\ d = b\ c$, car chaque membre vaut $cd\delta$. De plus c et d sont premiers entre eux, car s'ils avaient un diviseur commun $q > 1$, alors $q\delta$ serait diviseur de a et b, et δ ne serait pas leur plus grand commun diviseur. L'unicité, implicitement, fait l'objet de la démonstration d'Euclide.

Proposition 20, la clé de l'édifice :

Les plus petits nombres parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux mesurent ceux qui ont le même rapport autant de fois, le plus grand le plus grand et le plus petit le plus petit.

Autrement dit : si c et d sont deux entiers non nuls dans le même rapport que (a, b) tels que pour tout (x, y) dans le même rapport que (a, b) on a $c \leq x$ et $d \leq y$, alors il existe un entier q tel que $a = q\,c$ et $b = q\,d$. Ainsi, c/d est la fraction irréductible égale à la fraction donnée a/b.

Proposition 21, la bonne remarque :

Les nombres premiers entre eux sont les plus petits parmi ceux qui sont dans le même rapport qu'eux.

Si c et d sont premiers entre eux, alors pour tout (x, y) dans le même rapport que (c, d), on a $c \leq x$ et $d \leq y$.

Proposition 22, réciproque de la précédente :

Les nombres les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux sont premiers entre eux.

Si pour tout (x, y) en même rapport que (c, d), on a $c \leq x$ et $d \leq y$, alors c et d sont premiers entre eux.

b) L'énoncé du *théorème d'Euclide*

De ces trois propositions, dégageons un énoncé synthétique plus moderne, que nous appelons le *théorème d'Euclide*[27] :

Soient (a, b) et (c, d) deux couples d'entiers non nuls en même rapport. Si c et d sont premiers entre eux, alors a et b sont équimultiples de c et d.

Étant donné la fraction a/b, si la fraction c/d est une fraction irréductible égale à a/b, alors $a = c\,\delta$ *et* $b = d\,\delta$, où δ est le PGCD de a et de b.

L'existence d'une fraction irréductible égale à une fraction donnée est un résultat bien connu des élèves de collège (on peut rêver !) : *toute fraction non irréductible est simplifiable.* Mais le théorème d'Euclide apporte de plus l'unicité de la fraction réduite :

Supposons en effet que $a/b = c/d = \alpha/\beta$ avec c/d et α/β irréductibles.

D'après le théorème, c et d sont équimultiples de α et β : $c = q\alpha$ et $d = q\beta$ et comme c et d sont premiers entre eux, $q = 1$, d'où : $c = \alpha$ et $d = \beta$.

La démonstration qui figure en deux temps dans les *Éléments* est assez compliquée. L'idée est d'introduire le couple (c, d) *des plus petits entiers en même rapport* qu'un couple (a, b) donné (i. e. pour tout couple (x, y) en même rapport que (a, b), on a $c \leq x$ et $d \leq y$). Euclide en admet implicitement l'existence (en effet, il va assez de soi que tout ensemble ordonné fini admet un plus petit élément).

Il démontre d'abord la proposition 20 qui caractérise la fraction irréductible égale à une fraction (a, b) donnée. Puis il établit l'équivalence indiquée par les propositions 21 et 22 : *Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si a et b sont les plus petits nombres parmi les couples qui sont en même rapport qu'eux.* Cette équivalence permet de remplacer l'hypothèse de la proposition 20 par *a et b premiers entre eux*, ce qui donne le théorème d'Euclide.

27 Il est ainsi appelé dans certains pays étrangers.

2. 5 - *Équivalence entre le théorème d'Euclide et le lemme de Gauss*

Le lemme de Gauss est une conséquence immédiate du théorème d'Euclide :

— Supposons que c divise $a\,b$ et que c soit premier avec a.

— Il existe donc d non nul tel que $a\,b = d\,c$. a et c sont donc premiers entre eux dans le même rapport que (d, b).

— D'après le théorème d'Euclide, $d = q\,a$ et $b = q\,c$, c divise b.

Mais le théorème d'Euclide est aussi une conséquence immédiate du lemme de Gauss :

— Supposons que a et b soient premiers entre eux, en même rapport que (c, d). On a $a\,d = b\,c$.

— a divise donc $b\,c$ et d'après le lemme de Gauss, a divise c : $c = a\,q$.

— De même, comme a et b sont premiers entre eux et comme b divise $a\,d$, alors (Gauss) b divise d : $d = b\,q'$.

— Comme $a\,d = b\,c$, on a : $a\,b\,q' = b\,a\,q$, d'où $q = q'$.

— c et d sont donc des équimultiples de a et b.

2.6 - *Le lemme de Gauss dans les Éléments*

Le lemme de Gauss était donc à portée de la main. Mais Euclide a préféré sa proposition 24 (cf. 2. 2) que nous énonçons : *Si a est premier avec b et avec c, alors a est premier avec le produit b c.*

La démonstration qu'en donne Euclide fait directement intervenir la proposition 20 :

— Supposons que a et $b\,c$ ne soient pas premiers entre eux. Ils ont alors un diviseur commun $e > 1$.

— Comme e divise a et comme a est premier avec c, e est premier avec c (sinon un diviseur commun de e et c serait diviseur de a !).

— Comme e divise $b\,c$, il existe f tel que $b\,c = e\,f$. (e, c) et (b, f) sont en même rapport.

— Comme e et c sont premiers entre eux, ils sont les plus petits parmi ceux qui sont dans ce même rapport (prop. 21) et par conséquent e divise b (prop. 20). Comme e divise a, a et b ne sont pas premiers entre eux !

— a et $b\,c$ sont donc premiers entre eux.

La proposition 24 est très proche du lemme de Gauss. On le voit mieux sur la forme logiquement équivalente suivante, issue de l'énoncé contraposé :

Si a est premier avec b et si a et b c ont un diviseur commun, alors a et c ont un diviseur commun.

Cet énoncé semble plus général mais moins précis que celui de Gauss (via le théorème d'Euclide, il lui est équivalent).

En faisant $b = c$, Euclide en déduit son cas particulier (proposition 25, cf. 2. 2) : *si a est premier avec b, alors a est premier avec* b^2, et notre lemme 3 (*si p premier divise* b^2, *alors p divise b*) s'en déduit simplement par contraposition, en remarquant que si $a = p$ est premier, la négation de « p est premier avec b » est « p divise b ». C'est en effet l'objet de la proposition 29 : « *Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas* ». Car ces deux nombres ne peuvent pas avoir de diviseur commun, puisqu'un nombre premier n'en a pas d'autre que lui-même.

Euclide utilise enfin la proposition 24 pour obtenir l'énoncé particulier du lemme de Gauss:

Proposition 30 : *« Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent un certain [nombre] et si un certain nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un des nombres initiaux ».*

Si a est un nombre premier et divise le produit b c, il divise b ou il divise c.

C'est exactement la contraposée de la proposition 24, appliquée au cas où a est premier, moyennant la remarque précédente.

Les démonstrations de ces propositions de 19 à 30, figurant dans les *Éléments*, sont autant d'exercices d'arithmétique et de logique pour débutants motivés. Hélas, nos jeunes collègues n'ont sans doute pas le temps de partager ce plaisir de la découverte !

Conclusion :

L'arithmétique est un parent pauvre de l'enseignement des mathématiques dans le second degré. Si pour les collègues férus d'arithmétique cet article n'aura probablement rien de nouveau, pour tous les autres, il aura fait, espérons-nous, découvrir la démarche euclidienne développée dans le Livre VII des *Éléments*, fondée entièrement sur les propriétés de la division et de l'algorithme d'Euclide : un incontournable de la culture commune de tous les profs de maths.

Bibliographie :

Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard, réédité par la Librairie Blanchard, Paris, 1993.

Bernard Vitrac : *Euclide, les Éléments,* vol. 2, PUF, 1994.

Jean-Pierre Kahane, La théorie des corps quadratiques réels, *L'Enseignement mathématique,* II^e série, 31(1985), 85-92

Jean Dhombres, *Nombre, mesure et continu*, CEDIC-Nathan, IREM de Nantes, 1978

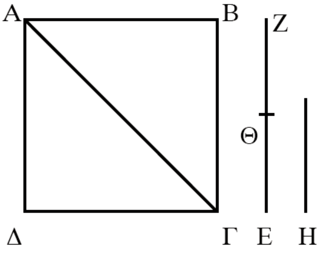
Evelyne Barbin, Nombres et grandeurs des pythagoriciens aux algébristes de la Renaissance, dans E. Barbin, *De grands défis mathématiques : D'Euclide à Condorcet*, Paris, Vuibert, 2010

Platon, *Théétète, Parménide*, traduction Émile Chambris, Paris, édition GF- Flammarion, 1967

ANNEXE 1

Démonstration par Euclide de l'incommensurabilité entre le côté d'un carré et sa diagonale, inspirée par l'argument d'Aristote[28]

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE
PROPOSITION CXVII.



Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le quarré ΑΒΓΔ et que ΑΓ soit sa diagonale ; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec AB.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair.

Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de AB ; mais ΑΓ est commensurable avec AB ; la droite ΑΓ a donc avec la droite AB la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Que ΑΓ ait avec AB la raison que le nombre EZ a avec le nombre H, et que les nombres EZ, H soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux ; le nombre EZ ne sera pas l'unité. Car Si EZ était l'unité, à cause que EZ a avec H la raison que ΑΓ a avec AB, et que ΑΓ est plus grand que AB, l'unité EZ serait plus grande que le nombre H, ce qui est absurde ; EZ n'est donc pas l'unité ; EZ est donc un nombre.

Et puisque ΑΓ est à AB comme EZ est à H, le quarré de ΑΓ sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H.

Mais le quarré de ΑΓ est double du quarré de AB ; le quarré de EZ est donc double du quarré de H ; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair ; car s'il était impair, son quarré serait impair ; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair ; le nombre EZ est donc un nombre pair.

Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entre eux. Mais le nombre EZ est pair ; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entre eux, seraient mesurés par deux ; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre H n'est donc pas un nombre pair ; il est donc impair.

Mais EZ est double de EΘ; le quarré de EZ est donc quadruple du quarré de EΘ. Mais le quarré de EZ est double du quarré de H ; le quarré de H est donc double du quarré de EΘ ; le quarré de H est donc pair ; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit. Mais il est aussi impair, ce qui est impossible ; la droite ΑΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec AB ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

28 Reproduite à partir de l'édition des *Éléments* d'Euclide par la librairie Blanchard, dans la traduction et les notations de François Peyrard (1819).

ANNEXE 2

Extrait du Théétète de Platon[29]

THÉÉTÈTE

Exposée comme tu viens de le faire, Socrate, la question me paraît facile. Il me semble qu'elle est du même genre que celle qui s'est présentée à nous l'autre jour, comme nous causions, ton homonyme Socrate, que voici, et moi.

SOCRATE

Quelle est donc cette question, Théétète ?

THÉÉTÈTE

Théodore que voici nous avait tracé quelques figures à propos de racines et nous avait montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, pour la longueur, commensurables avec celle d'un pied, et, les prenant ainsi, l'une après l'autre, il était allé jusqu' à celle de dix-sept pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là. Il nous vint alors à l'esprit, en considérant que les racines sont en nombre infini, d'essayer de les rassembler sous un terme unique, qui nous servirait à nommer toutes ces racines.

29 Platon, *Théétète, Parménide*, édition GF- Flammarion, 1967, p. 66.