**Problème d'optimisation analyse a priori**

**Enoncé 1** : Choisir des nombres réels strictement positifs. On s'intéresse au produit de leur somme par la somme de leurs inverses. Peut-on rendre ce produit le plus petit possible ?

**Enoncé 2 :** On s'intéresse au produit de la somme de *n* nombres réels strictement positifs par la somme de leurs inverses. Pour *n* fixé, peut-on rendre ce produit le plus petit possible ?

-----------------------------------------------------------

**Pré requis** : distributivité, calcul littéral et identités remarquables **pour un élève de seconde**.

Il serait bien que les élèves puissent et sachent utiliser soit un tableur, soit un outil de programmation (logiciel/calculatrice).

**Remarques** :

1. L'énoncé 1 amène à se poser la question du nombre de nombres réels positifs considérés. Par conséquent il amène à traiter l'énoncé 2.
2. Cette analyse a priori donne également des pistes pour faire l'activité avec des élèves au niveau post bac (pré requis : les fonctions de plusieurs variables et la notion d'extrema).
3. Le résultat général se démontre par récurrence.
4. Les outils de calcul formel permettent de vérifier les calculs, ou d'éviter d'avoir à faire des calculs fastidieux.
5. Cette analyse a priori met en évidence que les élèves doivent savoir ce qu'ils cherchent. Les outils de calcul formel apportent une aide technique. Il reste aux élèves à interpréter les résultats.

## Méthodes de résolution et erreurs possibles

Les erreurs de calcul sont toujours possibles.

Les élèves vont-ils commencer avec n = 1 ou n = 2 ? Certains vont-ils essayer avec de plus grandes valeurs de n ?

Il est peu probable que les élèves choisissent des décimaux.

## Prenons n = 1 :

**Il est peu probable que des élèves choisissent n=1.**

1. Exemples :

1*1/1 = 1 ; 0,5*1/0,5 = 1 ; 10 000 * 1/ 10 000 = 1 …

2. Généralisation :

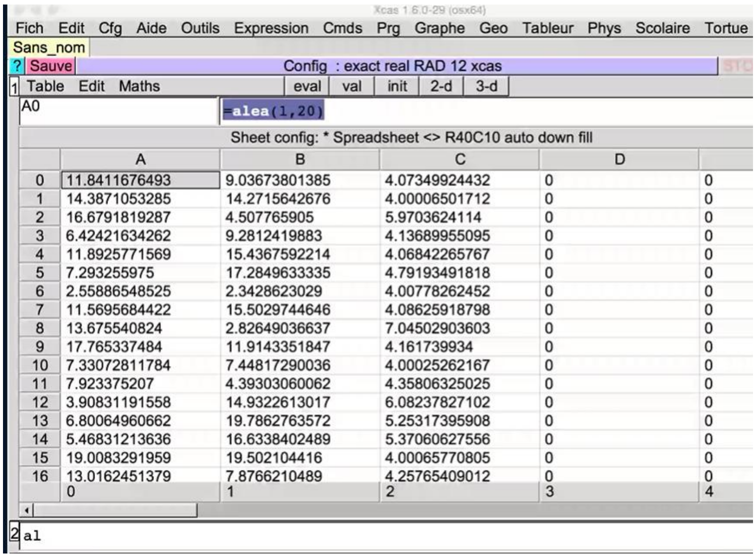
Soit a un réel quelconque positif : a*1/a = a/a = 1. Donc on a toujours 1, le produit a pour minimum 1.

**Conclusion** : pour n = 1, 1 est le minimum.

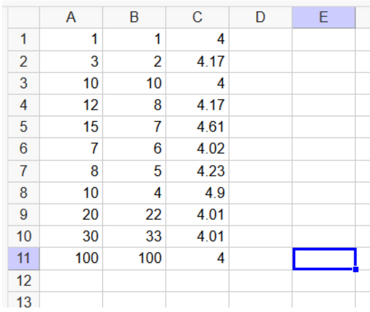
## Prenons n = 2 :

1. Les élèves peuvent essayer sur des exemples :
   - Avec la calculatrice en calculant pour quelques valeurs
   - Avec un tableur

Exemples (Xcas ou GeoGebra ou Excel) :



| | A | B | C | D | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11.8411676493 | 9.03673801385 | 4.07349924432 | 0 | 0 |
| 1 | 14.3871053285 | 14.2715642676 | 4.00006501712 | 0 | 0 |
| 2 | 16.6791819287 | 4.507765905 | 5.9703624114 | 0 | 0 |
| 3 | 6.42421634262 | 9.2812419883 | 4.13689955095 | 0 | 0 |
| 4 | 11.8925771569 | 15.4367592214 | 4.06842265767 | 0 | 0 |
| 5 | 7.293255975 | 17.2849633335 | 4.79193491818 | 0 | 0 |
| 6 | 2.55886548525 | 2.3428623029 | 4.00778262452 | 0 | 0 |
| 7 | 11.5695684422 | 15.5029744646 | 4.08625918798 | 0 | 0 |
| 8 | 13.675540824 | 2.82649036637 | 7.04502903603 | 0 | 0 |
| 9 | 17.765337484 | 11.9143351847 | 4.161739934 | 0 | 0 |
| 10 | 7.33072811784 | 7.44817290036 | 4.00025262167 | 0 | 0 |
| 11 | 7.923375207 | 4.39303060062 | 4.35806325025 | 0 | 0 |
| 12 | 3.90831191558 | 14.9322613017 | 6.08237827102 | 0 | 0 |
| 13 | 6.80064960662 | 19.7862763572 | 5.25317395908 | 0 | 0 |
| 14 | 5.46831213636 | 16.6338402489 | 5.37060627556 | 0 | 0 |
| 15 | 19.0083291959 | 19.502104416 | 4.00065770805 | 0 | 0 |
| 16 | 13.0162451379 | 7.8766210489 | 4.25765409012 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

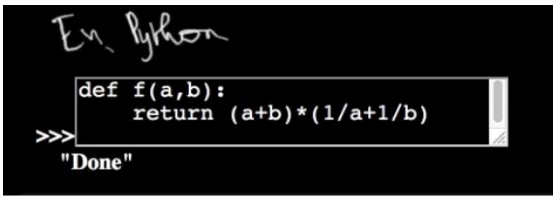


| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 4 | | |
| 2 | 3 | 2 | 4.17 | | |
| 3 | 10 | 10 | 4 | | |
| 4 | 12 | 8 | 4.17 | | |
| 5 | 15 | 7 | 4.61 | | |
| 6 | 7 | 6 | 4.02 | | |
| 7 | 8 | 5 | 4.23 | | |
| 8 | 10 | 4 | 4.9 | | |
| 9 | 20 | 22 | 4.01 | | |
| 10 | 30 | 33 | 4.01 | | |
| 11 | 100 | 100 | 4 | | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 14 | 4,023809524 |
| 3 | 17 | 7,843137255 |
| 11 | 13 | 4,027972028 |
| 13 | 20 | 4,188461538 |
| 18 | 14 | 4,063492063 |
| 18 | 14 | 4,063492063 |
| 14 | 5 | 5,157142857 |
| 5 | 6 | 4,033333333 |
| 4 | 12 | 5,333333333 |
| 17 | 6 | 5,18627451 |
| 2 | 1 | 4,5 |
| 1 | 3 | 5,333333333 |
| 12 | 4 | 5,333333333 |
| 12 | 19 | 4,214912281 |
| 8 | 3 | 5,041666667 |
| 10 | 2 | 7,2 |
| 13 | 11 | 4,027972028 |
| 9 | 9 | 4 |
| 10 | 5 | 4,5 |
| 17 | 11 | 4,192513369 |
| 8 | 15 | 4,408333333 |
| 15 | 6 | 4,9 |
| 19 | 3 | 8,49122807 |
| 4 | 8 | 4,5 |
| 15 | 2 | 9,633333333 |
| 17 | 6 | 5,18627451 |
| 9 | 19 | 4,584795322 |
| 12 | 18 | 4,166666667 |
| 17 | 2 | 10,61764706 |
| 2 | 8 | 6,25 |

- En écrivant un programme

Par exemple : Python avec Xcas



```
for j in range(1,8):
     for k in range(1,8):
          print(f(j,k))
>>>
```

4.0 4.5 5.333333333333333 6.25 7.199999999999999
8.166666666666668 9.142857142857142 4.5 4.0
4.166666666666666 4.5 4.8999999999999999
5.333333333333333 5.785714285714285
5.333333333333333 4.166666666666666 4.0
4.083333333333333 4.266666666666667 4.5
4.761904761904762 6.25 4.5 4.083333333333333 4.0 4.05
4.166666666666666 4.321428571428571
7.199999999999999 4.8999999999999999
4.266666666666667 4.05 4.0 4.033333333333333
4.114285714285714 8.166666666666668
5.333333333333333 4.5 4.166666666666666
4.033333333333333 4.0 4.023809523809524
9.142857142857142 5.785714285714285
4.761904761904762 4.321428571428571
4.114285714285714 4.023809523809524 4.0

```
> f(a,b):=(a+b)*(1/a+1/b)
```

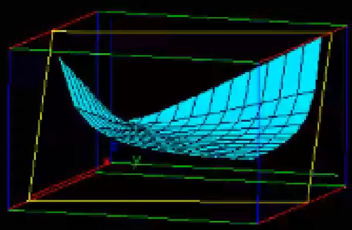
*// Interprète f*
*// Succès*
*// lors de la compilation f*
*// Succès*

$a,b \rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$

Par diverses méthodes on observe un minimum de 4

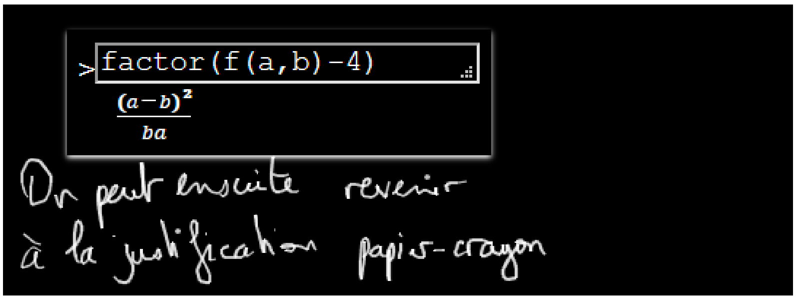
→ tableur
→ programme double boucle
→ quelques essais calculatrice
→ graphe 2d

```
> plotfunc((a+b)*(1/a+1
/b),[a=1..10,b=1..10]
,color=cyan+rempli)
```



```
> simplify(f(a,a))
```

4




- Fonction de deux variables, tableau de valeur et minimum (local), la notion de dérivée partielle n'étant pas connue des élèves au lycée.

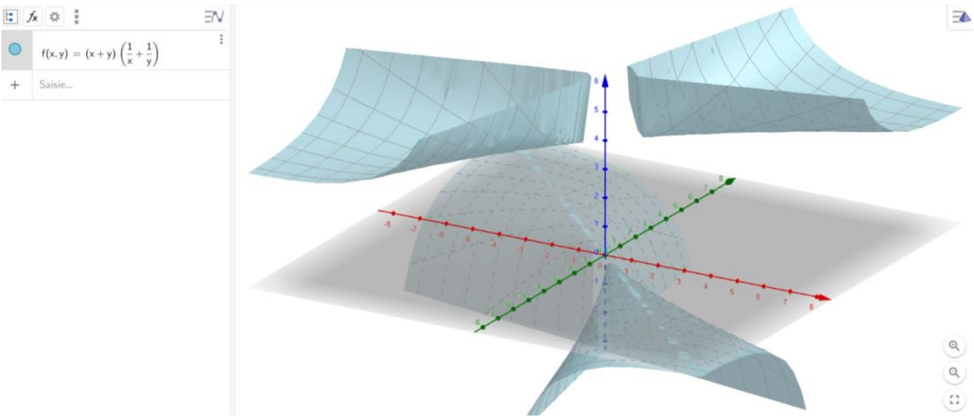
Une procédure experte peut amener à penser à écrire une fonction de deux variables et obtenir une représentation pour pouvoir faire une conjecture.
Soient (x,y) un couple de réels strictement positifs et f la fonction définie par :

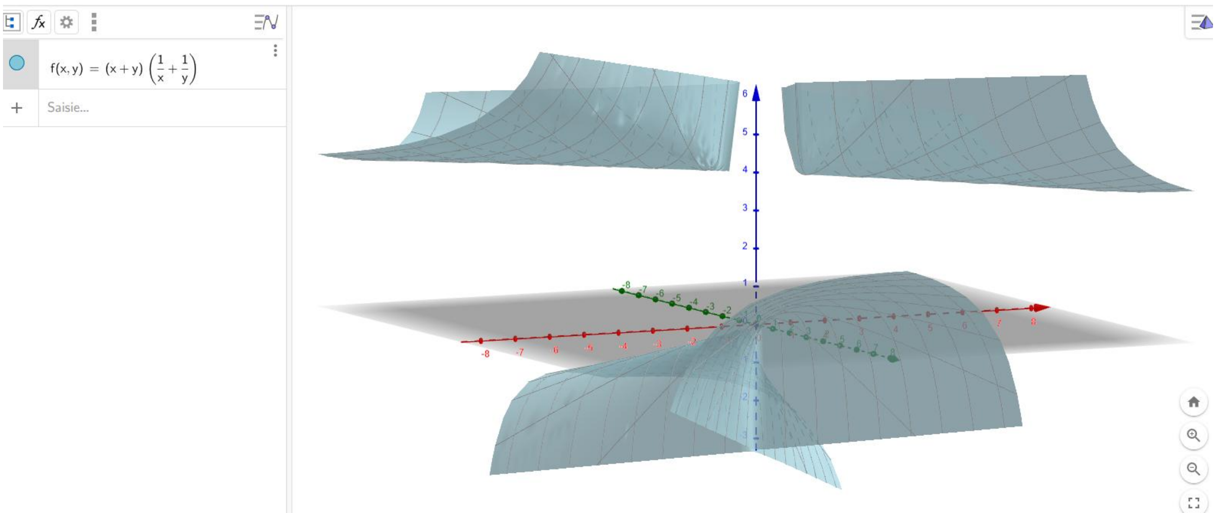
$$f(x,y) = (x + y)*(1/x + 1/y) \text{ sur } (R^{+*})^2.$$

Puis plusieurs possibilités :

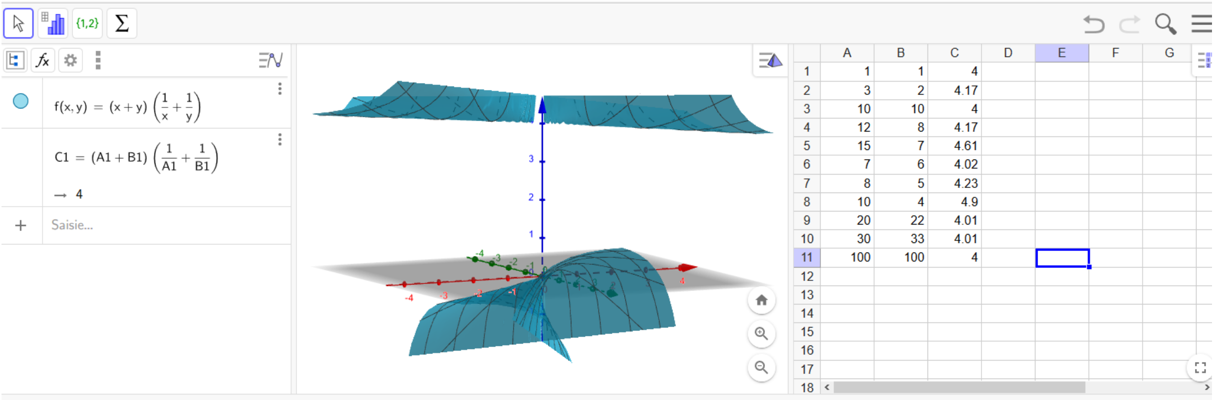
- Un tableau de valeurs d'une fonction de deux variables qu'il faut construire couple par couple. C'est plus long que d'utiliser un tableur.
- Représentation graphique 3 D avec GeoGebra

Tous les cas sont représentés, nous ne nous intéressons qu'aux valeurs de x et y strictement positives.

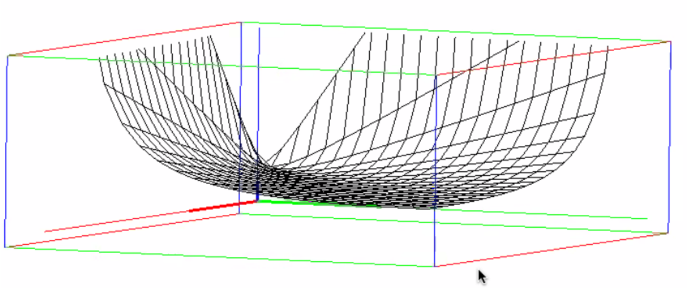


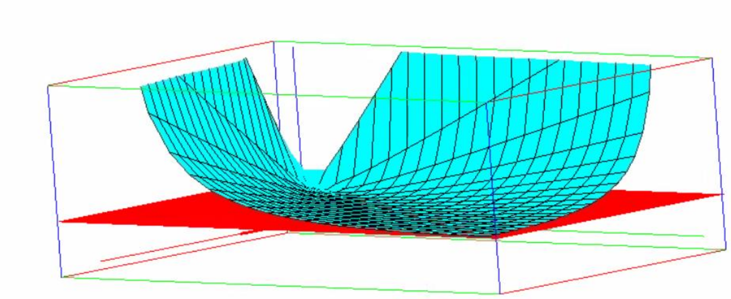



Ou des représentations multiples avec Geogebra :




- Il est aussi possible de faire une représentation 3D avec XCas pour pouvoir faire une conjecture.





2. Généralisation

Est-ce que 4 est un minimum ?
Il suffit d'un exemple où 4 est atteint.
Remarquons que si a = b alors a – b = 0 et (a + b) * (1/a +1/b) = 4.
Donc 4 est un minimum.
**Conclusion** : pour n = 2 le minimum est 4.

A partir d'un grand nombre d'exemples nous pensons que les élèves vont être capables de faire la **conjecture** suivante :

pour tout réel a et b strictement positif, ***S* = (a + b)*(1/a +1/b) ≥4.**

**Les élèves doivent démontrer leur conjecture.**

- Les élèves peuvent raisonner algébriquement.
    - Calcul formel avec GeoGebra :

2 Développer$\left((x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)$

$\rightarrow \frac{x^2+2\,x\,y+y^2}{x\,y}$

Certains élèves peuvent poursuivre en écrivant :

$(x^2 + y^2)/xy + 2xy/xy = (x^2+y^2)/xy + 2 \geq 2$ car $(x^2+y^2)/xy \geq 0$. Ou alors poursuivre en demandant une simplification :

3 Simplifier$\left(\frac{x^2+2\,x\,y+y^2}{x\,y}\right)$

$\rightarrow \frac{(x+y)^2}{y\,x}$

mais ce n'est pas ce que nous souhaitons obtenir, cette forme n'aide pas à la démonstration de la conjecture.

- Calcul formel avec Xcas

```
1 expand((a+b)*(1/a+1/b))
```

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$

L'expression est sous la forme qui nous intéresse, mais maintenant il faut interpréter a/b + b/a.

Si les élèves essaient de simplifier :

```
2 simplify(a/b+b/a)
```

$\frac{a^2+b^2}{a*b}$

Cette forme n'est pas intéressante pour nous, car elle ne permet de démontrer la conjecture.

- Calcul littéral

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- (a + b)*(1/a +1/b)
  = 1 + a/b + b/a + 1 = 2 + a/b + b/a (application de la distributivité)
  = 2 + $(a^2 + b^2)$/ab, il faut à présent minorer $(a^2 + b^2)$/ab
  = 2 + [$(a - b)^2$ + 2ab]/ab, car **$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**.
  = 2 + $(a – b)^2$/ab + 2
  = 4 + $(a – b)^2$/ab
  ≥ 4

Ou un autre raisonnement possible :

- (a + b)*(1/a +1/b)
  = 1 + a/b + b/a + 1
  = 2 + a/b + b/a

= 2 + $(a^2 + b^2)/ab$
= 2 + $[(a + b)^2 - 2ab]/ab$
= 2 + $(a + b)^2/ab - 2$, car **$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**
= $(a + b)^2/ab$
≥ 0 mais ce n'est pas intéressant pour nous car la minoration est très au-dessous du minimum.

**Remarque** : dans ce cas est produit un résultat qui est important pour la suite. Ce résultat est : **$a/b + b/a = (a^2 + b^2)/ab = [(a - b)^2 + 2ab]/ab = (a - b)^2/ab + 2 \geq 2$, donc $a/b + b/a \geq 2$**.

- Autre méthode :

L'étude du minimum se ramène à l'étude du signe de la différence grâce à une factorisation :
$S \geq 4 \Leftrightarrow S - 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \geq 0$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ car $ab \geq 0$

**Remarque** : cette méthode est intéressante car l'étude d'un extremum se fait souvent en se ramenant à **comparer le signe d'une différence**.

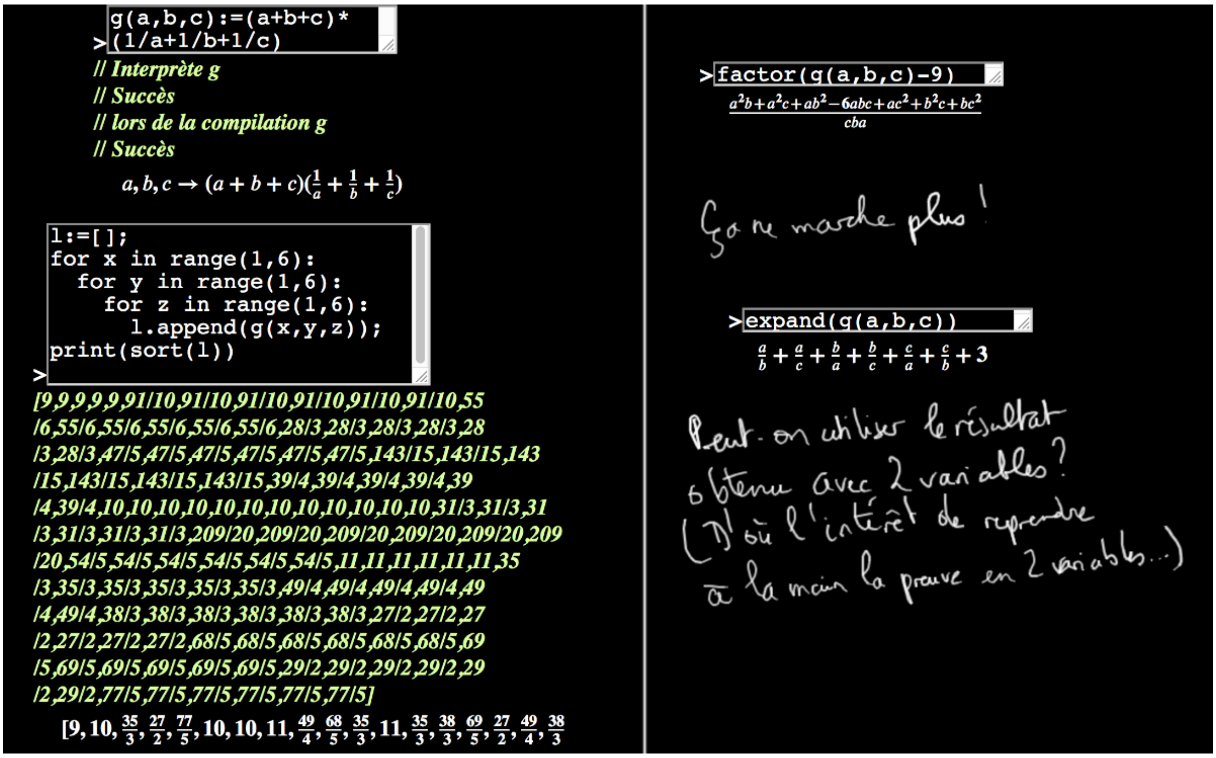
## Prenons n = 3

1. Travail sur des exemples :
    - Avec la calculatrice
    - Avec tableur (Excel ou GeoGebra) ou Xcas

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0.5 | 10 | |
| 2 | 3 | 2 | 5 | 10.33 | |
| 3 | 10 | 10 | 10 | 9 | |
| 4 | 12 | 8 | 20 | 10.33 | |
| 5 | 15 | 7 | 50 | 16.53 | |
| 6 | 7 | 6 | 30 | 14.74 | |
| 7 | 8 | 5 | 10 | 9.78 | |
| 8 | 10 | 4 | 5 | 10.45 | |
| 9 | 20 | 22 | 0.5 | 89.06 | |
| 10 | 30 | 33 | 3 | 26.2 | |
| 11 | 100 | 100 | 50 | 10 | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |
| 14 | | | | | |

    - En effectuant un programme

Exemple : avec Xcas




- Fonction avec 3 variables, tableau de valeurs et minimum (local), la notion de dérivée partielle n'étant pas connue des élèves au lycée.

Nous ne développons pas ce point.

2. Généralisation avec l'algèbre :

A partir de l'observation d'un grand nombre d'exemples, les élèves doivent pouvoir formuler la **conjecture** suivante :

pour tout réel a,b,c strictement positif **(a + b + c)*(1/a +1/b +1/c) ≥ 9**

et essayer de la démontrer.

- Calcul littéral

**1ère possibilité :**

(a + b + c)*(1/a +1/b +1/c)

= 1 + a/b +a/c + b/a + 1 + b/c + c/a + c/b + 1

= 3 + **(a/b + b/a)** + (a/c + c/a) + (b/c + c/b)

pour la partie en rouge nous avons vu pour n = 2 que : **(a/b + b/a) = (a – b)²/ab + 2**

= 3 + **(a - b)²/ab + 2** + (a - c)²/ac + 2 + (b – c)²/bc + 2 en généralisant le résultat en rouge c'est que nous obtenons.

= 9 + (a-b)²/ab + (a-c)²/ac + (b – c)²/bc

≥ 9

Donc pour n = 3, 9 est le minimum car 9 est atteint pour certains exemples.

**Conclusion** : pour n = 3 le minimum est 9.

**2ème possibilité :**

(a + b + c)*(1/a +1/b +1/c)

= 1 + a/b +a/c + b/a + 1 + b/c + c/a + c/b + 1

= 3 + ($a^2c + a^2b + b^2c + b^2a + c^2b + c^2a$)/abc

≥ 3

Cette écriture ne permet pas d'obtenir le minimum.

- Utilisation d'une calculatrice permettant de faire du calcul formel
- Utilisation du calcul formel avec GeoGebra

1 Développer$\left( (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$

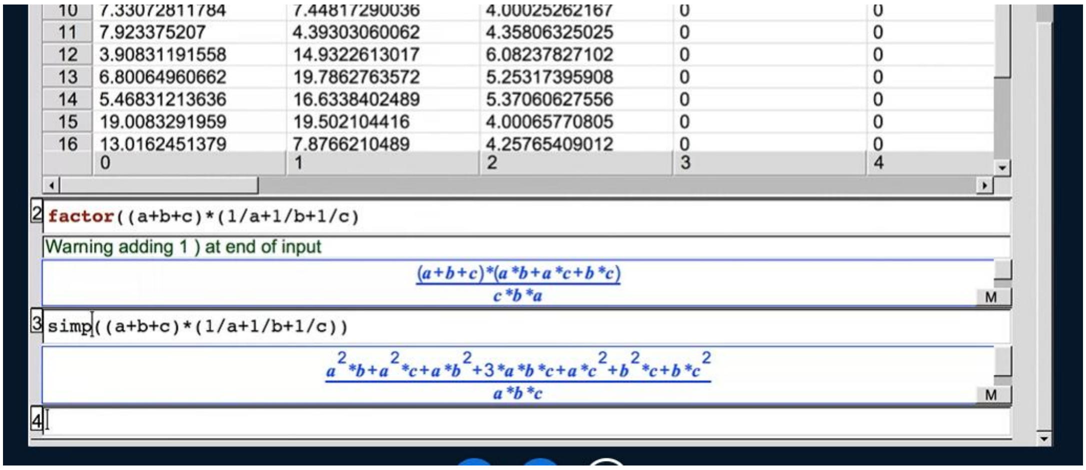
$$\rightarrow \frac{a^2\, b + a^2\, c + a\, b^2 + 3\, a\, b\, c + a\, c^2 + b^2\, c + b\, c^2}{a\, b\, c}$$

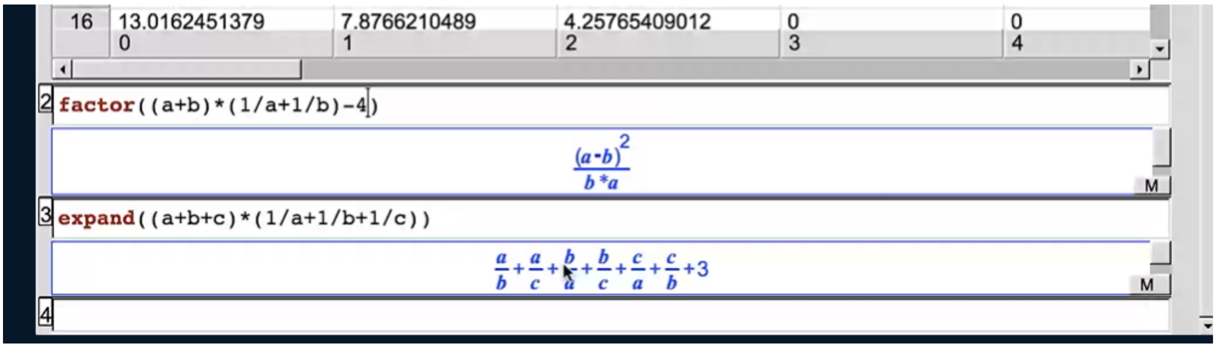
Simplifier$\left(\frac{a^2\, b + a^2\, c + a\, b^2 + 3a\, b\, c + a\, c^2 + b^2\, c + b\, c^2}{a\, b\, c}\right)$

$$\rightarrow (a+b+c)\, \frac{a\, b + a\, c + b\, c}{c\, b\, a}$$

Mais ce n'est pas ce que nous voulons car ces écritures ne permettent pas de prouver la conjecture.

- Calcul formel avec Xcas :






La fonction « expand » est pertinente par rapport à la résolution du problème.

## Pour n quelconque, fixé.

Faire une conjecture à partir de n = 1, n = 2 et n = 3.
Remarquer que pour tout réel strictement positif a,b,c nous avons obtenu:

- n = 1 : a * 1/a ≥ 1 = $1^2$ ;
- n = 2 : (a + b)*(1/a +1/b) ≥ 4 = $2^2$ ;
- n = 3 : (a + b + c)*(1/a +1/b +1/c) ≥ 9 = $3^2$ ;

….
Si les élèves n'arrivent pas à émettre une conjecture leur demander de raisonner avec n = 4.

**Conjecture** : pour tout n entier positif fixé, et les réels positifs a1, … , an, nous avons :
**(a1 + …. + an) * (1/a1 + … + 1/an) ≥ $n^2$**

**Démonstration par récurrence :**
**Pour n = 1 :**
Soit a un réel quelconque positif : a*1/a = a/a = 1. Donc on a toujours 1, le produit a pour minimum 1.
**Conclusion** : pour n = 1, $1^2$= 1 est bien le minimum.

Supposons la conjecture vraie au rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang n + 1.

(a1 + …. + an + an+1) * (1/a1 + … + 1/an + 1/an+1)
= [(a1 + …. + an) + an+1] * [(1/a1 + … + 1/an) + 1/an+1]
= (a1 + …. + an) * (1/a1 + … + 1/an) + (a1 + …. + an )*1/an+1 + an+1 * (1/a1 + … + 1/an) + an+1 * 1/an+1
≥ $n^2$ + **(1/a1 + … + 1/an)* 1/an+1 + (a1 + …. + an)*1/an+1 + an+1 * (1/a1 + … + 1/an)** + 1 nous utilisons le même raisonnement que pour n = 3,
c'est-à-dire que nous utilisons l'inégalité **a/b + b/a ≥ 2** **n fois** pour écrire la ligne suivante.
≥ $n^2$ + **2n** + 1 = $(n + 1)^2$.

Donc nous avons démontré que la conjecture est vraie au rang n+1.
Donc la conjecture est démontrée.