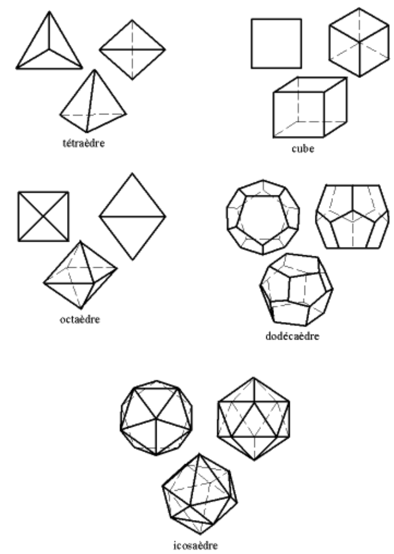
Groupe « modélisation » de l'IREM de Grenoble

Roland Bacher,
Léa Cartier,
Denise Grenier,
Marie-Jo Schmitt



Autour des polyèdres de Platon

Le groupe « modélisation » travaille depuis plusieurs années à la construction et l'analyse de situations pour la classe (c'est-à-dire de problèmes et leur mise en scène) dans lesquelles l'aspect modélisation, en particulier la modélisation intra-mathématique, est présent soit pour la résolution du problème, soit comme activité propre.

Nous avons étudié, par exemple, des jeux mathématiques pour différents niveaux scolaires, mais également des problèmes dans lesquels le graphe est un outil de modélisation et de preuve.

Nous vous présentons ici une réflexion autour des polyèdres réguliers, à la fois mathématique et didactique, qui a donné lieu à une activité en classe de seconde, avec matériel de construction (barres et billes magnétiques ou pâte à modeler et cure-dents). Ce texte est préliminaire à une publication plus détaillée et fournie qui reprendra les différents points de vue abordés ici.

Cet ensemble de documents comprend :

1. une introduction à la problématique des polyèdres réguliers dans l'enseignement

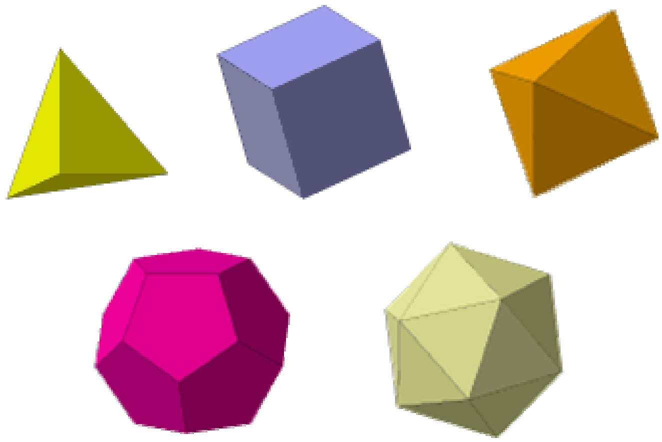
2. un compte-rendu d'une séance de recherche d'élèves de seconde d'un lycée de Haute-Savoie, basée sur l'étude précédente

3. une ébauche d'étude mathématique des polyèdres de l'espace

4. En bonus : les énoncés étudiés lors d'un stage de formation continue pour les enseignants « le graphe comme outil de modélisation et de preuve », contenant un problème reliant graphes et polyèdres

1. Les polyèdres réguliers dans l'enseignement

Les **5 polyèdres réguliers** de l'espace, dits polyèdres de Platon, sont respectivement le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre :



Les polyèdres, en particulier les polyèdres réguliers, sont présents dans l'enseignement dans les chapitres de géométrie dans l'espace. Pourtant, il semble qu'ils soient rarement étudiés en tant que tels. Un certain nombre de manuels proposent des activités spécifiques aux polyèdres réguliers, accompagnées parfois de la formule d'Euler, ou élargies aux polyèdres archimédiens (polyèdres réguliers tronqués).

Une activité « originale » sur les polyèdres réguliers
Notre groupe a construit une activité sur les polyèdres réguliers, adaptable à différents niveaux (dès la quatrième jusqu'en terminale, ou même à l'université), qui permet, tout en restant proches des programmes du secondaire, d'étudier en particulier :

- les liens entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre (formule d'Euler),
- les positions relatives des plans déterminés par les sommets ou les faces d'un polyèdre,
- le lien entre construction de polyèdres et pavages,
- les notions de régularité, de rigidité, de co-planarité, ou encore de convexité.

Il permet aussi, voire il nécessite, un travail dans le plan, sur les polygones et leurs angles.

Le rôle du matériel et de la construction effective dans cette activité
La situation pour la classe que nous avons développée est basée sur un matériel spécifique : arêtes et billes aimantées, ou plus simplement tiges de bois (cure-dents par exemple) et pâte à fixer (pour ne pas citer le nom de la marque associée).
Ce matériel permet, entre autre, de :

- Faciliter l'entrée des élèves dans les questions de **définition et caractérisation des polyèdres réguliers de l'espace**
- **Visualiser** des éléments difficiles à repérer avec papier/crayon, en particulier **les positions respectives des faces, des sommets, le parallélisme des plans**, etc.

2. Compte-rendu d'une séance de recherche d'élèves de seconde

Notre situation a été réalisée dans une classe de seconde du lycée Charles Poncet à Cluses. Nous décrivons ci-dessous de manière succincte le déroulement de la séance. Les élèves ont travaillé en groupes.

Consigne de départ : Construire des polyèdres réguliers

Première étape : Qu'est-ce qu'un « polyèdre régulier » ? Vers la construction d'une définition

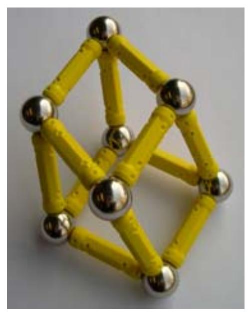
Les consignes, les réponses du professeur et ce qu'il montre aux élèves sont bordés de noir, les réponses et réflexions des élèves sont données en rouge, nos propres remarques sont *en italique*.

- Confusion des termes polyèdre et polygone.

  Un polyèdre est un solide de l'espace.
- Les faces sont planes.

  Ni sphère, ni cylindre.
- Les arêtes sont égales.

  Le cube déformé (un rhomboèdre « pas trop » régulier) ne convient pas.

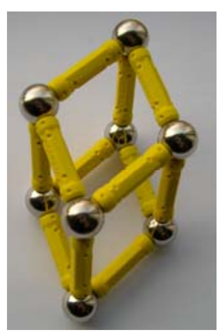


Le matériel de construction est distribué aux élèves : le distribuer plus tôt aurait pu induire les propriétés précédentes.

- Les faces sont superposables

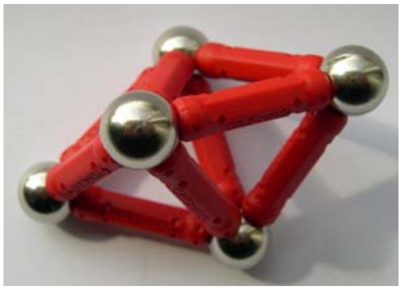
Le professeur exhibe un exemple de polyèdre qui ne correspond pas à ce qu'il nomme « régulier ».

Ce rhomboèdre à faces losanges superposables ne convient pas.



- Toutes les faces sont des polygones réguliers.

  Le double tétraèdre ne convient pas.



- Recherche des élèves sur ce qui ne convient pas dans ce solide.

  Quelque soit la façon dont on tourne le solide, on veut voir le même objet.
- Certains sommets sont reliés à 4 faces, d'autres à 3.

De cette réflexion naît une première caractérisation d'un polyèdre régulier :

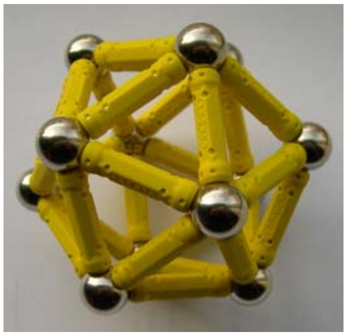
Solide de l'espace dont les faces sont des polygones réguliers superposables, les arêtes sont égales et tel que quelque soit la façon dont on tourne le solide, on veut voir le même objet.

Cette caractérisation ne contient pas explicitement la notion de convexité. La convexité est en fait « cachée » derrière la propriété : « quelque soit la façon dont on tourne le solide, on veut voir le même objet ».

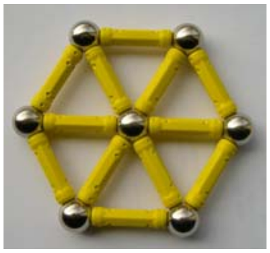
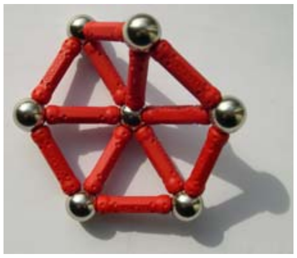
Deuxième étape : Constructions effectives de solides

Les élèves commencent par construire des solides dont les faces sont des triangles équilatéraux, en construisant successivement à partir de chaque sommet 3, puis 4, puis 5 triangles ce qui donne le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre ci-dessous.



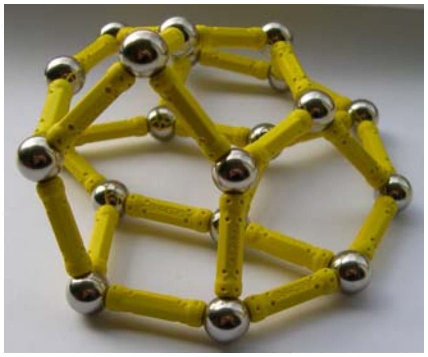


Les élèves cherchent alors à construire un solide pour lequel de chaque sommet partent 6 faces. Les formes obtenues deviennent rapidement instables, leurs courbures ayant tendance à s'inverser (photos ci-dessous).

Un tel polyèdre n'existe pas, mais le matériel semble le rendre possible (et les tiges en bois/pâte à fixer amplifient ce phénomène). Ceci amène à un travail avec papier/crayon pour invalider la possibilité d'une telle construction : puisque 6 triangles équilatéraux pavent le plan, on ne peut construire un solide avec une telle base. Un travail sur les polygones réguliers, en particulier sur le calcul des angles de ces figures permet de retourner aux polyèdres et d'exhiber les 5 solides de Platon.

Un nouveau problème de construction se pose alors avec le dodécaèdre, le 1-squelette de ce polyèdre n'étant pas rigide géométriquement et donc matériellement (figure de gauche). Une réflexion conjointe des élèves et du professeur conduit à un travail sur les degrés de liberté de chaque arête.
Un matériel complémentaire (non utilisé dans cette séance) aurait permis de rigidifier la construction précédente et donc de visualiser le dodécaèdre régulier (figure de droite).



En faisant tourner un polyèdre sur un de ses axes de symétrie, le matériel aimanté permet aussi de montrer la coplanarité de 2 sous-ensembles de sommets et le parallélisme de certains de ses plans. En voici un exemple avec l'icosaèdre :

Cette situation, qui pourrait être enrichie, nous semble d'ores et déjà utilisable en classe car elle a intéressé les élèves et s'est avérée riche du point de vue des apprentissages mathématiques.

3. Etude mathématique des polyèdres réguliers

Cette partie a été rédigée dans le but de préciser quelques concepts mathématiques autour des polyèdres réguliers. Il est condensé, ne vous découragez donc pas si certains paragraphes restent un peu difficiles, les mathématiques impliquées le sont en partie également.

I. En dimension 3 : Les 5 solides réguliers

Le tableau ci-dessous donne, d'une part, le nombre de sommets, arêtes et faces des 5 solides de Platon, et d'autre part, le nombre des isométries qui conservent chacun de ces solides.

Nom	Sommets	Arêtes	Faces	Isomorphismes
Tétraèdre	4	6	4	24
Cube	8	12	6	48
Octaèdre	6	12	8	Idem
Dodécaèdre	20	30	12	120
Icosaèdre	12	30	20	Idem

Remarques

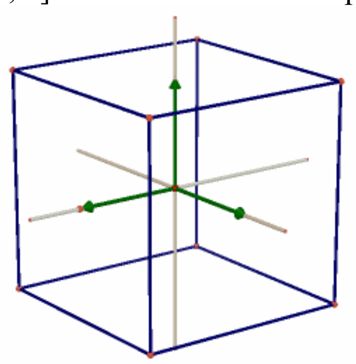
- Les trois premières colonnes permettent de vérifier la formule d'Euler, qui donne la relation $\boldsymbol{s - a + f = 2}$ entre le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f du polyèdre.
- Le nombre des isométries d'un solide est égal au nombre d'isométries conservant une face, par le nombre de faces du solide. Ainsi, le dodécaèdre, formé de 12 pentagones réguliers, chacun étant conservé par 10 isométries, admet 120 isométries.

Le tétraèdre

Les 4 faces du tétraèdre sont des triangles réguliers (c'est-à-dire équilatéraux). Trois faces se rencontrent en chaque sommet.
Une construction possible du squelette d'un tétraèdre dans un repère orthonormé de $\mathbf{R}^3$ consiste à choisir pour sommets les 4 points de coordonnées (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1) et (-1, 1, -1), chaque sommet étant relié aux trois autres par une arête de longueur $2\sqrt{2}$. Trois quelconques de ces 4 points déterminent une des faces du tétraèdre.

Le cube

Le cube peut être décrit dans un repère orthonormé comme le produit des intervalles [-1, 1] sur chacun des axes qui s'écrit aussi : $[-1, 1]^3 \subset \mathbf{R}^3$. En voici une représentation.

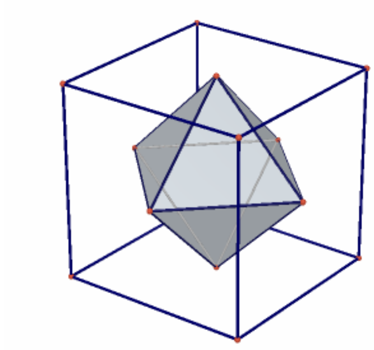


Les 6 faces du cube sont des carrés. Trois faces se rencontrent en chaque sommet. Les 4 droites déterminées par les 4 paires de sommets opposés du cube se rencontrent selon un angle constant $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ en le centre du cube. Les sommets du cube se partagent en deux sous-ensembles de 4 sommets (à distance $2\sqrt{2}$ pour le cube $[-1, 1]^3$) contenant un seul sommet dans chaque paire de sommets opposés et formant deux tétraèdres réguliers.

Cette construction se généralise à toute dimension et donne les *hypercubes réguliers.*

Octaèdre

Les 8 faces de l'octaèdre sont des triangles réguliers. 4 faces se rencontrent en chaque sommet. L'octaèdre est le dual du cube, c'est-à-dire le solide obtenu en prenant comme sommets les centres des 6 faces du cube. On trace une arête entre 2 sommets, si les 2 faces correspondantes du cube sont adjacentes.

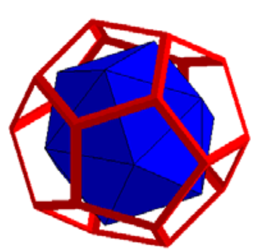


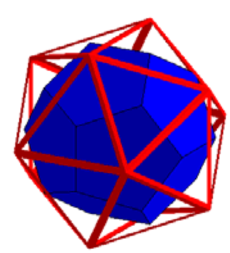
La généralisation, appelée *hyperoctaèdre* existe également en toute dimension.

Dodécaèdre et icosaèdre

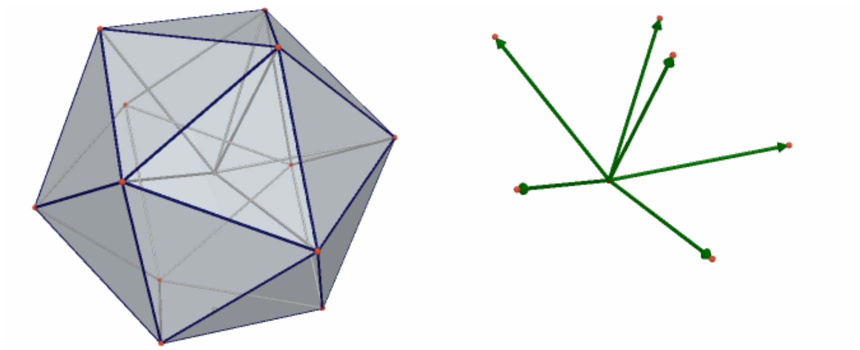
Les 20 faces de l'**icosaèdre** sont des triangles équilatéraux. 5 faces se rencontrent en chaque sommet.

Le **dodécaèdre** est le dual de l'icosaèdre. Ses 20 sommets sont obtenus en prenant les centres des 20 triangles formant les faces de l'icosaèdre (comme l'illustre la première figure ci-dessous ; la deuxième figure montre la construction de l'icosaèdre comme dual du dodécaèdre). Les 12 faces du dodécaèdre sont des pentagones réguliers. 3 faces se rencontrent en chaque sommet. Remarquons que le ballon de foot est un dodécaèdre (sphérique) noir modifié dans lequel on a remplacé chacun des 20 sommets du dodécaèdre par un hexagone sphérique régulier blanc de taille convenable.





Le dodécaèdre et l'icosaèdre sont des "accidents" (exceptions liées à la dimension 3) et sont donc plus difficiles à construire que les précédents. Une construction élégante repose sur l'observation que les 12 sommets d'un icosaèdre centré à l'origine sont les extrémités des 6 vecteurs unitaires de la forme $+v_1, \ldots, +v_6$, et leurs opposés $-v_1, \ldots, -v_6$.



Les 6 droites par les vecteurs $v_1, \ldots, v_6$ ($L_1 = \mathbf{R}\, v_1, \ldots, L_6 = \mathbf{R}\, v_6$) forment un système *équiangulaire* (deux droites distinctes $L_i \neq L_j$ se croisent à l'origine selon un même angle α).

Pour construire ces 2 solides, il suffit donc de construire un tel système équiangulaire, de 6 droites dans $\mathbf{R}^3$. Les intersections de ces droites avec la sphère unité donnent les 12 sommets de l'icosaèdre.
On construit ensuite le dodécaèdre par dualité.

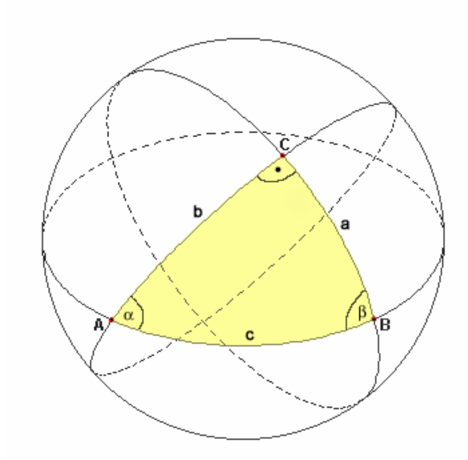
Le dodécaèdre cache un cube (qui lui même cache un tétraèdre régulier), obtenu en choisissant de manière judicieuse pour le cube 8 des 20 sommets.

II. Polytopes et pavages réguliers en géométries sphérique, euclidienne et hyperbolique

En géométrie euclidienne
Rappelons que le plan euclidien admet 3 pavages réguliers : par des triangles réguliers (3,6), des carrés (4,4) ou des hexagones réguliers (6,3), où les données (n, k) associées à ces pavages contiennent le nombre n de côtés du polygone régulier qui pave et le nombre k de polygones autour d'un sommet.

En géométrie sphérique
Par projection centrale sphérique des polyèdres de Platon sur la sphère, on obtient un pavage de la sphère par des polygones sphériques isométriques. Un **polygone sphérique** est défini par un ensemble de points sur la sphère et des côtés qui sont des géodésiques locales de la sphère considérée.
Les 5 polytopes réguliers fournissent les seuls pavages "réguliers" de la sphère (pavage régulier : pavage par des polygones sphériques réguliers qui sont tous isométriques entre eux). La table suivante contient les données (n, k) associées à ces pavages, où n désigne le nombre de côtés du polygone régulier qui pave et k le nombre de polygones qui se rencontrent en un sommet.

La sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^3$ est d'aire 4π. L'aire d'un triangle sphérique avec angles α, β, γ vaut $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.



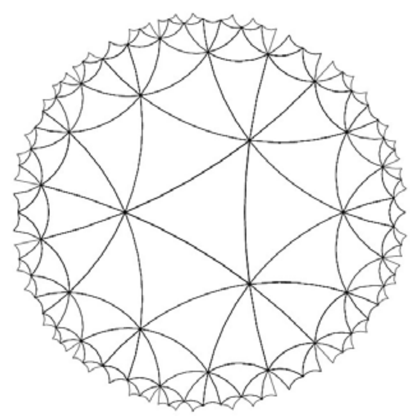
Le nombre de faces des polytopes sphériques réguliers, les aires de ces faces ainsi que les nombres (n, k) correspondants sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Nom	**Faces *f***	**Aire** $(4\pi)/f$	**(*n*, *k*)**
Tétraèdre	4	$3(2\pi/3) - \pi = \pi = (4\pi)/4$	3,3
Cube	6	$4(2\pi/3) - 2\pi = 2\pi/3 = (4\pi)/6$	4,3
Octaèdre	8	$3(2\pi/4) - \pi = \pi/2 = (4\pi)/8$	3,4
Dodécaèdre	12	$5(2\pi/3) - 3\pi = \pi/3 = (4\pi)/12$	5,3
Icosaèdre	20	$3(2\pi/5) - \pi = \pi/5 = (4\pi)/20$	3,5

En géométrie hyperbolique

Toutes les autres possibilités pour (n, k) (avec $n \geq 3$ et $k \geq 3$, k peut même prendre la valeur ∞) peuvent se réaliser comme pavages réguliers du plan hyperbolique (voir par exemple certains dessins de Escher). Pour cette raison, la géométrie hyperbolique peut être considérée comme la plus riche.

Voici un exemple de pavage du plan hyperbolique de type (3, 8) :



Plus précisément, on a le critère numérique suivant pour décider de la nature (sphérique, euclidienne ou hyperbolique) d'un pavage régulier de type (*n, k*) (pavages par *n*-gones réguliers isométriques, d'angle $2\pi / k$ en un sommet) :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}\begin{cases} > 1/2 & \text{pavage sphérique} \\ = 1/2 & \text{pavage euclidien} \\ < 1/2 & \text{pavage hyperbolique} \end{cases}$$

III. Et en dimension n

La notion de polyèdre régulier existe en toute dimension, on parle alors de polytope régulier. La classification est très jolie, en voici une présentation condensée :

Dimension	**Nombre de polytopes**	**Polytopes réguliers**
2	Infinité	Triangle, carré, …, *n*-gone, …
3	5	Les 5 solides de Platon
4	6	4-simplexe, hypercube, hyperoctaèdre, et 3 exceptionnels
5 et plus	3	*n*-simplexe, *n*-cube et son dual

A partir de la dimension 5 il n'y a plus de surprises : seuls 3 polytopes réguliers subsistent : le *n*-simplexe régulier (enveloppe affine convexe d'une base orthonormée de $\mathbf{R}^{n+1}$) généralisant le tétraèdre régulier, l'hypercube ou *n*-cube régulier $[-1,1]^n$ et son dual (enveloppe convexe de $\pm b_1,..., \pm b_n$ pour $b_1, \ldots, b_n$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$).

4. Enoncés du stage « le graphe comme outil de modélisation et de preuve »

Voici les énoncés des problèmes qui ont été travaillés durant un stage de formation continue de l'académie, chacun accompagné d'un modèle pertinent pour la résolution attendue, et d'un ensemble de mots-clés.
Les mots-clés sont les notions qui peuvent être approchées par le problème concerné, et/ou les termes qui peuvent être définis à cette occasion.

I. Les poignées de main

Sujet

On a un groupe de 20 personnes. Si 2 personnes se connaissent, elles se serrent la main. Discutez la conjecture suivante : « on peut trouver dans le groupe 2 personnes qui serrent le même nombre de mains ».

Modèles

Plusieurs modèles sont possibles, selon les hypothèses choisies.
- H1 : On ne se serre pas la main à soi-même
- H2 : On ne serre qu'une fois la main aux personnes que l'on connaît.

Si H1 et H2, le modèle peut être un graphe simple et sans boucle.
Si H1 et non H2, graphe multiple et sans boucle.
Si non H1 et H2, graphe simple avec boucle (possibilité de boucles multiples).
Si non H1 et non H2, graphe multiple avec boucles.

On choisira plutôt comme modèle un graphe orienté si la relation n'est pas symétrique. Par exemple, si on considère la relation « se saluer » plutôt que de se serrer la main, A salue B, mais B ne salue pas forcément A.

Mots-clé associés

Graphe, sommet, arête, graphe simple, graphe multiple, boucle, degré d'un sommet, séquence de degrés (ou score), choix de modèle, principe de Dirichlet (ou principe des « cages à pigeons »), contre-exemple.

Définitions et notions complémentaires

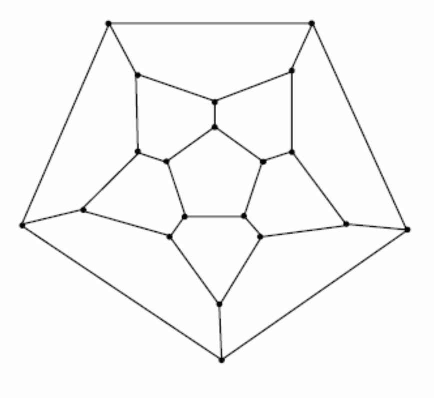
- Le principe de Dirichlet (général) s'énonce ainsi : « Si n éléments sont distribués dans m ensembles et si m est strictement inférieur à n, alors il y a au moins un ensemble qui reçoit au moins 2 éléments ».
- On appelle aussi ce principe, principe des cages à pigeons, et le principe se réecrit : « si on a plus de cages que de pigeons, alors il y a au moins une cage qui contient plusieurs pigeons ».
- Une variante de ce principe : « Si on a n cages et n pigeons alors il est possible que chaque cage contienne un et un seul pigeon ».

II. Construction de graphes en lien avec les polyèdres

Sujet

Construire dans le plan un graphe planaire 3-régulier dont toutes les faces sont des pentagones. A partir d'un sommet donné, indiquer le nombre de sommets à distance 0, 1, 2, … de ce sommet.

Modèle (et « solution »)



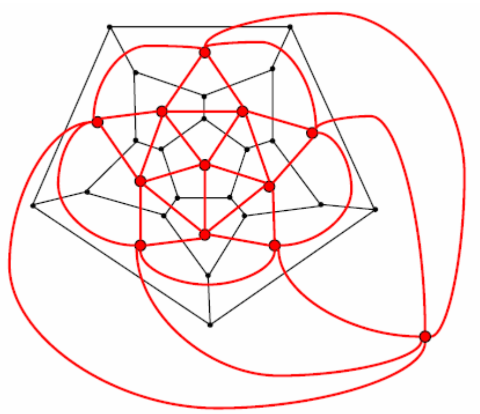
Mots-clés

Graphe simple, graphe planaire (planarité), degré des sommets et n-régularité, face dans un graphe planaire, polyèdres et 1-squelette d'un polyèdre, pavage du plan, existence et unicité d'une construction, relation d'Euler, dualité entre polyèdres.

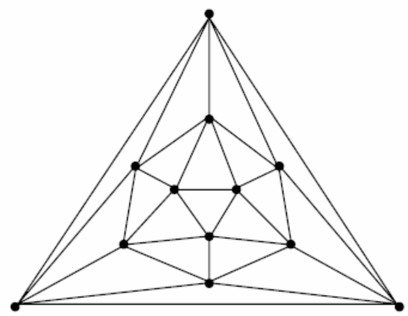
Définitions et notions complémentaires

- **Le 1-squelette d'un polyèdre** est un graphe dont sommets et arêtes sont ceux du polyèdre.
- La **relation d'Euler** est valable pour les polyèdres et pour les graphes planaires (en n'omettant pas la face infinie) :

  nombre de sommets – nombre d'arêtes + nombre de faces = 2
- Le cube et l'octaèdre sont en **dualité**, tout comme le dodécaèdre et l'icosaèdre. Pour construire le dual *D* d'un graphe planaire *G*, on choisit chaque face de *G* pour sommet de *D* et chaque arête commune à deux faces de *G* comme arêtes entre sommets de *D*. Par exemple voici en rouge la construction du dual du dodécaèdre :



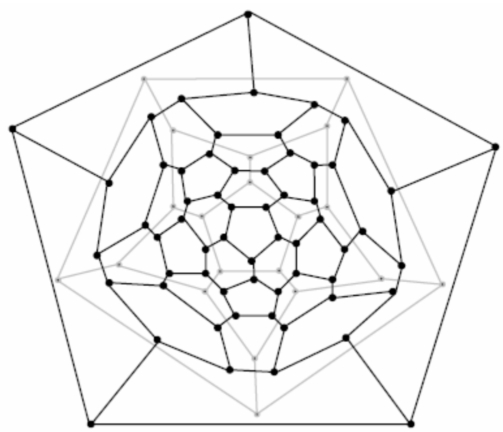
- De la même façon, on peut « reconstruire » le 1-squelette du dodécaèdre en partant de celui de l'icosaèdre, « redessiné » ici :



- On pourra vérifier que le 1-squelette du tétraèdre et son dual sont « les mêmes graphes » (dans le sens où il existe un isomorphisme entre les deux graphes). On pourra aussi faire remarquer que ce graphe est appelé K_4, c'est en effet le graphe complet à 4 sommets.

- Le sujet peut être ouvert à loisir : « construire un graphe plan 3-régulier dont les faces sont des triangles/quadrilatères/pentagones/hexagones/heptagones/octogones ». A partir de l'hexagone, le problème se ramène à celui du pavage du plan, on verra par exemple que l'on peut paver le plan par des hexagones (alvéoles des abeilles), et que ce n'est pas possible dès que les polygones ont plus de 7 côtés.

- Le ballon de football : A partir du dodécaèdre, on construit sur chaque face un pentagone (noir), sur chaque sommet un hexagone (blanc), cette construction donne le 1-squelette du ballon de football.



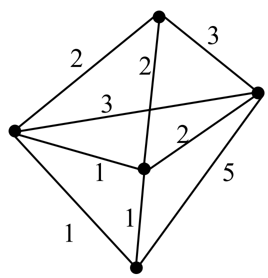
III. Propagation de la lumière dans un graphe

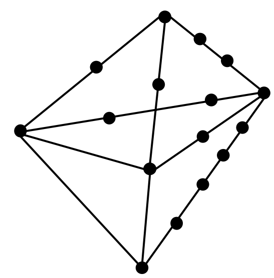
Sujet

Pour un graphe donné (où chaque arête est de longueur 1), on s'intéresse à la propagation de lumière suivant les arêtes, cette lumière parcourant une unité de distance par unité de temps.
On se donne un « sommet de départ », à partir duquel est propagée la lumière.
Quels sont les sommets qui sont éclairés après 1, 2, 3... unités de temps ?
Si on utilise 3 couleurs pour repérer sur le graphe les sommets atteints en $3n$, $3n + 1$ et $3n + 2$ unités de temps, deux sommets voisins peuvent-ils être colorés de la même couleur ? Quelle signification cela a-t-il ? Que se passe-t-il si on utilise 4, 5, … couleurs ? Et 2 couleurs ?
Que se passe-t-il si chaque arête du graphe correspond à un nombre entier d'unités de distance ?

Mots-clés
Distance entre 2 sommets d'un graphe, plus court chemin entre 2 points, (lien possible avec l'algorithme de Dijkstra)

On peut se ramener au même problème avec un graphe dont les arêtes sont pondérées par des entiers. Par exemple, le graphe suivant devient :





IV. Algorithme de Dijkstra

Propositions
Ces propositions, relatives aux exemples « classiques » contiennent des éléments rarement présents dans les manuels scolaires.

- Proposer des graphes comportant des sommets non atteints (pour expliquer pourquoi on utilise l'affectation de chaque sommet en l'infini à l'étape d'initialisation de l'algorithme)
- Proposer des graphes pour lesquels on n'a pas forcément l'« entrée » à gauche et la « sortie » à droite…
- Proposer un exemple de « grand » graphe.

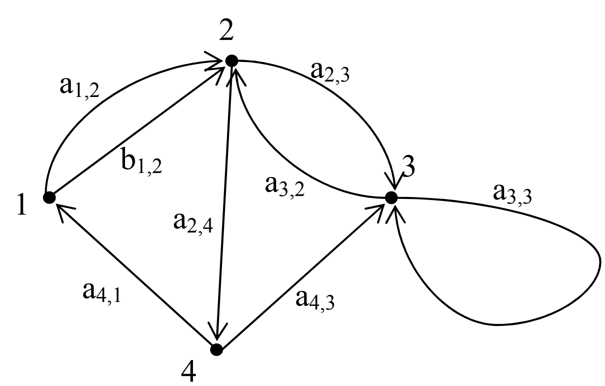
V. Nombre de chemins entre les différents sommets d'un graphe

Sujet

Comment compter le nombre de chemins entre les différents couples de sommets d'un graphe orienté donné ?

Mots-clés
Matrice associée à un graphe, produit matriciel, chemin de longueur *n* dans un graphe, description de chemins

Sur un exemple
Prenons un graphe orienté où chaque arête est nommée, par exemple :



A ce graphe, nous pouvons faire correspondre la matrice A où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} \oplus b_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} & 0 \end{pmatrix}$$

(Le symbole $\oplus$ correspond à deux arêtes (ou chemins) possibles. Par exemple, entre le sommet 1 et le sommet 2 deux arêtes existent : $a_{1,2}$ et $b_{1,2}$).
Le produit A^2 donne le nombre de chemins de longueur 2 entre 2 sommets donnés, et les décrit, le terme 0 indiquant l'absence de tel chemin :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,2}a_{2,3} \oplus b_{1,2}a_{2,3} & a_{1,2}a_{2,4} \oplus b_{1,2}a_{2,4} \\ a_{2,4}a_{4,1} & a_{2,3}a_{3,2} & a_{2,3}a_{3,3} \oplus a_{2,4}a_{4,3} & 0 \\ 0 & a_{3,3}a_{3,2} & a_{3,2}a_{2,3} \oplus a_{3,3}a_{3,3} & a_{3,2}a_{2,4} \\ 0 & a_{4,1}a_{1,2} \oplus a_{4,1}b_{1,2} & a_{4,3}a_{3,3} & 0 \end{pmatrix}$$

(Attention, l'ordre dans le produit est important pour la description du chemin : $a_{2,4}a_{4,1}$ et $a_{4,1}a_{2,4}$ comprennent les mêmes arêtes, mais le second ne correspond pas à un chemin dans le graphe.)

VI. Problème de Ramsey (3, 3)

Sujet

On a un groupe de n personnes.
Pour quelles valeurs de n est on sûr d'avoir :
- 3 personnes qui se connaissent 2 à 2

ou - 3 personnes qui ne se connaissent pas 2 à 2 ?

(Trois personnes A, B et C se connaissent 2 à 2 signifie que
- A et B se connaissent

et - B et C se connaissent

et - C et A se connaissent.)

Mots-clés

Contre-exemple, sous-graphe, graphe complémentaire d'un graphe donné, graphe auto-complémentaire

Définitions :

- Si G est un graphe simple donné, son **graphe complémentaire** est composé des mêmes sommets, et de l'ensemble complémentaire de ses arêtes.
- G est un graphe **auto-complémentaire** si il existe un isomorphisme entre lui et son graphe complémentaire.

VII. Coloration, graphe d'intervalle et gestion d'emploi du temps

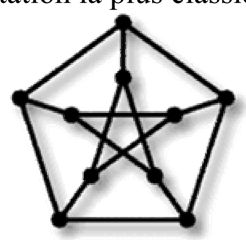
Sujet

On dispose d'un certain nombre de plages horaires, que l'on doit affecter à des salles. Quel est le nombre minimal de salles nécessaires à cet emploi du temps ? Proposer une organisation correspondant à ce nombre.

Mots-clés Graphe d'intervalle, graphe triangulé, algorithme glouton, coloration optimale, théorème(s) de Brooks, graphe de Petersen, graphes de Mycielsky

Notions abordées et définitions

- Un **graphe d'intervalle** appartient à la famille des graphes triangulés. Chacun de ses sommets représente un intervalle, une arête entre deux sommets représente l'intersection des deux intervalles donnés.
- Un **graphe triangulé** est un graphe pour lequel aucun sous graphe induit ne contient de cycle de longueur supérieure ou égale à 4.
- Le graphe de Petersen est un graphe que l'on retrouve fréquemment dans la littérature mathématique. Voici sa représentation la plus classique :



- Les graphes de Mycielsky sont une famille de graphe non k-colorables qui ne contiennent pas de triangle.
- Le **théorème de Brooks** est donné dans le programme de terminale ES dans sa version dite **faible :**
  - Si Δ est le degré maximum de *G*, alors le nombre chromatique de G est inférieur ou égal à $\Delta + 1$.
- Le **théorème de Brooks** dans sa version forte permet d'affirmer que le nombre chromatique d'un graphe *G*, est inférieur ou égal à Δ, sauf si
  - $\Delta = 2$ et *G* est un cycle impair, **ou**
  - $\Delta > 2$ et *G* contient une clique de taille $\Delta + 1$.
- Etant donnés un ordre sur les sommets du graphe $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et un ensemble ordonné de couleurs, un **algorithme glouton** colore les sommets de manière itérative en attribuant au sommet v_i la plus petite couleur non utilisée par ses voisins déjà colorés.