ÉLÉMENTS DE RÉPONSE À L'ACTIVITÉ DU N° 109

UNE HISTOIRE DE CUBES INSÉCABLES

Mickael DA RONCH[1]
Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Rappels sur le problème et objectifs visés

On rappelle que, dans ce problème, les longueurs des arêtes sont entières et leur mesure est exprimée en unités.

Le problème présenté dans le n° 109 vise à partitionner un cube d'arête n unités en pavés cubiques de plus petite taille (entière, non nulle) appelés également cubes-partition, de telle manière qu'il n'existe aucun plan horizontal ou vertical traversant le « grand cube » sans intersecter au moins un des cubes-partition. Dans la suite du texte, on écrira qu'un pavage d'un cube est insécable lorsqu'aucun plan horizontal ou vertical ne le traverse sans intersecter au moins un des cubes-partition. *A contrario*, on écrira que le pavage d'un cube est sécable lorsqu'il existe au moins un plan horizontal ou vertical permettant de le traverser sans intersecter aucun des cubes-partition.

L'objectif principal de ce problème est de favoriser le développement d'heuristiques idoines à l'activité de recherche en mathématiques telles que : expérimenter sur des cas particuliers, modéliser une situation sur des exemples à l'aide de matériels tangibles ou numériques — logiciels de géométrie dans l'espace —, émettre des conjectures locales d'existence ou d'inexistence, les prouver ou les invalider, mais le but est également d'inciter les élèves à formuler des conjectures de portée plus générale, voire, si possible, à les prouver. Rappelons que ces savoir-faire sont inhérents aux compétences attendues en fin de cycle 4 en mathématiques comme chercher, modéliser, représenter, raisonner mais aussi communiquer par exemple. De plus, l'un des enjeux de la géométrie dans l'espace au cycle 4 est de développer la capacité des élèves à appréhender l'espace et à s'y repérer, notamment en faisant le lien avec des logiciels de géométrie dans l'espace, et c'est ce que permet cette activité.

Commençons par donner un exemple sur un cas particulier. Il est facile de démontrer qu'un cube d'arête 2 unités ne possède pas de pavage insécable. En effet, la seule manière de partitionner ce cube consiste à utiliser 8 cubes-partition unitaires, ce pavage est nécessairement sécable (figure 1).

On propose, à travers ce problème, de déterminer[2] les valeurs de l'entier n pour lesquelles il existe un pavage insécable d'un cube d'arête n unités.

[1] mickael.da-ronch@univ-grenoble-alpes.fr

[2] En démontrant, bien entendu, qu'un tel pavage existe/n'existe pas.

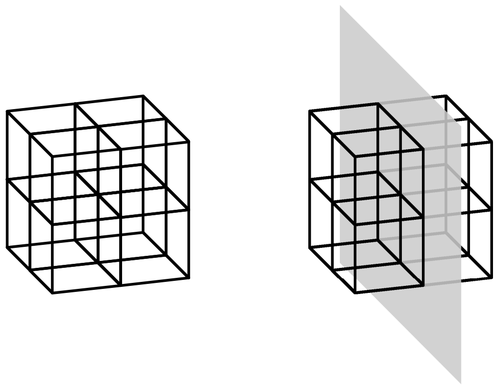


Figure 1 *: Pavage d'un cube d'arête 2 unités avec 8 cubes-partition d'arête 1 unité.*

Éléments de réponse au problème

Une première question peut consister à se demander s'il est possible de trouver un pavage insécable d'un cube d'arête n unités comportant un cube-partition d'arête $n-1$ unités. La réponse est non, puisque quelle que soit la position du pavé cubique d'arête $n-1$ unités (8 positions possibles), on peut traverser le grand cube par un plan horizontal ou vertical[3] (figure 2).

On peut donc en déduire la propriété suivante :

> **Propriété 1** : *Dans tout pavage insécable d'un cube d'arête n unités , il n'existe pas de cube-partition d'arête $n-1$ unités.*

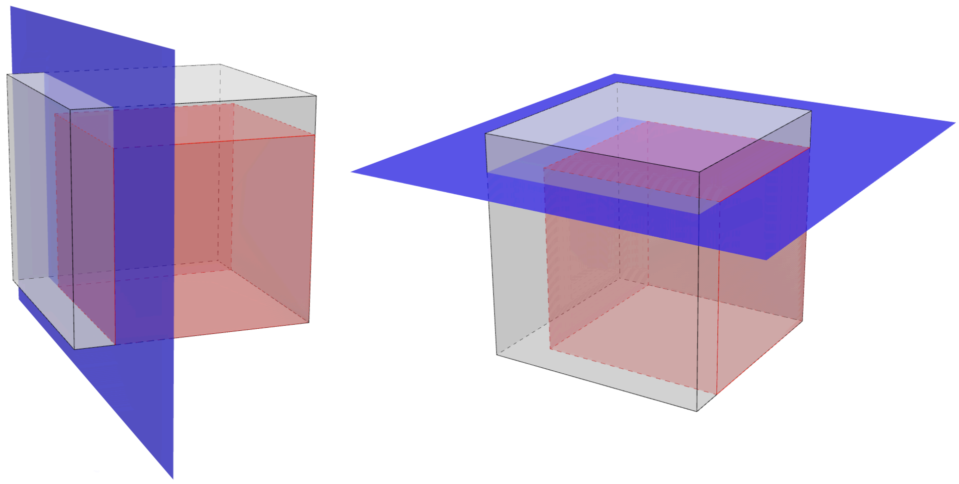


Figure 2 *: Pavage sécable d'un cube d'arête n unités par un cube-partition d'arête $n-1$ unités.*

Le cas du cube unitaire est trivial, puisqu'il n'existe pas d'entier naturel non nul plus petit que 1. La propriété précédente nous permet de déduire aisément qu'il n'existe pas de pavage insécable pour le cube d'arête 2 unités — nous l'avons d'ailleurs démontré au début de ce texte. Concernant le cube d'arête 3 unités, d'après la propriété précédente, il n'existe pas de pavage insécable par des cubes-partition d'arête 2 unités. De plus, si l'on partitionne ce cube d'arête 3 unités, en cubes-partition d'arête 1 unité, il est possible de couper ce cube par un plan horizontal ou vertical. Ceci nous amène à la propriété suivante :

[3] Pour éviter la surcharge de la figure, nous ne présentons pas les cubes unitaires (d'arête 1 unité) qui complètent naturellement les espaces libres situés entre le grand cube et les pavés cubiques.

Propriété 2 : *Il n'existe pas de pavage insécable pour un cube d'arête 1, 2 ou 3 unités.*

En regardant ce qu'il se passe sur un cube dont les arêtes mesurent 4 unités, nous démontrons qu'il existe au moins un pavage insécable par des cubes-partition d'arêtes 2 unités et 1 unité. (figure 3).

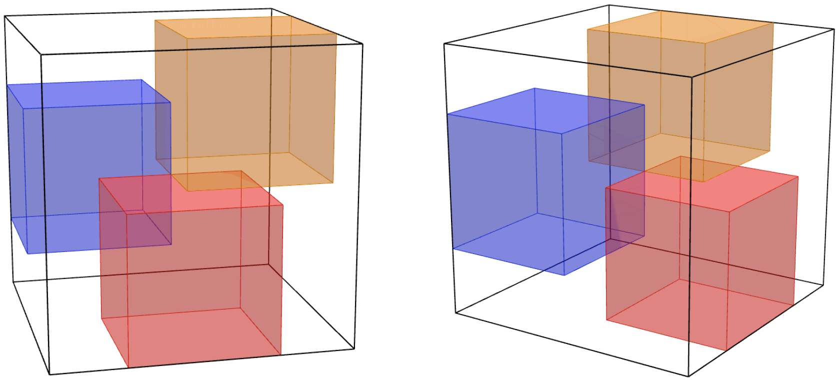
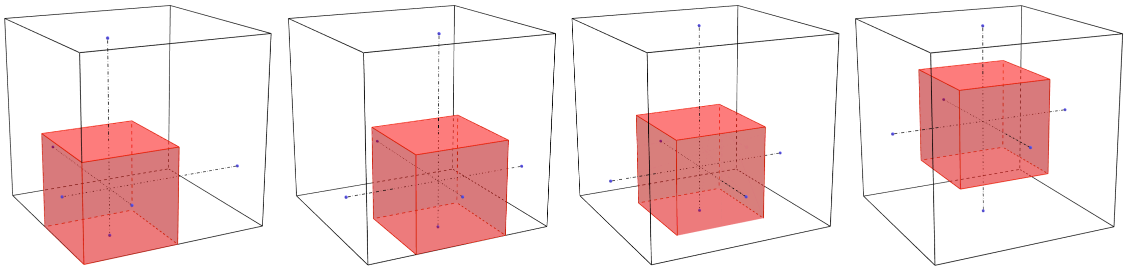


Figure 3 *: Différents points de vue du pavage insécable du cube d'arête 4 unités.*

En fait, par des considérations géométriques et à une rotation près, on peut même démontrer que le pavage est unique. Pour démontrer cette unicité (à une rotation près), on peut utiliser un raisonnement par exhaustivité des cas. D'après la propriété 1, il n'existe pas de pavage insécable comportant un cube-partition d'arête 3 unités. Si l'on partitionne le cube par des pavés cubiques d'arête 1 unité, le pavage est indéniablement sécable. Il suffit alors d'analyser toutes les dispositions possibles des cubes-partition d'arête 2 unités. On remarque qu'il y en a exactement 4 à une rotation près.



4a : « coin » *4b : « centre arête »* *4c : « centre face »* *4d : « centre cube »*

Figure 4 *: Différents positionnements possibles d'un cube-partition d'arête 2 unités.*

• ***Figure 4d***

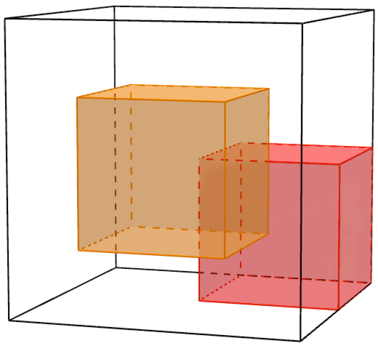
Nous pouvons la compléter uniquement par des cubes unitaires et cela ne permet pas d'obtenir un pavage insécable. Tout pavage obtenu à partir de la configuration 4*d* est donc sécable.

• ***Figure 4c***

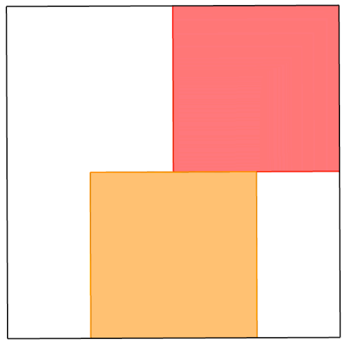
On constate que quelle que soit la partition de ce cube en cubes-partition, il y aura nécessairement un plan traversant horizontalement ce cube et passant par la face du dessus du cube déjà placé. Tout pavage obtenu à partir de la configuration 4*c* est donc sécable.

• ***Figure 4a***

Le cube-partition est situé dans un « coin » du cube, si on positionne un autre pavé cubique d'arête 2 unités au même niveau que ce pavé ou si on le positionne sur la face du haut du cube initial, on constate que l'on pourra toujours traverser le cube initial par un plan horizontal. Pour éviter cet écueil, il est nécessaire de positionner un cube-partition d'arête 2 unités centré sur une des faces disponibles de notre cube initial afin qu'au moins un des plans horizontaux et verticaux ne puisse pas traverser le cube initial (figure 5*a*). Néanmoins, la coupe (figure 5*b*) montre clairement qu'il existe un plan vertical — passant devant les deux pavés cubiques — qui permet de traverser le cube initial et qu'il ne peut pas en être autrement — d'ailleurs cela revient à la configuration de la figure 4*c* à une rotation près. En effet, il n'y a plus assez d'espace pour positionner un cube-partition d'arête 2 unités de telle manière qu'il évite la traversée de ce plan. Il est donc impossible de former un pavage insécable à partir de la figure 4*a*.



5a



5b

Figure 5 *: Différents points de vue (3D et 2D).*

• ***Figure 4b***

Nous avons déjà vu qu'il est possible d'obtenir un pavage insécable à partir de cette configuration. Cette partition est, par construction, unique à une rotation près (figure 3). On obtient donc la propriété suivante :

Propriété 3 : *Il existe un et un seul pavage insécable (à une rotation près) pour un cube d'arête 4 unités.*

En essayant sur d'autres cas particuliers dont les arêtes des cubes sont plus grandes que 4, on constate qu'il semble toujours possible d'exhiber au moins un pavage insécable (figure 6). Cela nous amène à émettre une conjecture générale pour ce problème.

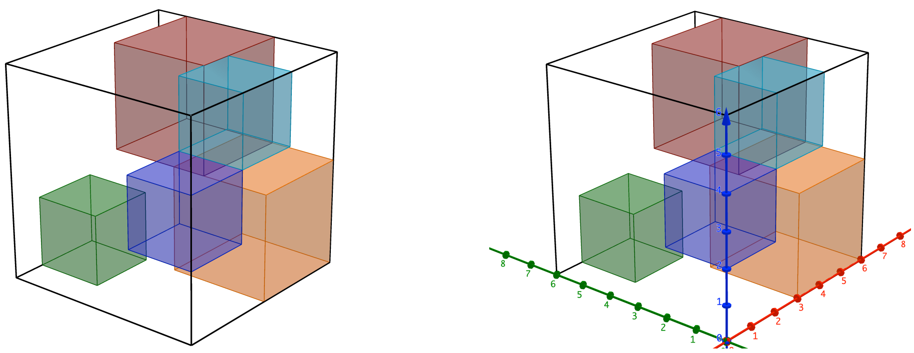


Figure 6 : Un pavage insécable d'un cube d'arête 6 unités.

Conjecture 1 : *Quel que soit $n \geqslant 4$, il existe au moins un pavage insécable d'un cube d'arête n unités.*

Dans ce qui suit, nous allons démontrer cette conjecture en plusieurs étapes, en utilisant un raisonnement direct. Nous évoquerons, à cet effet, des arguments de construction et de déconstruction de cette classe d'objets.

Le point de départ consiste à construire un pavage insécable d'un cube d'arête 4 unités (figures 3 et 7). À partir de ce pavage insécable, on déconstruit le pavé droit formé de cubes unitaires dans le coin en bas à droite de la figure 7.

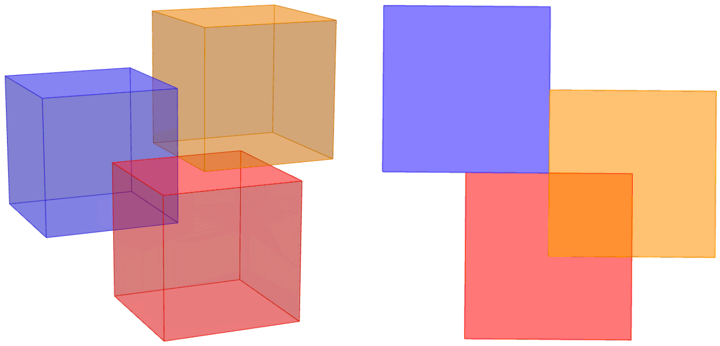


***Figure** 7 : Coupe du pavage insécable du cube d'arête 4 unités par un plan horizontal.*

Il suffit ensuite de positionner un cube-partition d'arête $n-3$ unités dans le « coin droit » de notre figure pour former ainsi un cube d'arête n unités (figure 8).

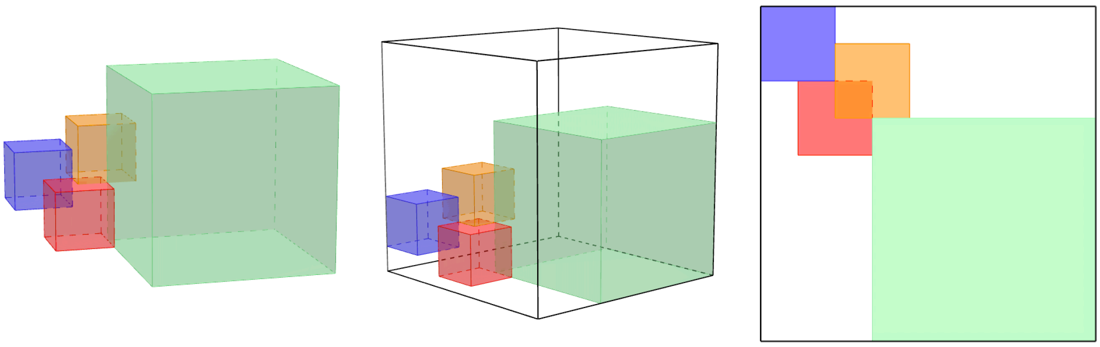


***Figure 8** : Construction d'un pavage insécable dans un cube d'arête n unités.*

Il est clair que le pavage précédent est sécable puisque l'on peut traverser le cube par un plan horizontal « au-dessus » du plus grand cube-partition. Pour obtenir un pavage insécable, il suffit :

- d'ajouter un cube-partition d'arête 3 unités comme sur la figure 9.

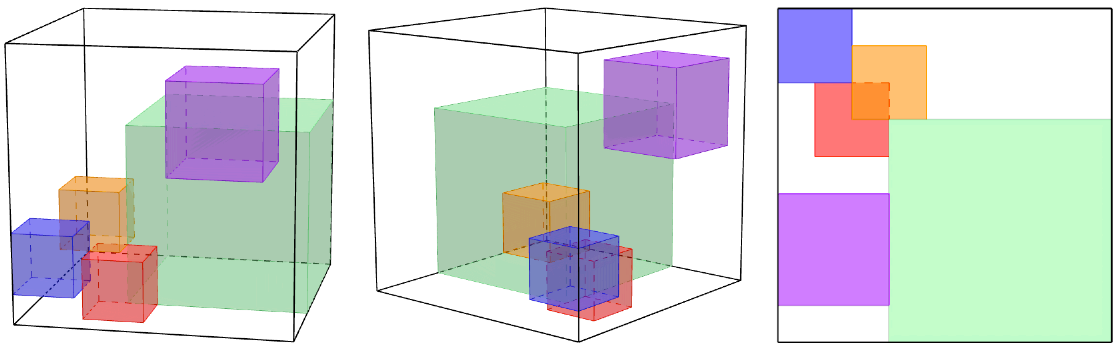


***Figure 9** : Différents points de vue dans l'élaboration d'un pavage insécable dans un cube d'arête n unités.*

• puis de compléter par un cube-partition de taille 2 unités afin d'avoir un pavage insécable (figure 10).

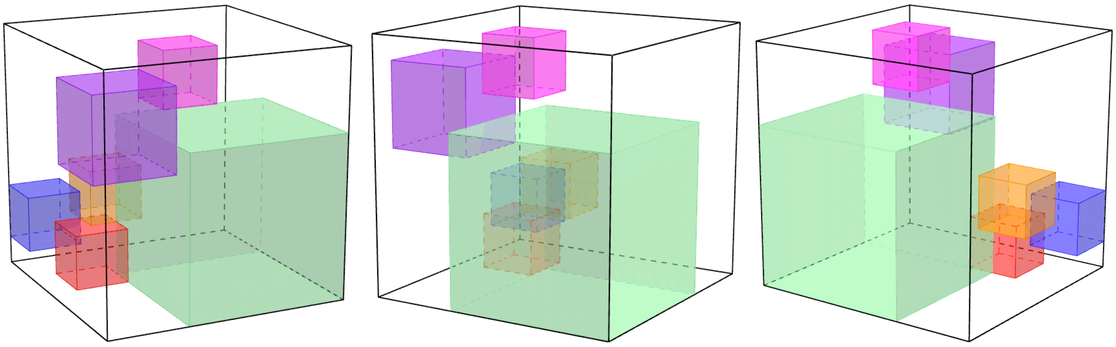


Figure 10 *: Construction d'un pavage insécable dans un cube d'arête n unités.*

Nous avons donc démontré, pour $n \geqslant 4$, l'existence d'au moins un pavage insécable pour un cube d'arête n unités, la conjecture est ainsi prouvée.

Ce problème permet également d'autres ouvertures notamment sur des questions concernant la minimalité du nombre de cubes-partition rendant le pavage d'un cube insécable que nous formulons ainsi :

> *Quel est le nombre minimum de cubes-partition nécessaires à la construction d'un pavage insécable pour un cube d'arête n unités ?*