FAIRE VIVRE LES ÉNONCÉS CONTINGENTS DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES : POURQUOI ET COMMENT ?

Véronique CERCLÉ[1]
Lycée Jean Moulin, Pézenas (34)
IREM de Montpellier
INSPÉ de l'Académie de Montpellier

Résumé. La notion d'*énoncé contingent* pour caractériser des énoncés qui sont « parfois vrais parfois faux », mise en lumière par Durand-Guerrier (1999), reste absente du vocabulaire de la classe de mathématiques. Pourtant, de tels énoncés sont bien utilisés en classe, mais souvent pour institutionnaliser la « quantification universelle implicite ». Cet article invite à questionner ce choix en proposant un cadre théorique qui donne un statut à de tels énoncés, et à ne pas fermer trop vite la porte aux énoncés contingents dans la classe de mathématiques. Nous montrerons en effet comment les énoncés contingents peuvent permettre de travailler des compétences notionnelles, des compétences heuristiques, et des compétences logiques, dans le cadre ordinaire de la classe ainsi qu'en formation.

Mots-clés. Logique, énoncés contingents, raisonnement, quantification, enseignement secondaire, formation des enseignants.

Abstract. The notion of a *contingent statement* to qualify statements that are "sometimes true and sometimes false", highlighted by Durand-Guerrier (1999), remains absent from the lexicon in the mathematics education. Yet, such statements are indeed used as class activities, usually to render "implicit universal quantification" official. This article questions this choice by proposing a theorical framework which make such statements correct, thus keeping the door open to their use in the mathematics classroom. We will show how these contingent statements may be used to improve notional skills, heuristic skills, and logical skills, in secondary education as well as in teacher training.

Keywords. Logic, open formulas, contingent statement, reasoning, proposition, secondary education, teacher training.

Introduction

> *À l'intérieur de ses limites, chaque discipline reconnaît des propositions vraies et fausses ; mais elle repousse, de l'autre côté de ses marges, toute une tératologie du savoir (Foucault, L'ordre du discours, p. 35).*

Les mathématiques sont une discipline où la question du vrai et du faux est soumise à une règle fondamentale : « Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux ». L'appropriation par les élèves de cette règle est présentée comme indispensable lors de *« l'initiation au raisonnement déductif au collège »* (Arsac et *al.*, 1992, p. 14). Ce principe paraît opposer une logique du sens commun, avec des énoncés parfois vrais parfois faux, à la logique mathématique qui ne connaîtrait pas d'autre alternative que celle vrai ou faux. Cependant, en 1996, Durand-Guerrier commençait à s'intéresser à la question des liens entre la logique formelle et le raisonnement mathématique, et a construit peu à peu la notion d'énoncé contingent, dont elle propose une première définition (Durand-Guerrier, 1996, p. 340) :

> *Certains énoncés ne sont pas susceptibles de recevoir une valeur de vérité déterminée. En accord avec le vocabulaire logico-philosophique, de tels énoncés seront dit contingents. Plus précisément,*

[1] veronique.cercle@ac-montpellier.fr

une assertion est dite contingente si sa vérité et sa fausseté sont toutes deux possibles.

Pourtant, chacun peut constater que l'adjectif et la notion même de « contingent » restent exclus de la classe de mathématiques. Il semble même que la présence d'énoncés contingents dans la classe de mathématiques ne peut être qu'accidentelle, et inopportune. Une brochure IREM, *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques* (Durand-Guerrier et *al.*, 2000) donnait pourtant déjà des outils pour les enseignants, tant du point de vue théorique (éléments de logique, permettant de formaliser la notion d'énoncés contingents) que pratique (des pistes pour la classe). Nous reprenons et poursuivons ici ce travail, avec pour objectif de montrer que, d'une part, l'élève est effectivement confronté à la contingence des énoncés, et pas seulement par négligence, et que, d'autre part, un travail explicite sur les énoncés contingents est susceptible d'enrichir l'enseignement des mathématiques en favorisant certains apprentissages.

Dans une première partie, nous nous attachons à montrer qu'il est possible d'accepter dans la classe de mathématiques des énoncés contingents. Pour cela, nous montrons que leur exclusion se fait au prix d'un implicite, ce qui nous paraît peu pertinent pour l'apprentissage, alors qu'il existe un cadre théorique, issu de la logique des prédicats, qui permet de leur donner un statut propre. Dans une deuxième partie, nous chercherons les habitats du contingent, c'est-à-dire d'une part les endroits où on peut le rencontrer et les fonctions qu'on peut lui faire jouer, et d'autre part les obstacles qui l'empêchent d'occuper l'espace de la classe. Dans la troisième partie, nous présentons quelques situations mises en œuvre en classe, basées sur des énoncés contingents et qui s'appuient sur certaines de ces niches identifiées : attirer l'attention des élèves sur un changement de domaine ou un théorème-en-acte, découvrir la notion de quantification en lien avec la notion d'équation. Nous souhaitons ainsi montrer qu'un travail basé sur ce type d'énoncé peut être mené dans le cours ordinaire de la classe, et favorise des apprentissages mathématiques. Enfin, dans une quatrième partie, nous suggérons des pistes, par exemple en formation, pour que les enseignants s'autorisent à faire vivre les énoncés contingents dans leur classe.

1. Le contingent existe-t-il en mathématiques ?

Le mot « contingent » ne fait pas partie du vocabulaire usuel de la classe de mathématiques. Nous allons pourtant montrer que non seulement les énoncés contingents sont présents en acte dans de nombreuses situations, mais aussi qu'il est possible de leur donner un statut logique.

1.1. Faux ou contingent ?

Une première activité, trouvée dans un cahier à l'occasion d'une visite dans une classe de collège, peut interpeller : il s'agit d'entourer la bonne réponse parmi Vrai / Faux / Parfois vrai, parfois faux pour chaque phrase proposée, dont voici les deux premières (figure 1) :

1) Un triangle isocèle a toujours deux côtés égaux.

2) Deux droites sécantes sont perpendiculaires.

Figure 1 *: Une activité proposée en 6^e^.*

Un élève avait entouré pour la deuxième phrase *« c) Parfois vrai, parfois faux »*, réponse que nous considérons comme un indicateur de la mobilisation en acte de la notion d'énoncé contingent. Mais la correction lui a fait changer sa réponse en « faux » et le professeur a institutionnalisé la règle *« En mathématiques, on ne peut pas dire d'un énoncé qu'il est parfois vrai parfois faux ; en mathématiques, un énoncé est ou vrai ou faux »*. Le professeur qualifie l'énoncé 2 de *faux*, autrement dit il assimile *vrai* à toujours vrai, le *faux* englobant *toujours faux* et *parfois vrai, parfois faux*.

On retrouve cette décision dans certains exercices vrai/faux, comme le montrent les deux exemples caractéristiques suivants issus de manuels de Terminale S. Le premier exercice (figure 2) met en jeu une variable :

4 Répondre par vrai ou faux :

a. $\left(\frac{1}{e^x}\right)^3 = e^{-3x}$; **b.** $\frac{(e^x)^2}{e} = e^{2x-1}$;

c. $e^{x-1} \times e^{1-x} = 1$; **d.** $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^3$.

avec les réponses des auteurs

4 **a.** Vrai ; **b.** vrai ; **c.** vrai ; **d.** faux.

Figure 2 *: Manuel Déclic TS (Hachette, 2012, p. 123).*

Les trois premières réponses ne posent pas question, puisque l'énoncé est toujours vrai : il est vrai quel que soit le sens attribué à la lettre x (x représente-t-il n'importe quel réel ou un nombre fixé inconnu ?). La réponse **d.**, en revanche, devrait être discutée puisque l'égalité **d.** est vraie pour $x = 1{,}5$ et fausse sinon. Là encore, la réponse contingente « parfois vrai, parfois faux » est englobée dans l'adjectif « faux » puisque l'énoncé impose de choisir entre soit vrai soit faux. Ce choix imposé peut se justifier en identifiant la fonction avec son expression algébrique (on teste en réalité l'égalité des fonctions ainsi désignées), mais l'énoncé ne le dit pas.

Le second exercice (figure 3) met en jeu l'article indéfini « un » :

VRAI – FAUX

Pour les exercices **88** à **90**, indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

88 Toute suite bornée est convergente.

89 Toute suite croissante qui converge vers 0 est majorée par 0.

90 Une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

Figure 3 *: Manuel Déclic TS (Hachette, 2012, p. 27).*

Quelle est l'intention recherchée par le remplacement du quantificateur « toute » par l'article indéfini « une » dans la phrase 90 ? La réponse des auteurs pour cette phrase (« faux ») semble vouloir institutionnaliser l'idée que « un » et « tout » sont deux marqueurs de caractère universel interchangeables, point de vue que l'on retrouve dans un cours de logique déposé sur le site unisciel [Unisciel, consulté en 2019] :

> *Lorsqu'on dit « un entier positif est plus grand qu'un entier négatif », il est évident que le sens est « n'importe quel entier positif est plus grand que n'importe quel entier négatif ».*

Pourtant, ce propos mérite d'être nuancé, puisque la phrase 90 peut certes se comprendre comme *« toute suite qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$ *»* (qui est une proposition fausse), mais aussi comme *« il existe une suite qui n'est pas majorée et tend vers* $+\infty$ *»* (qui est une proposition vraie).

Les trois phrases analysées (phrase 2 figure 1, phrase **d.** figure 2, phrase 90 figure 3) sont trois exemples de ce qu'à la suite de Durand-Guerrier(1999) nous nommons « énoncés contingents ». Ils mettent en jeu un élément indéterminé (une variable « *x* », un article indéfini « une suite »), et leur valeur de vérité (vrai/faux) dépend des valeurs affectées à cette indéterminée. On peut alors vouloir dire de ces énoncés qu'ils sont « parfois vrais, parfois faux », sans que le raisonnement sous-jacent soit défaillant : à la question « Un quadrilatère *ABCD* a ses diagonales perpendiculaires ; est-ce un losange ? », les réponses d'étudiants en première année de DEUG scientifique (maintenant L1) ont fait apparaître que

> *la plupart des arguments fournis par les étudiants donnant une réponse négative se retrouvent presque à l'identique chez ceux qui donnent une réponse contingente (considérée comme correcte) (Durand-Guerrier, 2005, p. 69).*

Tous ces exemples montrent en quoi l'usage courant rend dissymétriques le vrai et le faux, le vrai étant le « toujours vrai » tandis que le faux regroupe « toujours faux » et « parfois vrai, parfois faux ». Or cette dissymétrie est sous-tendue par la conviction qu'un énoncé est soit « vrai » soit « faux » laquelle s'appuie sur une logique, celle des propositions, au prix d'un implicite commun (la quantification universelle implicite). Pourtant nous allons montrer comment la logique des prédicats, en introduisant la notion de *phrase ouverte*, permet de reconsidérer ce choix.

1.2. Une formalisation des énoncés mathématiques

Notre questionnement, qui vise à déterminer le caractère vrai ou faux des énoncés (mathématiques), est pris en charge par la logique (mathématique). Un langage logique propose de modéliser les énoncés auxquels il s'intéresse en définissant une syntaxe (reconnaître un énoncé « bien formé ») et une sémantique (calculer la valeur de vérité des énoncés) à partir d'éléments de base. Nous nous proposons de développer l'avis de Kouki, pour qui la logique des propositions est insuffisante pour modéliser le langage mathématique :

> *Il est évident qu'un discours mathématique, aussi simple soit-il, ne peut pas en général être analysé par le calcul propositionnel. En effet, un discours mathématique parle généralement d'objets et de propriétés relatives à ces objets, ainsi que de relations entre objets, et met en jeu des questions de quantification (Kouki, 2009, p. 1222).*

En quoi la logique des prédicats peut-elle nous éclairer dans notre questionnement autour du vrai/faux ?

Logique des propositions

La logique des propositions a pour élément de base la proposition, qui porte une valeur de vérité vraie ou fausse. Sa syntaxe utilise des lettres pour symboliser les propositions, et des connecteurs (« non », « et », « ou ») et sa sémantique est donnée par des tables de vérité : par exemple, avec *P* vraie et *Q* vraie, la proposition « *non P ou Q* » est vraie. En pratique la notion de « proposition » est souvent définie comme « un énoncé susceptible d'être soit vrai soit faux » ; mais Hérault et *al.* (2016) posent la question de *« ce qu'est / n'est pas une proposition »* en lien avec le fait que cette proposition met en jeu ou non une variable :

> *Certains auteurs appellent proposition seulement les énoncés du type « 2 est pair » ou « 3 est pair », qui ont une valeur de vérité déterminée. Cette distinction d'ordre sémantique est bien sûr essentielle, nous la soulignons en reprenant la distinction parfois utilisée en logique mathématique entre « proposition close » (pas de variable libre, comme dans « 2 est pair » ou « pour tout entier*

> *n, si n est pair alors n2 est pair » et « proposition ouverte » (avec variables libres, comme dans « n est pair ») (Hérault et al., 2016, p. 38).*

Hérault et *al.* soulèvent bien la question des énoncés qui mettent en jeu une variable, mais conservent le mot « proposition », nuancé par le qualificatif « ouverte ». Nous faisons plutôt le choix de réserver le terme de proposition aux énoncés qui portent une valeur de vérité déterminée, qui ne dépend pas d'une variable. C'est le choix d'auteurs comme Tarski qui, dès le début de son *Introduction à la logique*, s'intéresse aux expressions contenant des variables, en affirmant :

> *Comme les variables n'ont pas de signification par elles-mêmes, des locutions telles que x est un entier ne sont pas des propositions, bien qu'elles jouissent de la forme grammaticale des propositions ; elles n'expriment pas une assertion définie et ne peuvent être ni confirmées ni réfutées (Tarski, 1971, p. 4).*

C'est aussi le choix du langage de la logique des prédicats, dont nous allons présenter quelques éléments permettant d'éclairer notre problématique. En effet, la logique des propositions fournissait des outils pour décider de valeurs de vérité à partir de propositions P, Q dont on connaît la valeur de vérité. Mais comment reconnaît-on qu'une proposition P est vraie, ou fausse ? On doit pouvoir analyser les « propositions » en jeu dans la logique des propositions : la logique des prédicats fournit une modélisation de leur écriture.

Logique des prédicats

La logique des prédicats s'intéresse précisément à l'écriture des énoncés mathématiques en décomposant leur construction grammaticale. Rappelons qu'en grammaire, un prédicat est un groupe verbal qui exprime une propriété à propos d'un objet (désigné par le groupe sujet). La syntaxe de la logique des prédicats utilise donc des lettres pour représenter les prédicats, des lettres pour représenter les objets, ainsi que des quantificateurs ; sa sémantique est donnée par l'interprétation dans un domaine (une théorie). Par exemple le prédicat « être pair » donne l'énoncé $P(n)=$*« n est pair »*, $P(6)$ est vraie dans la théorie de l'arithmétique. Le prédicat à deux places (ou relation) « être égal, égaler » appliqué à deux ensembles donne l'énoncé *P(A,B)* dont la valeur de vérité est déterminée par la théorie des ensembles. La logique des prédicats prend donc en charge cette question des variables, et permet de modéliser la structure des énoncés grâce à la notion de *phrase ouverte*.

Phrase ouverte

Dans le langage de la logique des prédicats, un énoncé portant sur une variable est modélisé sous la forme $A(x)$.

- Le groupe verbal A est un prédicat, qui « dit quelque chose » sur le sujet en lui attribuant une propriété ; en mathématiques nous aurons par exemple « être premier », « avoir deux côtés de même longueur ».
- Le sujet x d'une phrase ouverte est un terme indéterminé : une variable libre (variable à laquelle on peut affecter des valeurs dans un domaine D) qui peut être un nombre n, un point M, une fonction f, mais aussi un objet géométrique « un triangle ».
- La phrase est notée *A(x)* pour signifier *« x possède la propriété A »* (comme par exemple la phrase *« n est impair »*, *« un triangle a deux côtés de même longueur »*). On peut de la même façon former des phrases avec une relation R et plusieurs variables par exemple $R(x, y)$ (*« les droites x et y sont parallèles »*, *« x est un multiple de y »*).

On peut enfin former une phrase ouverte plus complexe avec les connecteurs « non- », « et »,

« ou », « $\Rightarrow$ ». L'énoncé ainsi formé est une proposition au sens grammatical, mais n'est pas une proposition au sens où elle n'est en elle-même ni vraie ni fausse, elle ne porte pas de valeur de vérité *a priori* ; en logique des prédicats, on parle d'énoncé ouvert.

Proposition singulière

Comme x a le statut de variable libre, on peut lui affecter des valeurs (en respectant le cas échéant le domaine indiqué), on obtient alors une proposition singulière : dans notre exemple $A(x)=$« *x est pair* », la proposition $A(2)$ est vraie, $A(3)$ est fausse. Tarski (1936) avait d'ailleurs développé la notion de fonction propositionnelle (puisque l'image d'un nombre est un booléen). Nous modélisons de la façon suivante : en notant X un élément singulier dans le domaine, c'est-à-dire une valeur particulière déterminée de la variable x, on peut se prononcer sur la valeur de vérité de $A(X)$; lorsque $A(X)$ est vraie, on dit que X satisfait la phrase ouverte $A(x)$. $A(X)$ est donc une proposition, on parle de proposition singulière. On peut ainsi formaliser la notion d'exemple (valeur qui satisfait la phrase ouverte) ou de contre-exemple.

> *Le point de vue sémantique consiste à produire un élément qui satisfait la phrase ouverte (ou ne la satisfait pas selon le cas). Ainsi les notions d'exemples et de contre-exemple renvoient au point de vue sémantique (Kouki, 2006, p. 11).*

Proposition quantifiée (universelle, existentielle)

Un ensemble D étant donné, on peut aussi former des énoncés quantifiés : l'énoncé universel $\forall x \in D, A(x)$, qui est vrai lorsque pour toute valeur X prise dans D et affectée à x, $A(X)$ est vraie, et l'énoncé existentiel $\exists x \in D, A(x)$, qui est vrai dès qu'il existe dans D une valeur X de x pour laquelle $A(X)$ est vraie. Pour chacun de ces énoncés quantifiés, on peut dire qu'il est vrai ou faux, il s'agit donc de propositions (universelle ou existentielle).

Pour résumer, avec un prédicat A, une indéterminée x astreinte à un domaine D, et une valeur singulière X pour x, on peut créer trois types d'énoncés : $A(X)$; $\forall x \in D, A(x)$ et $\exists x \in D, A(x)$. Ces trois types d'énoncés sont bien des propositions, au sens de la logique des prédicats puisqu'elles ne comportent pas de variable libre, et au sens du vrai/faux puisqu'elles portent une valeur de vérité.

Énoncés mal quantifiés

Ces énoncés quantifiés sont au cœur de l'activité mathématique. Même une pratique élémentaire des mathématiques utilise des énoncés qui mettent en jeu des variables, et qui portent une quantification. La quantification utilise un domaine ($x \in D$) et un quantificateur (symbolisé par $\forall$ ou $\exists$) ; cette quantification est parfois visible (« toujours », « tout »), parfois sous-entendue. Mais il est courant de rencontrer des énoncés mal quantifiés. Ainsi la locution « soit » est souvent utilisée pour indiquer le domaine : *« soit n un entier naturel »*, *« soit f une fonction définie sur* $[1;2]$ *»*, mais elle est parfois aussi considérée comme une quantification universelle (figure 4).

Or la locution « soit » permet seulement de présenter un objet, elle introduit uniquement le choix d'un élément générique, en indiquant qu'on choisit un élément dans le domaine, sans préciser exactement lequel, un parmi les éléments possibles ; comment savoir alors si l'élément choisi satisfait ou non la phrase ouverte ? Hérault et *al.* (2016, p. 38) vont dans le même sens en invitant à *« repérer la présence du locuteur dans une phrase telle que « soit x un nombre réel » [qui] marque l'action de quelqu'un en train de faire des mathématiques : il annonce qu'il considère un réel et qu'il le nomme x »*, ce qui montre qu'on n'est plus dans *« l'énonciation d'un simple fait concernant des objets mathématiques »* qui caractérise les propositions.

C : « $x > 1$ »

C **n'est pas une proposition logique complète** car elle contient une variable libre *x*. On ne sait pas ce qu'est *x* (un point ? un nombre entier ? un vecteur ? une étoile de l'univers ?). On ne peut donc pas attribuer de valeur de vérité à la proposition *C*.

C' : « *Soit x un nombre réel, alors* $x > 1$ »

La proposition *C'* est fausse. En effet, *C'* est une proposition logique car on a défini la variable *x* comme étant un nombre réel. Mais elle est fausse car par exemple 0 est un nombre réel et $0 < 1$.

***Figure 4** : Exemple[2] où la locution « soit » est comprise comme quantificateur universel.*

Un énoncé du type *« soit* $x \in D$*, alors* $A(x)$ *»* n'est donc pas une proposition, il n'est pas quantifié. De même, on rencontre de nombreux énoncés quantifiés, mais dont le domaine n'est pas explicité : *« un carré est toujours positif »*. N'étant pas correctement quantifié, un énoncé de la forme $\forall x, A(x)$ n'est pas non plus une proposition, puisque la valeur de vérité dépend du domaine de quantification.

Énoncés contingents

À partir d'un prédicat *A* et d'une variable libre *x*, nous avons recensé différents types d'énoncés (figure 5) :

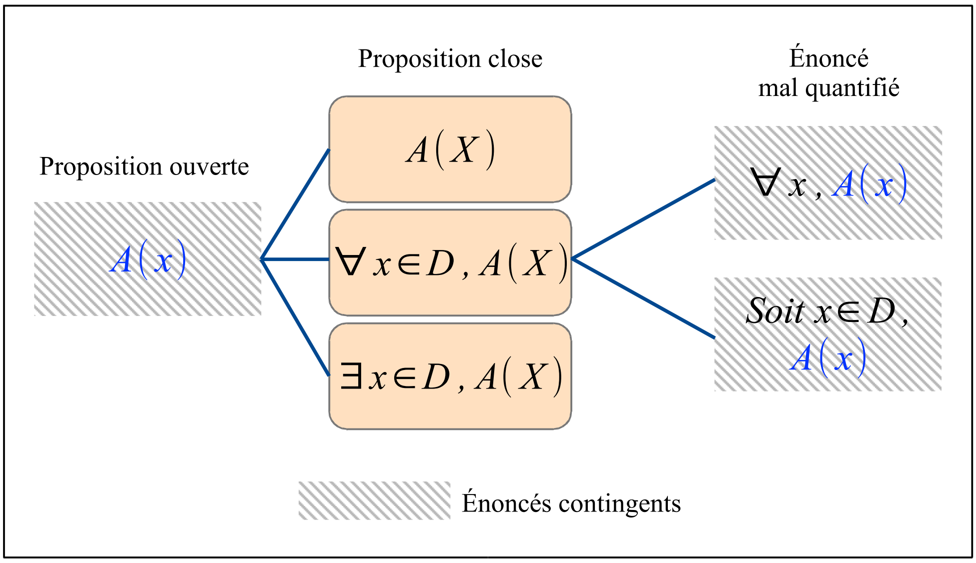


***Figure 5** : Différents statuts logiques d'énoncés mathématiques.*

Nous reconnaissons là les types d'énoncés associés à la notion de proposition que l'on peut rencontrer en classe de mathématiques. Les trois énoncés de la colonne centrale sont des propositions : singulière, universelle, existentielle. Les autres énoncés (phrase ouverte à gauche, énoncés mal quantifiés à droite) ne portent pas *a priori* de valeur de vérité ; à la suite de Durand-Guerrier (1999), nous les qualifions d'énoncés contingents. Par exemple, les énoncés *« un carré est toujours positif »* (forme : $\forall x, A(x)$), *« soit x un nombre réel, alors* $x > 1$ *»* (forme : *« soit* $x \in D, A(x)$ *»*) sont des énoncés contingents puisque mal quantifiés. Les énoncés « $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^3$ » et *« une suite qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$ *»* sont des énoncés contingents car ce sont des phrases ouvertes.

[2] pris sur la page openclassrooms.com-Propositions logiques.htm (consultée le 24/12/2013, fermée depuis).

Proposition conditionnelle et implication

Nous allons montrer que cette modélisation permet également de clarifier le statut des propositions conditionnelles (si ..., alors ...) à partir de l'implication ouverte. La question de la quantification est en effet également cruciale dans les propositions dites conditionnelles, de la forme *« si $P(x)$, alors $Q(x)$ »* : il est un attendu des programmes du lycée que

> *Les élèves apprennent en situation à [...] repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles » (MEN, 2019b)*

ce qui suppose de traduire en langage formel *« si $P(x)$, alors $Q(x)$ »* par $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Pourtant cette traduction pose déjà problème parce que ces phrases *« si $P(x)$, alors $Q(x)$ »* ne précisent généralement pas le domaine auquel est astreinte la variable : il s'agit d'un énoncé mal quantifié. On a aussi vu qu'une locution comme *« soit x un réel »*, parfois utilisée pour mentionner le domaine, n'est pas satisfaisante.

Mais on peut aussi questionner cette traduction à la lueur de notre modélisation. Pour mieux comprendre, notons $P(n)=$*« n est pair »* et $Q(n)=$*« n+1 est premier »*, et considérons l'énoncé *« si n est pair alors n+1 est premier »*. Il vient facilement 8 comme contre-exemple (on a $P(8)$ vrai mais $Q(8)$ faux), bien que la phrase *« si 8 est pair, alors 9 est premier »* n'ait pas vraiment de sens : d'une part parce qu'il n'y a pas de raison de se demander si 8 est pair, d'autre part parce que le langage courant attend une relation de cause à effet qui est hors-sujet. Comme exemple, il vient facilement 4 (on a $P(4)$ vrai et $Q(4)$ vrai), mais les élèves et étudiants évoquent rarement les cas où la prémisse $P(X)$ est fausse comme pour 1 ou 3. Il faut reconnaître que le retour à la langue naturelle *« si 1 est pair, alors 2 est premier »* n'aide pas. Il est néanmoins naturel de produire des exemples et des contre-exemples, ce qui autorise à considérer l'énoncé *« si n est pair, alors n+1 est premier »* comme contingent, puisqu'on peut trouver des valeurs de la variable qui le rendent vrai, ou faux. Comment alors relier les notions de propositions conditionnelles et de phrase ouverte ?

Implication ouverte

Si on reprend la traduction *« si $P(x)$, alors $Q(x)$ »* par $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, la phrase ouverte en jeu est $P(x) \Rightarrow Q(x)$ (une implication ouverte). Une valeur singulière X satisfait (ou non) cette implication lorsque la proposition $P(X) \Rightarrow Q(X)$ est vraie (resp. fausse). Or la valeur de vérité d'une implication singulière se décide en référence aux tables de vérité qui peuvent paraître éloignées de la langue naturelle : elle est fausse lorsque $P(X)$ est vrai et $Q(X)$ faux, vraie dans tous les autres cas. L'implication ouverte $I(n)=$*« n pair⇒ n+1 premier »* est satisfaite pour la valeur 4 ($I(4)$ est vraie car $P(4)$ vrai et $Q(4)$ vrai) , pour la valeur 1 ($I(1)$ est vraie car $P(1)$ faux et $Q(1)$ vrai) et pour la valeur 3 ($I(3)$ est vraie car $P(3)$ faux et $Q(3)$ faux). Le traitement de l'implication singulière n'est donc pas spontané, en particulier dans le cas d'une prémisse fausse (cas $P(X)$ faux), et nécessite une appropriation des tables de vérité qui nous éloigne de l'enseignement secondaire. Nous reconnaissons pourtant à l'œuvre le modèle décrit précédemment issu de la logique des prédicats : il est possible de voir une proposition conditionnelle « si $P(x)$, alors $Q(x)$ » comme une implication ouverte $I(x)=$« $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » à partir de laquelle nous retrouverons les différents types d'énoncés (proposition singulière, universelle, existentielle, énoncés mal quantifiés). C'est la position développée par Durand-Guerrier (2003). Cette interprétation est davantage en accord avec l'usage puisque dans les énoncés de la forme *« si A, alors B »* en jeu dans la classe de mathématiques, *A* et *B* sont des phrases ouvertes et non des propositions.

Cette clarification permise par le langage des prédicats présente un formalisme simple et un statut logique (*phrase ouverte*, *énoncé mal quantifié*) pour traiter les *énoncés contingents* qui ne sont pas proprement des propositions au sens où ils sont « parfois vrais, parfois faux ». Elle nous permet ainsi de réduire les ambiguïtés apparentes des exercices vrai-faux présentés dans la première partie. Pourquoi ne pas faire vivre ce point de vue au grand jour dans nos classes ?

2. Quelle écologie pour les énoncés contingents ?

Nous avons vu que les énoncés contingents sont présents dans la classe de mathématiques, et qu'il est possible de leur donner un statut logique. Pourtant les locutions « énoncé contingent » et « phrase ouverte » restent assez peu diffusées et totalement absentes de l'enseignement. Comment peut-on expliquer cette absence ? Et quels arguments pourraient au contraire favoriser leur existence explicite ? Quelle place, quelles fonctions pourrait-on leur attribuer ? Se poser ces questions est ce qu'Artaud appelle une problématique écologique :

> *La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? (Artaud, 1998, p. 101).*

2.1. Quels obstacles empêchent les énoncés contingents de vivre dans la classe de mathématiques ?

La phrase ouverte, qui a pourtant un statut dans la logique des prédicats, et les énoncés contingents ne sont généralement introduits dans la classe que pour mieux les en exclure. Dans un premier temps, nous postulons un certain nombre d'obstacles à leur existence dans la classe, qui nous semblent conduire à cette exclusion.

La pratique de la quantification universelle implicite

Les énoncés contingents sont le plus souvent utilisés en classe de mathématiques dans des situations qui visent l'*« infirmation par production d'un contre-exemple »* avec l'idée que *« C'est l'occasion de travailler sur le sens des énoncés mathématiques et la quantification universelle implicite »* (MEN, 2009a, p. 13). Or nous avons vu dans nos exemples que l'institutionnalisation qui est tirée de ces situations est souvent qu'en l'absence de quantificateur explicite, on doit considérer qu'il y a bien une quantification universelle, mais qu'elle est implicite. On apprend donc à l'élève que $A(x)$ signifie $\forall x, A(x)$ (et par conséquent aussi que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ signifie $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$). Cette « quantification universelle implicite » s'oppose donc à l'existence d'énoncés contingents. Pourtant, cette pratique soulève la question de l'absence de mention du domaine (cette mention étant parfois amenée par un « soit » dont nous avons vu l'insuffisance) :

> *La pratique de la quantification implicite des énoncés tend à occulter l'importance du domaine de quantification pour statuer de la valeur de vérité des énoncés (Murphy et al., 2016, p. 11).*

De plus, la situation du labyrinthe étudiée par Durand-Guerrier (1999) a mis en évidence que cet implicite n'est pas partagé par la plupart des élèves de lycée. Elle montre en particulier que la conviction qu'une phrase *« si $P(x)$, alors $Q(x)$ »* est quantifiée universellement mais de manière implicite est fermement ancré chez les étudiants et les enseignants mais pas toujours chez les élèves. Alors que c'est le même formalisme issu de la logique des prédicats qui est à l'œuvre, il apparaît que la notion de phrase ouverte est facilement acceptée pour les énoncés simples (du type *« n est premier »*), mais que la notion d'implication ouverte est plus résistante. Les oppositions des professeurs peuvent être vigoureuses pour envisager *« si* $P(x)$*, alors* $Q(x)$*»* comme une phrase ouverte, ce que confirment mes échanges en formation avec les professeurs, stagiaires ou non. Sur quoi se fonde cette conviction ?

Mesnil analyse cet implicite comme relevant d'une *« pratique langagière de la communauté »* :

> *Les mathématiciens ne s'expriment pas soit dans le registre de la langue naturelle, soit dans le registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats [...] mais se trouvent souvent dans un registre que je me contenterai d'appeler registre intermédiaire (Mesnil, 2014, p. 90).*

Elle illustre ces registres par les exemples : *« Si 4 divise n, alors n est pair »* (registre intermédiaire) qui se traduirait par *« Tout nombre entier divisible par 4 est pair »* (langue naturelle) ou *« Quel que soit l'entier naturel n, si 4 divise n, alors n est pair »* (registre formalisé). Ces exemples montrent que la langue naturelle et le registre formalisé explicitent la quantification universelle, mais que le registre intermédiaire, pourtant privilégié par la communauté enseignante, la laissent implicite. Ce registre intermédiaire exprime pourtant mal la quantification universelle, qui est le plus souvent simplement portée par l'article indéfini « un » (un produit est nul...) ou des conjonctions *« si ..., alors ... »*. On a vu dans la première partie que cette pratique n'est pas satisfaisante. Elle nécessite de faire appel à une convention — la « quantification universelle implicite » — qui de fait s'oppose à la possibilité pour les énoncés d'être contingents.

Ainsi, l'existence d'énoncés contingents n'a pas de place du fait des pratiques langagières des enseignants de mathématiques.

Le caractère nécessaire des énoncés mathématiques

L'existence d'énoncés contingents en mathématiques est aussi bloquée par le caractère nécessaire des énoncés mathématiques. Regardons en effet les deux types d'énoncés du registre intermédiaire quantifiés par l'article indéfini « un » (un produit est nul...) ou les conjonctions *« si ..., alors ... »* : ils sont généralement utilisés comme éléments d'un raisonnement, ce sont les théorèmes qui permettent de passer d'une hypothèse à une déduction, ils sont donc nécessairement vrais. Quand le professeur écrit un théorème dans son cours, il est implicite que ce théorème est vrai ; quand ce théorème est une proposition universelle, l'absence de quantification ne pose pas de problème car toutes les lectures possibles (choix du quantificateur, du domaine possiblement considéré par l'élève, du statut de l'indéterminée) conduisent à attribuer la valeur de vérité « vrai ». La quantification peut effectivement rester implicite lorsque cela ne présente pas de risque : il n'est pas toujours indispensable d'expliciter la quantification et le domaine. Nous pensons donc que l'implicite qui devrait être mis au jour auprès des élèves, c'est qu'« un théorème est un énoncé vrai », la quantification universelle et le domaine étant implicitement donnés par le contexte. Pour aller plus loin, nous faisons l'hypothèse que la pratique de la quantification universelle implicite s'appuie en réalité sur un « préjugé de vérité du discours », qui accorde au locuteur l'intention de produire un discours vrai. Hérault et *al.* (2016) expliquent par exemple que, quand dans son raisonnement le locuteur dit *« n est premier »*, se demander si c'est vrai ou faux n'a de sens que si on veut analyser le raisonnement, mais pas si on veut suivre le raisonnement. Si on se place à l'intérieur du raisonnement, un argument de la forme *« un ... »* ou *« si ..., alors ... »* est implicitement vrai (donc toujours vrai). Pour questionner son caractère vrai ou faux, il faut se placer à l'extérieur du discours, dans une posture d'analyse des arguments.

Sackur et Maurel (2000) invitent déjà à *« enseigner le caractère nécessaire des énoncés* *mathématiques »*, l'adjectif nécessaire étant ici dans son acceptation comme contraire de contingent : *« Un mathématicien se permet de faire une confiance aveugle à des règles qu'il connaît et qui sont des règles valides, efficaces et cohérentes »* (Sackur & Maurel, 2000, p. 9). Ce dont le locuteur a besoin pour dérouler son raisonnement, ce sont des propositions vraies (ou toujours vraies). Les énoncés qu'on va institutionnaliser en classe sont donc les énoncés vrais, sous le nom de théorèmes, car ils permettent de faire des déductions. Les énoncés contingents ne sont qu'un support à des activités de recherche (activités heuristiques) et ne vivent plus dans l'institutionnalisation.

La logique formelle, peu présente dans le parcours universitaire des enseignants

La formation initiale des enseignants peut être un autre obstacle à l'acceptation des énoncés contingents. Mesnil (2014) a montré que les enseignants ne se sentent pas correctement outillés pour enseigner la logique, alors que les programmes le leur demandent. Les exemples de la première partie montrent que, quand les enseignants font travailler leurs élèves sur des énoncés contingents, c'est généralement pour y imposer la quantification implicite. Or la formation des enseignants ne donne pas toujours l'occasion de questionner cette pratique : les connaissances en logique sont souvent élémentaires, l'enseignement de la logique formelle étant peu présent dans le cursus mathématique universitaire.

Les connaissances des enseignants proviennent souvent de quelques notions de logique des propositions autour des connecteurs, éventuellement un travail sur les quantificateurs. Peu d'enseignants ont étudié la logique formelle des prédicats, et les ouvrages à destination des étudiants peuvent paraître éloignés d'une utilisation dans le secondaire. Pourtant, nous espérons avoir montré dans la première partie qu'on peut tout à fait se contenter pour le lycée de quelques éléments de base de la logique des prédicats : c'est ce qui était d'ailleurs présenté dans la brochure *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques* (Durand-Guerrier et *al.,* 2000). À Montpellier, nous y travaillons lors de séances de didactique de logique prévues dans le master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) qui forme les enseignants débutants. Un travail est en effet nécessaire pour adapter un savoir universitaire sur la logique en un savoir pertinent dans l'enseignement secondaire.

Une transposition didactique peu visible

> *L'importance du travail sur le langage dans différents systèmes logiques et le manque de précisions quant au savoir à enseigner relatif aux notions de logique au programme du lycée, sont d'autant plus dommageable qu'il n'y a pas de savoir de référence sur lequel les enseignants peuvent s'appuyer (Mesnil, 2014, p. 416).*

Mesnil évoque ici la transposition didactique des notions de logique, comme transposition du savoir de référence en savoir à enseigner (Chevallard, 1985) Or la transposition de la logique des prédicats est à peu près inexistante. Le savoir savant est difficile et très formel, et peut paraître éloigné des mathématiques du secondaire. Il faut aussi reconnaître que tout un vocabulaire spécifique y est attaché sans que celui-ci ne paraisse fixé et stabilisé (figure 6).

Le savoir à enseigner n'est pas non plus réellement clarifié. La partie *« vocabulaire ensembliste et logique »* du programme de seconde 2019 (MEN, 2019a) demande de *« reconnaître une proposition mathématique »* alors même que nous avons vu que l'acceptation du mot proposition ne fait pas consensus. La phrase *« mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse »* ne s'applique qu'aux propositions universelles. Les éléments de logique qu'on trouve dans les ouvrages à destination des lycéens que nous avons pu consulter n'utilisent que la notion de proposition sans jamais mentionner celle de phrase ouverte.

La transposition didactique de la logique des prédicats reste donc marginale, ce qui peut expliquer l'absence de la notion de phrase ouverte dans le langage enseignant. Cela peut aussi se vérifier en formation avec les stagiaires en master MEEF de mathématiques que le savoir relatif à ces questions reste le plus souvent mal maîtrisé.

Dans le cas d'une phrase-type sujet + verbe : • le verbe exprimant une propriété d'objet ou une relation entre objets s'appelle *prédicat* ou *fonction propositionnelle* ; • le sujet peut être un élément indéterminé, on parle de *variable libre*, *variable parlante*, *marque place*, *argument*, *élément générique* ; le sujet peut aussi être un *élément singulier* ou *nom d'objet* ; • une phrase sujet + verbe ainsi formée est un *prédicat saturé* ou une *formule* ; lorsque le sujet est indéterminé, on parle de *phrase ouverte* ;
• un objet (singulier, générique) peut (ou non) *satisfaire* la phrase ouverte, la *vérifier* dans le sens où, pour cet objet, la phrase ouverte est vraie ; on peut parler d'exemple. Dans le cas contraire, on a un contre-exemple ;
• un énoncé singulier, un énoncé correctement quantifié portent une *valeur de vérité* ou *dénotation* ; on parle d'*énoncé clos* ou proposition.

Figure 6 *: Vocabulaire associé au langage des prédicats.*

L'absence des énoncés contingents dans la classe de mathématiques peut donc s'expliquer par des connaissances des enseignants peu retravaillées, par des pratiques qui leur ferment la porte, et par des ressources qui n'en font pas mention. Cette absence peut aussi amener à s'interroger sur l'intérêt didactique d'une telle notion, ce qui nous fait revenir à l'écologie : Artaud souligne qu'un objet *« ne peut pas vivre de façon isolée »* (Artaud, 1998, p. 111), mais doit s'inscrire dans une organisation mathématique. Pour cela, elle nous invite à rechercher les habitats et les niches que notre objet peut occuper, dont nous rappelons une définition :

> *Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit ; c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce (Chevallard, 1994, p. 5).*

Si nous voulons faire vivre les énoncés contingents, il faut chercher où, quand et pourquoi le faire. Nous avons donc cherché dans un premier temps les habitats du contingent, et proposé des situations à partir d'utilisation d'énoncés contingents, afin de montrer les apprentissages qu'ils peuvent permettre.

2.2. Des niches possibles des énoncés contingents

L'intérêt d'un énoncé contingent (phrase ouverte ou énoncé mal quantifié), c'est qu'il présente des exemples et des contre exemples. Ces notions d'exemples et de contre-exemples sont courantes dans la classe de mathématiques : pour illustrer une définition ou un théorème, pour conjecturer ou réfuter une règle universelle... Le vocabulaire de Tarski (1936) permet de formaliser ces notions par la notion de satisfaction : un exemple est une valeur X qui satisfait la phrase ouverte $A(x)$ c'est- à-dire telle que $A(X)$ est une proposition (singulière) vraie. Il s'agit donc de chercher quelles sont les activités mathématiques dans lesquelles on pratique la manipulation d'exemples et de contre-exemples, et la fonction didactique de cette pratique. Autrement dit, nous cherchons quand et pourquoi l'élève rencontre des énoncés qui présentent des exemples et des contre-exemples, c'est-à- dire à des énoncés contingents. Dans la troisième partie, ces pistes seront exploitées lors de séances en classe.

Éléments de logique

La présence dans les programmes d'une partie intitulée *« Notations et raisonnements »* invite les enseignants du lycée à travailler quelques éléments de logique avec les élèves. La démarche d'enseignement est aussi précisée :

> *Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation (MEN, 2019a et 2019b).*

En effet, les travaux de Douady (1986) sur la dialectique outil-objet nous rappellent que, pour une réelle appropriation d'une notion, celle-ci doit être abordée sous un double regard, comme outil et comme objet. Ceci renforce effectivement l'idée de ne pas se contenter de faire de la logique en passant, c'est-à-dire en introduisant un point de logique répondant à un besoin particulier, mais qu'il faut au contraire de temps en temps regarder la logique de l'extérieur. Or les énoncés contingents paraissent une bonne base pour introduire les notions de quantification (quantificateur et domaine de validité), qui permettent de transformer un énoncé contingent en une proposition portant une valeur de vérité. De même un travail sur les exemples et les contre-exemples peut faire mieux comprendre la notion de négation d'un énoncé, la notion d'implication, de contraposée, de réciproque.

Théorème et raisonnement

Un tel travail sur la logique est associé dans les programmes du lycée à l'enseignement du raisonnement. Les documents ressources du collège invitent aussi à une sensibilisation des élèves, puisqu'un pas de raisonnement s'appuie sur un théorème, c'est-à-dire un énoncé toujours vrai. Faire répartir des énoncés en « toujours vrai », « toujours faux », « parfois vrai, parfois faux », permet d'attirer l'attention des élèves sur le caractère particulier des règles et théorèmes. Un théorème a des conditions d'application, que l'on doit vérifier : c'est d'abord le domaine de validité. Lorsqu'on veut attirer l'attention des élèves sur ces conditions d'applications, on peut leur proposer une formulation contingente du théorème, de manière à leur faire exhiber les prémisses dont la vérification permettra de conclure ; la recherche d'exemples et de contre-exemples amène à faire le tri, et donc à discriminer les cas où c'est vrai des autres, autrement dit un travail sur les conditions suffisantes.

Algèbre : articuler calcul littéral et numérique

La nature contingente des énoncés étant liée à la présence de variable, l'écriture algébrique va produire des énoncés contingents : en ce sens l'algèbre est aussi un habitat naturel des énoncés contingents. L'intérêt des énoncés contingents pour le registre algébrique transparaît par exemple chez Sackur et Maurel (2000), leur objectif étant de sensibiliser les élèves au caractère nécessaire (et donc non-contingent) des énoncés mathématiques mis en œuvre dans les transformations algébriques utilisés dans la résolution des inéquations. Mais surtout le travail sémantique mis en œuvre sur les énoncés contingents du domaine algébrique répond aux préoccupations de Chevallard quant à *« la disparition de la dialectique de l'arithmétique et de l'algèbre »* qui portait atteinte à *« la dialectique du numérique et de l'algèbre »* (Chevallard, 1985, p. 76). Il prévoyait donc des difficultés des élèves en algèbre liées à l'absence de mise en relation entre les aspects syntaxique (manipulation des expressions algébrique) et sémantique (substitution de valeurs dans l'expression). Ce travail est souvent fait au collège, où on fait étudier la validité des égalités littérales en testant des valeurs. La recherche d'exemples et de contre-exemples permet de mieux comprendre les règles et les enjeux des transformations algébriques.

Algèbre : équations

S'appuyant sur ces travaux, Kouki s'est intéressé en 2006 au cas particulier des équations et inéquations, en montrant la pertinence de la logique des prédicats pour approcher ces notions. On peut en effet regarder l'équation comme une égalité ouverte : l'inconnue est une variable libre, une solution est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. C'est d'ailleurs le point de vue recommandé par les programmes, puisque le document ressources sur le calcul littéral accompagnant les nouveaux programmes de collège (MEN, 2016) confirme ce regard sur l'équation comme phrase ouverte :

> *À travers la pratique du calcul littéral, le signe « = » acquiert trois autres significations :*
>
> *- il est utilisé pour rendre compte de l'universalité d'une égalité [...] On parle alors d'identité ;*
>
> *- il est utilisé comme symbole d'affectation [...] ;*
>
> *- en rupture avec chacune de ces significations qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « = » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « = » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse*
>
> *(MEN, 2016, p. 5).*

Mais on notera que cette mise au point peut marquer l'entrée officielle de la notion de phrase ouverte dans l'enseignement. Elle invite en effet à regarder une équation comme une égalité ouverte $E(x)$; une solution étant une valeur X qui satisfait l'égalité ouverte : $E(X)$ est vraie ; résoudre l'équation c'est chercher un domaine D sur lequel la proposition universelle $\forall x \in D, E(x)$ soit vraie. La recherche d'exemple et de contre-exemple correspond donc bien à la recherche de solutions.

En conclusion, les analyses conduites dans cette deuxième partie soutiennent l'hypothèse qu'il est possible de faire vivre les énoncés contingents en classe de mathématiques. En effet, on peut déjà leur donner une existence théorique grâce à la logique des prédicats, et, comme on vient de le voir, le point de vue de la phrase ouverte est maintenant privilégié pour aborder les équations. De plus, on peut leur donner une existence didactique dans les niches mentionnées, autour du raisonnement (logique, théorème) et de différents types d'égalités (égalité littérale, équation). Dans ce qui suit, nous présentons des situations mises en œuvre en classe de seconde et de Terminale, et reprises pour certaines en formation. Nous nous proposons de montrer qu'une pratique qui ne ferme pas trop vite la porte de la classe aux énoncés contingents permet de travailler des compétences notionnelles, des compétences heuristiques, et des compétences logiques.

3. Des exemples d'exploitation en classe

Dans cette partie, nous allons reprendre certaines des pistes recensées et présenter des situations permettant de les actualiser dans le cours ordinaire de la classe. Il s'agit de s'assurer qu'elles permettent effectivement de produire des apprentissages mathématiques et de préciser lesquels.

3.1. Énoncés contingent et changement de domaine : du plan à l'espace

Nous avons souligné précédemment que lorsqu'on quantifie universellement un énoncé, on doit préciser le domaine considéré, si l'on veut obtenir une proposition qui ait une valeur de vérité :

$\forall x \in D, A(x)$. Le caractère universel d'un énoncé est donc lié au domaine considéré. Or il arrive, dans l'histoire des mathématiques comme dans le parcours de l'élève, que ce qui était considéré comme universellement vrai devienne contingent :

> *Il n'est guère d'énoncé scientifique « vrai », aussi simple, direct, évident et ancien soit-il, qui ne se trouve un jour ébranlé et déstabilisé par sa mise en perspective. Le cadre qui assurait sa validité, jusque -là implicite, se trouve tôt ou tard dépassé et englobé dans un tableau plus large, où la « vérité » de l'énoncé initial est contredite hors des frontière de l'invisible domaine initial (Lévy-Leblond, 1996, pp. 35-36).*

L'histoire du postulat d'Euclide nous fournit l'exemple d'un énoncé vrai mais non prouvable dans la théorie considérée : le théorème *« la somme des angles d'un triangle vaut 180° »* s'est révélé en réalité caractériser la géométrie euclidienne. Une proposition jusqu'alors admise comme vraie est devenue contingente, et on peut même suggérer que c'est précisément en s'intéressant à la possibilité qu'elle ne soit pas vraie qu'on a fait avancer la connaissance mathématique. Dans sa scolarité, l'élève pourra aussi rencontrer des énoncés universels sur un domaine *D*, qui deviennent contingents sur une extension de *D* : *« un carré est toujours positif »*, qui n'est plus toujours-vrai lorsqu'on étend les nombres aux complexes, ou la propriété des valeurs intermédiaires *« si $f(a)<0$ et $f(b)>0$, alors il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$ »* qui n'est plus toujours-vraie lorsqu'on fait découvrir à l'élève qu'il existe des fonctions non continues. Inversement, des énoncés existentiels vrais sur un domaine deviennent contingents sur une restriction de ce domaine : la propriété des valeurs intermédiaires n'est plus *toujours-vraie* lorsqu'on se restreint aux rationnels, comme le montre le cas de l'équation $x^2-2=0$. Dans son parcours, l'élève découvrira que des théorèmes pourtant élémentaires ne sont plus partout vrais, comme par exemple *« la multiplication est commutative »* (cas du produit de matrices), ou *« si un produit est nul, alors l'un de ses facteurs est nul »* (vrai uniquement dans un anneau intègre, faux lorsqu'on travaille par exemple dans des congruences modulo un nombre composé).

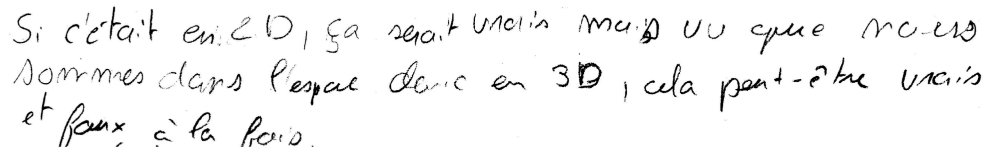
Ce paradoxe de « théorèmes » vrais qui deviennent contingents par modification du domaine peut être une difficulté pour les élèves, parce que même en identifiant le changement de domaines, l'élève ne sait pas quels théorèmes vont rester vrais. Il nous a donc paru intéressant de travailler ce point avec les élèves de seconde, en introduction du chapitre de géométrie dans l'espace.

Dans une classe de 2nde, nous avions discuté au cours précédent autour de la phrase : « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles ». Un élève avait eu l'idée de prendre trois stylos pour produire un contre-exemple dans l'espace, et nous avons invité chaque élève à faire de même pour se persuader du problème. Ce débat a aussi mené à revenir sur la définition de la relation de parallélisme entre deux droites mobilisée par les élèves (ce sont des « droites qui ne se coupent pas ») qui n'est plus pertinente quand on passe du plan à l'espace. La séance suivante, les élèves devaient répondre (sur feuille anonyme) à la question : « Que pensez-vous de la phrase suivante : *dans l'espace, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles* ?». Nous considérons alors comme satisfaisante une réponse qui montre que l'élève prend en compte le caractère contingent pris par l'énoncé dans l'espace. Voici les résultats sur 30 élèves présents (figure 7):

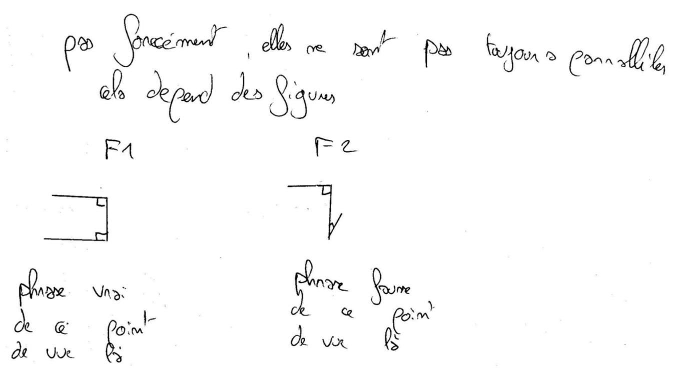
Réponse non satisfaisante, difficilement interprétable, confuse.	9
Réponse satisfaisante, mais sans utilisation des mots vrai ou faux.	6
Réponse satisfaisante, avec utilisation des mots vrai/faux : • « vrai et faux », • « il y a des cas vrai et des cas faux », « pas toujours vrai », « peut s'avérer fausse ».	10
Faux	5

***Figure** 7 : Répartition des réponses des élèves.*

Les réponses satisfaisantes qui paraissent les plus intéressantes au regard de notre problématique sont les suivantes, elles montrent des élèves chez qui la notion de contingent est en acte (figure 8). Certains envisagent la possibilité d'être « vrai et faux à la fois » , d'autres que « ça dépend des figures » en exhibant deux cas possibles (vrai, faux) :



Si c'était en 2D, ça serait vrai(s) mais vu que nous sommes dans l'espace donc en 3D, cela peut être vrai(s) et faux à la fois.



Pas forcément, elles ne sont pas toujours parallèles

cela dépend des figures

Phrase vraie (resp. fausse) de ce point de vue-là.

***Figure 8** : Productions d'élèves exprimant le caractère contingent.*

Un élève hésite sur la qualification du « pas forcément faux » (figure 9) : il sait qu'en maths « si ce n'est pas toujours vrai, c'est faux », mais il semble résister à l'appliquer ici.

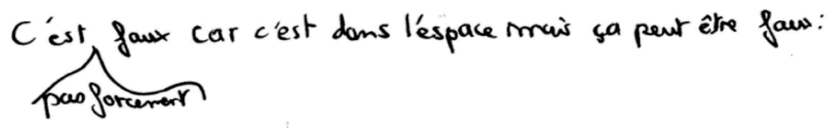


***Figure 9** : Production d'un élève hésitant.*

Les élèves mobilisent donc des mots pour exprimer la contingence. (« pas forcément », « ça dépend des figures »). Durand-Guerrier a déjà défendu que lorsqu'un élève déclare d'une affirmation qu'elle est « vraie et fausse à la fois », cela ne traduit pas forcément un manque de maturité logique ignorant le principe de non-contradiction (Durand-Guerrier, 1999), il exprime bien plutôt la contingence (il existe des cas où c'est vrai et des cas où c'est faux : figure 8). Or il est clair que ce point de vue contingent est pertinent ici, puisqu'on est dans une des situations où le changement de domaine fait perdre son caractère *toujours-vrai* à la proposition.

Cette activité a bien permis des apprentissages notionnels : nouvelle définition du parallélisme, existence de droites non-coplanaires (ni sécantes ni parallèles). Mais l'institutionnalisation a été donnée par la réponse d'un élève (figure 10), qui montre qu'il a en plus compris que ce qui est important autour du *toujours-vrai*, c'est son caractère d'utilité, et que le problème du « pas-toujours- vrai » n'est pas tant sa fausseté que le fait qu'il ne permet pas des démonstrations :

Cette phrase est un "théorème" qui se révèle très utile dans la géométrie en 2D, mais qui malheureusement n'est plus très utile lorsqu'on tente de l'employer en 3D, étant donné qu'alors la phrase peut être fausse.

Cette phrase est un « théorème » qui se révèle très utile dans la géométrie en 2D, mais qui malheureusement n'est plus très utile lorsqu'on tente de l'employer en 3D, étant donné qu'alors la phrase peut être fausse.

Figure 10 *: Production d'un élève sur la notion de théorème.*

Dans cette situation de classe, c'est la nature ouverte de la consigne, liée au caractère contingent de l'affirmation, qui ont permis d'attirer l'attention des élèves sur le domaine. Cette activité a aussi permis de travailler le raisonnement en clarifiant la notion de théorème. Enfin, un tel travail invite à faire la différence entre *« toujours faux »* et *« pas toujours-vrai »*. C'est cette idée que nous allons maintenant approfondir.

3.2. Énoncé contingent et théorème-en-acte : une erreur récurrente, l'égalité $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

Que pensez-vous de l'égalité $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$?

Cette égalité peut être simplifiée car $\sqrt{\ }\,^2$ ça s'annule donc ça reviens au même de faire $x + y$

Cette égalité peut être simplifiée car $\sqrt{\ }$ et ^{2} ça s'annule donc ça revien(t,s) au même de faire $x+y$.

Figure 11 *: Production d'un élève « racine et carré ça s'annule ».*

L'élève applique ici (figure 11) la règle bien connue « racine et carré ça s'annule ». L'élève n'est pas dénué de bon sens, il n'a pas inventé une règle absurde, mais il a appliqué un théorème-en-acte en dehors de ses conditions d'applications. Sackur et Maurel (2000) s'étaient déjà intéressées à *« l'erreur fréquente et tenace en algèbre : si $a>b$ alors $a.x>b.x$ »* . Elles y définissent la notion de *« connaissance locale »* :

> *Elle est « vraie » au sens usuel du terme, à l'intérieur de certaines limites ; le sujet ignore l'existence de ces limites [...]. Ces limites sont identifiables par un « expert », c'est-à-dire quelqu'un qui possède une connaissance moins locale que le sujet. (Sackur & Maurel, 2000, p. 7).*

On reconnaît ici le phénomène de contingent par changement de domaine qui a été soulevé dans la partie précédente et clairement décrit dans la figure 4 ; on peut relier les erreurs au fait que les élèves ne sont pas conscients du caractère contingent de leur règle :

> *La connaissance $a>b$ alors $a.x>b.x$ qui conduit les élèves à multiplier par x dans une inéquation sans s'occuper du signe de x est pour nous une connaissance locale : vraie quand on travaille sur les réels strictement positifs, non cohérente, non valide, non efficace quand on sort de ces limites pour l'appliquer à tous les réels (Sackur & Maurel, 2000, p. 7).*

Nous proposons de travailler avec les élèves sur la légitimité des transformations algébriques, en remplaçant la question « est-ce qu'on a le droit ? » par « quand a-t-on le droit ? ». Aussi, plutôt que de qualifier leur règle de fausse, alors que l'élève voit bien que souvent elle ne l'est pas, nous l'invitons à chercher dans quels cas cette règle s'applique, pour mieux voir ceux où elle ne s'applique pas. C'est pourquoi nous avons fait travailler des élèves de seconde et de Terminale sur l'égalité $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$.

L'analyse *a priori* prévoit plusieurs approches possibles. La présence de la lettre *x* peut orienter l'élève vers différents chapitres : les équations (*x* est une inconnue), les fonctions (*x* est une variable), le calcul littéral (*x* est une lettre remplaçant un nombre quelconque), renvoyant aux cadres numérique, fonctionnel ou algébrique (Douady, 1986). Un regard fonctionnel peut amener à placer le problème dans le registre graphique (courbe représentative) ou dans le registre numérique (tableau de valeurs). Un regard algébrique peut l'amener à mettre en œuvre une procédure plutôt syntaxique (se placer dans le registre de l'écriture symbolique et transformer en mettant en œuvre des règles de transformation algébrique) ou une procédure plutôt sémantique (remplacer les lettres par des nombres pour s'intéresser à la valeur numérique de chaque expression). Enfin l'élève peut s'exprimer en mobilisant la langue naturelle (*« la racine annule le carré »*) ou le langage graphique (*« les deux courbes sont différentes, donc... »*).

Une analyse des réponses montre que certains élèves ont bien retenu qu'on peut attribuer des valeurs numériques aux lettres. Mais même avec des nombres, beaucoup d'élèves ne donnent pas de sens à ces écritures, et continuent à mettre en œuvre une procédure syntaxique erronée (la racine enlève le carré) sans contrôler sémantiquement en regardant les valeurs en jeu.

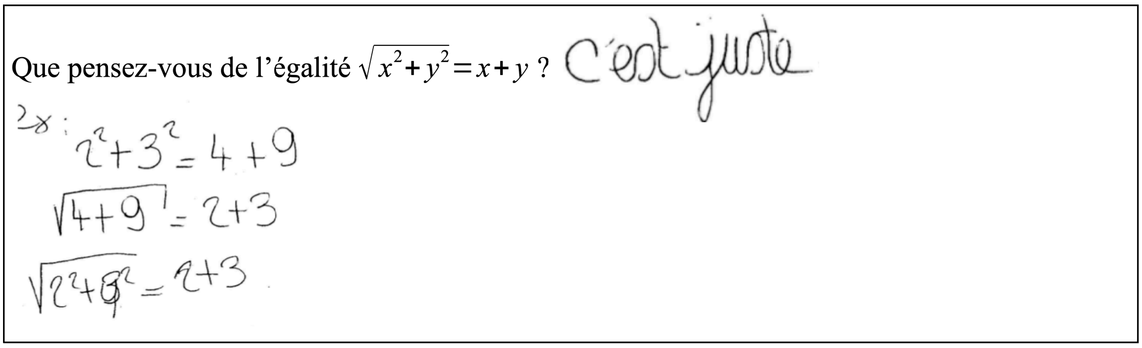
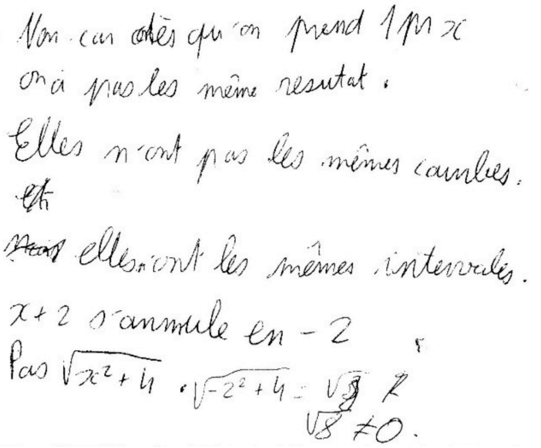


Figure 12 *: Production d'un élève.*

On peut penser que le fait qu'ils ne puissent pas « calculer le résultat » à cause de la racine carrée (aucun n'a pensé à prendre sa calculatrice) les empêche de contrôler numériquement la réalité de l'égalité. Ces réponses confirment les travaux de Kouki (2006) : même avec des valeurs numériques, les élèves raisonnent syntaxiquement, ils appliquent mécaniquement leur règle sans s'intéresser à la valeur sémantique de leur expression. Un travail sur l'algèbre paraît donc nécessaire pour ces élèves.

Des terminales ont été confrontés à une question proche : *« Peut-on écrire $\sqrt{x^2+4}=x+2$? »*. Les élèves de Terminale S, sont beaucoup plus à l'aise avec ces écritures, et mobilisent une plus grande variété de méthodes pertinentes : procédures sémantiques (figure 13) ou syntaxiques (figure 14).



Non car dès qu'on prend 1 pour x on a pas les mêmes résultats.

Elles n'ont pas les mêmes courbes

et

elles n'ont pas les mêmes intervalles [de définition]

$x+2$ s'annule en -2

Pas $\sqrt{x^2+4}$. $\sqrt{-2^2+4}=\sqrt{8}\neq 0$

Figure 13 *: Production d'un élève qui mobilise plusieurs méthodes sémantiques.*

Peut-on écrire que $\sqrt{x^2+4}=x+2$?

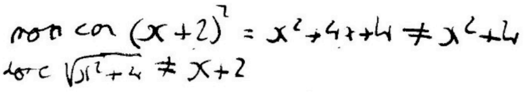
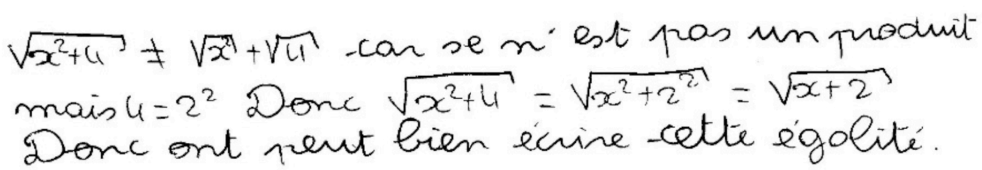
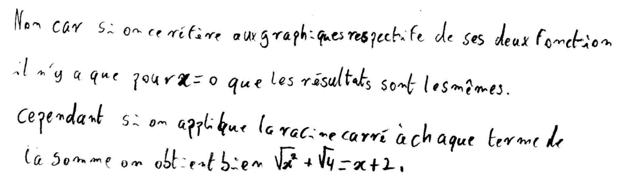


Figure 14 *: Production d'un élève qui mobilise une procédure syntaxique correcte.*

Ils montrent en acte qu'ils savent que l'égalité sémantique peut être dissimulée par des expressions d'écritures syntaxiques différentes, mais peut être établie par la mise sous une même forme (ici l'écriture développée et réduite des polynômes). Mais la mobilisation des deux points de vue sémantique et syntaxique conduit parfois à des réponses contradictoires (figure 15) :





Non car si on se réfère aux graphiques respectifs de ces deux fonctions il n'y a que pour $x=0$ que les résultats sont les mêmes.

Cependant si on applique la racine carrée à chaque terme de la somme on obtient bien $\sqrt{x^2}+\sqrt{4}=x+2$

Figure 15 *: Production d'élèves hésitants.*

Les extraits montrent qu'alors que la syntaxe de l'algèbre est produite pour rendre compte de la sémantique (c'est vrai avec les lettres parce que c'est vrai avec les nombres), beaucoup des élèves n'ont pas construit ce lien, leur contrôle sémantique n'est pas opérant, soit parce qu'ils voient les nombres comme des symboles (figure 12), soit qu'ils n'approfondissent pas la contradiction apportée (figure 15). La mise en commun a souligné les regards possibles issus de différents registres (algébrique, numérique, graphique).

Dans cette situation de classe, c'est la nature ouverte de la consigne, lié au caractère contingent de l'égalité en jeu, qui ont permis la mobilisation de ces différents regards et en particulier le regard numérique. Le croisement des regards est venu enrichir leurs points de vue sur les écritures littérales, en les articulant avec le regard numérique.

3.3. Énoncé contingent et quantification d'une égalité ouverte

La prochaine situation est basée elle aussi sur une égalité contingente, nous allons montrer comment de telles égalités permettent aussi de travailler la quantification au lycée. Le travail précédent a ainsi été prolongé dans la même classe de Terminale à partir de l'énoncé *« Soit x un réel ; est-il vrai que* $e^{x+2}=e^x+e^2$ *? ».* Il est difficile pour les élèves d'éviter de nier cette égalité en exhibant la « bonne formule » $e^{x+2}=e^x\times e^2$; ceci ne permet pourtant pas de répondre à la question posée, qui est bien de savoir si l'égalité donnée est toujours vraie, toujours fausse, ou seulement contingente. L'analyse *a priori* prévoit diverses procédures (*cf.* figure 16), dans la lignée des deux situations précédentes :

<table>
<tr><th></th><th>Procédure syntaxique</th><th>Procédure sémantique</th><th>Procédure graphique</th></tr>
<tr><td>Égalité universelle (vraie pour tout x, portant sur un domaine infini, ou « très grand »).</td><td>Une procédure syntaxique peut conduire à une égalité reconnue comme toujours vraie.</td><td>Une procédure sémantique peut permettre de réfuter le caractère universel de l'égalité par la production d'un contre-exemple, mais elle ne peut en prouver la vérité.</td><td rowspan="2">La procédure graphique permet de se convaincre rapidement (explication), mais elle ne constitue pas une démonstration.
Par ailleurs, en comparant les courbes, l'élève a-t-il conscience de faire une comparaison point par point ? (point de vue global : les fonctions sont égales plutôt que point de vue particulier : égalité pour chaque x).
Cette procédure est limitée aux égalités mettant en jeu une seule variable.</td></tr>
<tr><td>Égalité contingente (vrai pour certaines valeurs assignées à x, faux pour d'autres).</td><td>La procédure syntaxique peut être assimilée à la résolution de l'équation.</td><td>Une procédure sémantique permet de se persuader du caractère contingent de l'égalité, et peut amener à rechercher le domaine de validité.</td></tr>
</table>

Figure 16 *: Différentes procédures, en lien avec le regard porté sur l'équation.*

Les réponses des élèves montrent qu'ils différencient bien une égalité universelle (en mentionnant l'égalité $e^{x+2}=e^x e^2$ correcte pour un x quelconque) qui se traduit par l'égalité des deux représentations graphiques, avec une égalité contingente (vraie pour un nombre limité de valeurs). La correction a conduit les élèves à vouloir rechercher le (ou les) valeurs où c'est effectivement égal, ce qui les a amenés à résoudre l'équation (difficile !).

Soit x un réel ; est-il vrai que $e^{x+2}=e^x+e^2$?

Non, $e^{x+2} \neq e^x + e^2$. Pour $x = -1$ par exemple

$e^{-1+2} = e^1 \simeq 2,72$

alors que $e^{-1} + e^2 = 2,72 + 7,39 = 10,10$.

or $2,72 \neq 10,10$.

Pour que sa soit bon on aurait du avoir $e^x \times e^2$ ce qui est bien égal à e^{x+2}.

Soit x un réel ; est-il vrai que $e^{x+2}=e^x+e^2$?

Cette égalité n'est vraie que pour un seul point car quand on trace les courbes représentatives des deux fonctions, on voit qu'elles ne se croisent qu'en un point.

Figures 17 a et 17b *: Productions d'élèves.*

Après le travail sur la racine carrée, cette nouvelle situation a permis de mobiliser à nouveau le croisement de cadres (numérique, algébrique, fonctionnel), d'articuler le double regard sémantique (le contre-exemple figure 17*a*) et syntaxique (avec la résolution de l'équation), de relier ces résultats avec le regard fonctionnel (figure 17*b*). Le bilan a en outre permis d'utiliser les quantificateurs, puisque nous avons pu conclure en notant :

- la proposition « pour tout réel x, $e^{x+2}=e^x+e^2$ » est fausse ;
- la proposition « il existe un réel x, $e^{x+2}=e^x+e^2$ » est vraie.

Précisons que, même en série scientifique, la notion de quantificateur et les locutions « pour tout », « quel que soit », « il existe » sont nouvelles pour les élèves, et loin d'être naturelles. Ce travail a donc permis de mettre en œuvre une suggestion du document ressource :

> *Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde. Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande (MEN , 2009b, p. 3).*

Nous soulignons que ce bilan a été rendu possible parce que la question « est-il vrai que » autorisait des réponses contingentes comme « ça dépend, il y a un cas où c'est vrai et des cas où c'est faux ». C'est donc bien le fait de laisser vivre la contingence qui, en rendant pertinente l'introduction de quantificateurs, a permis de travailler des éléments de logique. Ces exemples montrent que non seulement il est possible de faire vivre les énoncés contingents en classe, mais surtout que cela peut contribuer aux apprentissages. Comment amener les enseignants à s'emparer de cette possibilité ?

4. Comment amener les enseignants à faire vivre en classe des énoncés contingents ?

Les exemples présentés montrent que les élèves disposent des ressources langagières pour exprimer la contingence de certains énoncés dans des situations où on leur en donne la possibilité, et que l'exploitation de ces situations a bien permis des apprentissages. Mais pour que ce point de vue puisse vivre dans les classes, encore faut-il que les professeurs soient convaincus qu'il apporte des avantages, et aient les ressources pour le faire.

4.1. Les énoncés contingents, supports pour enrichir le regard épistémologique sur les mathématiques

Proposer des énoncés contingents pour favoriser les débats en classe

Nous pensons avoir montré que la prise en compte explicite des énoncés contingents fournit des pistes pour diversifier les activités proposées en classe. Or

> *nous admettons qu'une certaine variabilité des activités proposées aux élèves, obtenue grâce à des énoncés diversifiés [...] peut favoriser les apprentissages, en améliorer la qualité [...] (Robert & Rogalski, 2002, p. 11).*

Ces auteurs ajoutent que diverses formes d'énoncé induisent différents *« niveaux de mise en fonctionnement des connaissances »*. Ainsi, un travail sur un énoncé mathématique peut être amené par des consignes plus ou moins ouvertes. On peut demander de « démontrer que l'énoncé est vrai (respectivement faux) ». Il s'agit d'une question fermée, qui appelle une démonstration. L'élève va mettre en œuvre des connaissances relevant du formalisme, de sa capacité à mettre en œuvre les règles de la démonstration mathématique. On peut aussi demander de « chercher si l'énoncé est vrai ou faux ». Il s'agit d'une question plus ouverte, qui appelle une conjecture. On reconnaît là typiquement le type d'énoncé proposés pour un *« débat scientifique »* tel qu'il a été développé par Legrand :

> *Pour entendre en compréhension une proposition scientifique, il faut douter de sa vérité et de sa pertinence, il faut se sentir dans l'obligation d'exercer sur elle une réelle vigilance épistémologique (Legrand, 1993, p. 125).*

Dans ces deux types de situations, on travaille en logique binaire soit vrai / soit faux : les énoncés proposés doivent donc être des propositions bien formées au sens de notre deuxième partie. Généralement, on démontre que c'est vrai par une procédure syntaxique (règles), on démontre que c'est faux par une procédure sémantique (contre-exemple). Mais on peut aussi formuler la consigne d'une troisième façon : « chercher dans quel cas l'énoncé est vrai, dans quel cas il est faux ». Une telle consigne peut amener les élèves à chercher des exemples et des contre-exemples, ce qui peut lui faire mieux cerner les conditions de validité d'un théorème. Elle peut aussi amener à s'intéresser aux conditions nécessaires (qu'est-ce qui fait que c'est faux ?) ou suffisantes (qu'est-ce qui fait que c'est vrai ?) qui sont exactement le genre de question qu'on se pose dans la recherche :

> *La prise en compte des énoncés contingents permet de construire des situations ouvertes du point de vue des conditions de détermination de la vérité, au-delà du seul fait de se prononcer sur la valeur de l'énoncé (Durand-Guerrier, 2005, p. 141).*

Une phrase ouverte est un bon support pour travailler sur les exemples et les contre-exemples (procédures sémantiques), sur des démonstration partielles ou locales (procédures syntaxiques) et peut permettre de mieux s'approprier une proposition mathématique.

Réunir la logique commune et la logique mathématique en questionnant la bivalence soit vrai/ soit faux

Mais l'intérêt de faire vivre la notion d'énoncé contingent en mathématique nous paraît surtout épistémologique. Les situations présentées, en confrontant les élèves à la notion de « vérité contingente », enrichissent leur regard sur le monde mathématique. D'une part en replaçant ce monde mathématique dans un univers qui obéit à la logique commune, plutôt qu'un univers avec sa logique particulière. Comme ailleurs, il existe des phrases « parfois vraies, parfois fausses ». Comme ailleurs, pour pouvoir décider du caractère vrai ou faux d'une proposition, celle-ci doit être convenablement formée : lorsque la proposition met en jeu une variable ou un objet indéfini, on ne pourra généralement pas attribuer *a priori* de caractère vrai ou faux, on a affaire à un énoncé contingent, qui peut être vrai ou faux selon les valeurs attribuées. Comme ailleurs, les quantificateurs sont alors indispensables pour préciser ce que recouvre cette variable (le mathématicien utilise la locution « pour tout » pour dire « toujours vrai », et utilise « il existe » pour dire « parfois vrai »). Comme ailleurs, il est alors indispensable de préciser le domaine concerné : ce qui est vrai dans un cadre donné peut cesser de l'être dans un autre cadre.

D'autre part, la notion d'énoncé contingent permet de distinguer « on ne peut pas savoir » (car ça dépend des cas) de « je ne sais pas », le « toujours faux » du « parfois faux ». Il permet de caractériser les théorèmes mathématiques (nécessaires) en leur opposant des énoncés contingents. On peut alors insister sur le fait qu'un théorème est un énoncé toujours vrai, il porte une quantification universelle implicite puisqu'on doit pouvoir l'appliquer sans douter de sa validité.

4.2. Les énoncés contingents, un nouveau regard pour revisiter certaines notions

Les énoncés contingents fournissent un bon support pour travailler certaines notions : les énoncés contingents de la forme $\forall x, A(x)$ amènent par exemple à questionner le domaine de validité, et les énoncés contingents *« soit* $x \in D$, $A(x)$ *»* peuvent favorisent la recherche d'exemples et de contre-exemples. Certaines notions peuvent même être enseignées comme des énoncés contingents : c'est le cas des équations, et peut-être aussi des propositions conditionnelles.

L'équation comme égalité contingente

Jusqu'à récemment, l'entrée dans l'algèbre se faisait souvent par la résolution d'équations et par le calcul littéral, en privilégiant les manipulations syntaxiques (transformation d'écriture), et tendait à faire oublier le regard sémantique (on peut assigner des nombres aux lettres). On a vu que les programmes 2016 privilégient l'introduction de l'équation comme égalité contingente (*« une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse »*). Cette mise au point peut faire espérer une meilleure articulation syntaxe/sémantique dans l'enseignement des équations en France, en réponse aux conclusions de Kouki à propos de l'enseignement secondaire tunisien :

> *[...] bien que le point de vue sémantique soit le premier point de vue présenté dans la définition des équations et inéquations au début du collège, il occupe, dans les manuels tunisiens, une place assez timide par rapport à celle des techniques syntaxiques de résolution (Kouki, 2006, p. 22).*

Sur cette idée, les programmes proposent d'introduire les équations à travers des situations basées sur des programmes de calcul. Ceci est en accord avec certains résultats de la recherche (Artigue, 2012 ; Barallobres, 2004 ; Kouki, 2006, 2009). On peut donc présenter l'équation comme une égalité qui comporte des variables (appelées inconnues), et qui est de ce fait une égalité contingente. Quand on écrit *« résoudre l'inéquation, c'est trouver tous les nombres pour lesquels l'inégalité est vraie »* ou *« résoudre l'inéquation d'inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie »*, on reconnaît bien en arrière-plan les notions de phrase ouverte et de satisfaction que nous avons présentées en première partie.

C'est l'équation comme phrase ouverte qui permet de travailler ce lien lettre/nombre indispensable pour maintenir le contrôle du sens, en invitant à un travail sémantique régulier de test de valeurs afin de discriminer entre les solutions et les non-solutions, préliminaire à un travail syntaxique de résolution de l'équation par des méthodes algébriques. Par ailleurs cette définition d'équation comme une « égalité ouverte » peut favoriser un traitement plus correct des équations « pathologiques » comme $0x=8$ (Cerclé et *al.*, 2015). Ce regard sur l'équation comme égalité contingente est bien celui prôné par le document ressources précédemment cité.

L'équation de courbe comme une équation (donc une égalité contingente)

Ce regard prépare aussi favorablement l'acceptation d'autres types d'équation que sont les équations de droites ou de courbe (avec leurs deux inconnues, qu'on ne « résout » pas algébriquement). C'est ce que montrent les travaux de notre groupe didactique de l'IREM de Montpellier, dans lequel nous nous sommes intéressés à la notion d'équation de droite, pour essayer de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves, travaux présentés dans le cadre des Corfem 2015 et 2016. Les différents cadres en jeu (cadres fonctionnel, graphique, géométrique, algébrique, numérique), le statut et le sens des différentes lettres en jeu (variables, paramètres), les différents notions attachées (vecteurs colinéaires, fonctions affines, équations, équivalence) expliquent ces difficultés. Une de nos hypothèses est qu'une des difficultés vient de la notion même d'équation qui n'est pas claire pour les élèves, puisqu'ils la voient comme une procédure à mettre en œuvre (« il faut trouver *x* »), vision qui n'est pas pertinente dans le cas des équations de droites (Cerclé et *al.*, 2015). L'équation de droite (ou de courbe) n'est de plus que rarement enseignée comme une équation, ni même regardée comme équation : cette année, sur une trentaine de professeurs de maths stagiaires, aucun n'a utilisé le mot « solution » pour justifier l'appartenance d'un point à une droite d'équation donnée. Pourtant, si on adapte l'idée de solution aux équations à deux inconnues : *« Résoudre une équation à deux inconnues x et y, c'est trouver les couples-solutions / toutes les valeurs du couple $(x\,;y)$ pour lesquelles l'égalité est vraie »*, autorise à écrire que *« la courbe (ou la droite) d'équation $y=f(x)$ est l'ensemble des points dont le couple de coordonnées $(x\,;y)$ est solution de l'équation »*. Regarder l'équation de courbe comme une égalité contingente reconstruit ainsi le regard sur l'équation de courbe en tant qu'équation.

La proposition conditionnelle comme implication contingente

Regarder la proposition conditionnelle *« si $A(x)$, alors $B(x)$ »* comme une phrase ouverte autorise à en chercher des exemples et des contre-exemples. On peut ainsi faire formuler aux élèves ce qu'est un exemple (un cas pour lequel la phrase est vraie, c'est-à-dire pour lequel *A* et *B* sont vérifiés) et un contre-exemple (un cas pour lequel la phrase est fausse, c'est-à-dire pour lequel *A* est vérifié pais pas *B*). On peut aussi faire remplir des tableaux :

	A vrai	*A faux*
B vrai		
B faux	////////////////	

L'absence de cas pour lesquels *A* est vrai et *B* est faux (case hachurée) se traduit à la fois par *« si A est vrai, alors B est nécessairement vrai »* (le « théorème direct ») et par *« si B est faux, alors*

A est nécessairement faux » (la contraposée) : ces deux énoncés ont donc même valeur de vérité, ils sont équivalents. Ce tableau montre également qu'on ne peut rien dire de la réciproque, qui n'a donc pas de lien de vérité avec le théorème direct.

Par ailleurs, Deloustal-Jorrand (2000) a montré qu'une « conception causale » (*A* est la cause de *B*) de l'implication est très répandue chez les élèves, et est la cause de nombreuses erreurs, notamment *« il apparaît qu'une conception causale-temporelle de l'implication empêche de différencier la condition nécessaire de la condition suffisante »* (p. 68). Deloustal-Jorrand (2000, 2004) soutient la thèse qu'une articulation entre les trois cadres sur l'implication (cadre logique, cadre ensembliste, cadre du raisonnement déductif) est nécessaire pour une bonne appréhension de l'implication, et souligne alors l'intérêt de travailler sur des implications ouvertes $A(x) \Rightarrow B(x)$ pour favoriser le développement et l'articulation de ces trois cadres. Regarder les propositions conditionnelles comme des implications contingentes permet de développer des connaissances de logique.

4.3. Une place dans le cadre institutionnel pour les énoncés contingents

Il ne s'agit pas pour autant d'enseigner le contingent à nos élèves : le concept d'énoncé contingent est typique de connaissances qui sont utiles pour l'enseignant, mais ne sont pas des connaissances à enseigner. Mais pour que les enseignants s'autorisent à faire vivre dans la classe des énoncés contingents, plusieurs conditions semblent indispensables. On peut penser que le fait de ne pas avoir de mot pour exprimer un phénomène rend difficile sa mise en lumière, et la formation des enseignants et les instructions officielles privilégient souvent leur mise à l'écart au nom de la quantification universelle implicite.

Proposer des ressources qui questionnent la quantification universelle implicite et évoquent clairement la notion d'énoncés contingents

Plutôt que d'entraîner l'élève à « reconnaître la quantification universelle implicite », nous préférons expliciter cette quantification grâce à des mots comme « tout », « quel que soit » ou « pour n'importe quel », ou comme « toujours », « nécessairement », « certainement », « on est sûr que », ou faire comprendre le caractère toujours vrai des théorèmes. Nous pensons surtout plus pertinent d'attirer l'attention des élèves sur la question de la quantification. Mais cela suppose que les enseignants se questionnent eux-mêmes sur la quantification universelle implicite afin d'être conscient de ses limites et de ses conditions d'utilisation. Or la notion de phrase ouverte permet ce questionnement. On peut alors se demander :

> *Comment une formation permet-elle que se constitue un savoir de référence utile aux enseignants pour appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement ? (Mesnil, 2014, p. 416).*

Ceci est d'autant plus important que les programmes ont des attentes en termes de logique, or c'est un domaine sur lequel les connaissances des professeurs sont souvent fragiles alors qu'au contraire ils devraient avoir des connaissances au-delà de ce qui est à enseigner. Des documents ressources qui sensibilisent à la logique des prédicats, ou tout au moins aux notions d'énoncé ouvert et de satisfaction d'une phrase ouverte, pourraient apporter des éléments de réponse. De tels documents pourraient d'ailleurs clarifier auprès des enseignants la notion d'équation.

Faire des énoncés contingents un enjeu de formation

C'est pourquoi nos étudiants du master MEEF en mathématiques de Montpellier se voient proposer des séances de didactique de la logique. Nous leur présentons d'abord les exemples de la première partie afin de leur faire questionner leur certitude « un énoncé est soit vrai soit faux » et « la pratique de la quantification universelle implicite ». Nous reprenons le formalisme de la première partie en introduisant les différents types d'énoncés (phrase ouverte, propositions singulières, propositions quantifiées, énoncés contingents). Nous étudions ensuite quelques situations qui permettent de consolider leur compréhension de l'implication (table de vérité de l'implication singulière, regards logique, ensembliste et raisonnement en lien avec les travaux de Deloustal-Jorrand (2000, 2004) et de l'équation en les interprétant comme des phrases ouvertes. Nous analysons aussi quelques utilisations en classe.

Conclusion

À travers l'étude de la notion d'énoncé contingent et de son écologie, nous avons questionné un certain parti pris dans les activités proposées aux élèves mettant en jeu des questions de logique, consistant à imposer l'idée que « un énoncé mathématique est soit vrai soit faux », et son corollaire « un contre-exemple suffit à invalider un énoncé ». Ce parti pris ne laisse pas la place à la notion de contingent qui permet de qualifier des énoncés « parfois vrai, parfois faux » et pour lesquels « on ne peut pas décider » entre vrai et faux. Nous avons vu que l'argument sous-jacent, qui poserait par défaut une quantification universelle implicite, peut pourtant trouver une alternative par l'introduction de la logique des prédicats qui autorise des énoncés ouverts, donc par essence contingents.

Nous pensons avoir montré la pertinence d'une prise en compte explicite des énoncés contingents dans la classe de mathématiques. Notre travail a en effet cherché à montrer les perspectives ouvertes par la notion d'énoncés contingents pour l'enseignement, sur les plans épistémologique (idée d'une vérité contingente) et didactique (fournir des supports pour introduire ou travailler un savoir). Les exemples de situations traitées en classe et analysées sur la base de productions d'élèves montrent que les énoncés contingents proposés aux élèves ont permis de travailler le raisonnement en mettant en lumière des éléments de logique attendus par le programme, en questionnant la notion de théorème et son utilisation dans la déduction. L'étude d'énoncés contingents permet également d'acquérir des notions de logique en fournissant un bon support pour travailler la quantification, l'implication, la notion d'équation.

La notion d'énoncé contingent peut également fournir des situations pour travailler des notions mathématiques. Ainsi, les procédures sémantiques et syntaxiques vont pouvoir aussi s'exercer dans le cadre de l'algèbre, et l'éclairage par la notion d'égalité contingente nous semble permettre de donner du sens aux règles de transformation algébrique (égalités toujours vraies : identités) et à la notion d'équation (égalité contingente). Le travail sur des égalités contingentes permet aussi de (re)donner du sens aux notions d'équation algébrique et d'équation de courbe, en lien avec l'articulation littéral/numérique.

Mais un certain nombre d'obstacles empêchent les énoncés contingents de vivre dans la classe de mathématiques. Ces obstacles sont sans doute liés à la nature même des mathématiques qui a pour objet de produire des théorèmes, qui sont des énoncés vrais. Pour écrire ces théorèmes, on utilise des quantificateurs, qui apparaissent explicitement dans le langage mathématique formalisé, mais sont souvent implicites dans le langage utilisé dans le secondaire, ce qui permet d'alléger le discours. Or nous soutenons l'idée que cette pratique langagière de la quantification universelle implicite est discutable tant le plan logique que sur le plan de l'enseignement. Nous proposons alors des pistes pour fermer la porte à cet implicite, et de laisser entrer la notion d'énoncé contingent. Pour que les enseignants s'autorisent à faire vivre les énoncés contingents dans la classe, nous suggérons des formations dans lesquelles on s'appuie sur la logique des prédicats pour sortir d'une vision binaire pas toujours pertinente, et dans lesquelles on montre l'intérêt des énoncés contingents pour les apprentissages et l'enseignement.

Références bibliographiques

Arsac, G. et *al.* (l992). *L'initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon.

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique : l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques*, 101-140.

Artigue, M. (2012). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre*. educmath.ens.lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference- nationale/ contributions/conference-nationale-artigue-1

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *RDM vol. 24, 2.3*, 285-328.

Cerclé, V., Chesnais, A., Gosselin, E., Leberre, J., Nyssen, L. (2015). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et des registres à propos des équations de droites, *Actes Corfem Nimes 2015*.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation, Contribution à l'ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, A. Tiberghien (éds), *La transposition didactique à l'épreuve*, La Pensée sauvage, Grenoble, 135-180.

Chevallard, Y. (l985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x, 5*, 51-94.

Deloustal, V. (2000). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x, 55*, 35-70.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle, et théorie des ensembles*. Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble 1.

Douady, R. (l986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31

Durand-Guerrier, V. (l996). *Logique et raisonnement mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université de Lyon.

Durand-Guerrier, V. (l999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M.-C., Reynaud-Fleury, J. (2000). *Le statut logique* *des énoncés dans la classe de mathématiques. Éléments d'analyse pour les enseignants*. Brochure IREM, Université de Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 5-44.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon 1.

Foucault, M. (1971). *L'ordre du discours*. Gallimard, Paris

Hérault, F., Huet, C., Kel Notter, G., Mesnil, Z. (2016). À propos de quantification : quelques activités de logique dans nos classes. *Petit x, 100*, 35-65.

Kouki, R. (2006). Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x, 71*, 7-28.

Kouki, R. (2009). Le raisonnement logique pour assurer un enseignement de la pensée mathématique : le cas des équations et des fonctions algébriques. *Actes du Colloque Espace mathématiques Francophone*.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM, 10*.

Lévy-Leblond, J.-M. (1996). *Aux contraires*. Gallimard.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Murphy, C., Weima, S., Durand-Guerrier, V. (2016). Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde. *Petit x, 100*, 7-34.

Robert, A. & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur les exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. *Petit x, 60*, 6-25.

Sackur, C. & Maurel, M. (2000). Les inéquations en classe de seconde, une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x, 53*, 5-26.

Tarski, A. (1936, 1971 pour la traduction française). *Introduction à la logique*. Édition française chez Gauthier-Villard.

Programmes et documents d'accompagnement

MEN (2009a). *Ressources pour le collège ; Raisonnement et démonstration*. Disponible sur Eduscol.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonneme

ntetdem onstration_223500.pdf

MEN (2009b). *Document ressources pour la classe de seconde, Notations et raisonnement mathématiques*. disponible sur Eduscol. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_10918 0.pdf

MEN (2016). *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 4), Ressources thématiques, Calcul littéral : Utiliser le calcul littéral*. Disponible sur Eduscol. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_ nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf

MEN (2019a). *Bulletin officiel n° 1 du 22 janvier 2019. Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique*.

MEN (2019b). *Bulletin officiel n° 1 du 22 janvier 2019. Programme d'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première de la voie générale*.

Hachette (2012). *Manuel Déclic TS*.

Site UNISCIEL. http://uel.unisciel.fr/mathematiques/logique1/logique1_ch03/co/apprendre_ch3_01.html (consulté le 13/07/2019).