

I. Introduction à la logique et au raisonnement mathématique

Note. Les enseignants pourront choisir eux-mêmes les problèmes ou exercices pour leurs élèves, de la 6^{ème} à la Terminale.

I.1 Propositions, variables, ET, OU, quantificateurs ... et le terme « un »

L'apprentissage du langage mathématique est incontournable. Il est nécessaire pour comprendre un énoncé, raisonner, communiquer, valider une démonstration et évaluer les compétences visées par les programmes.

Exercice 1. Les phrases suivantes sont-elles des *propositions* ? Si non, peut-on les compléter pour avoir des propositions ?

2 est pair	(proposition vraie)
3 est pair	(proposition fausse)
n est pair	(phrase ou proposition ouverte, la variable n est « libre »)
Soit n un entier pair	(introduction d'une variable dans une démonstration)
Il fera beau demain	(ce n'est pas une proposition)
2 est pair ET 3 est pair	(proposition fausse)
2 est pair OU 3 est pair	(proposition vraie)
n est pair OU $n+1$ est pair	(proposition ouverte, vraie quelle que soit sa clôture)
n est pair ET $n+1$ est pair	((proposition ouverte, fausse quelle que soit sa clôture)

Exercice 2. Comment interpréter le « un » dans les phrases suivantes ? Comment les réécrire pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté ? Sont-elles vraies, fausses, ou « on ne peut pas répondre » ?

Le carré d'un nombre réel est positif.	(tout)
Un nombre entier est pair si ...	(un quelconque)
Un carré est un parallélogramme.	(tout, un quelconque)
Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit.	(tout, un quelconque, au moins un)

Exercice 3. Implication en mathématique

Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont l'implication :
 « Si n est pair, alors $n + 1$ est un nombre premier ».

Variations entre ET et OU dans certaines écritures équivalentes

La phrase : « Les solutions de l'équation $x^2+x-2=0$ sont $a=-2$ ET $b=1$ »

s'écrit aussi : « Pour tout x réel, $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$ OU $x=1$ »

Les termes « un », « ou », « et » dans la langage naturel. Un exercice préliminaire

Exercice 0. Donner tous les sens que vous connaissez du mot « un » et des conjonctions « et » et « ou », avec des exemples. (On peut ainsi mettre en évidence la pluralité des sens de ces mots dans le langage courant, et donc la nécessité de le préciser en mathématiques). En voici quelques-uns :

Un : le chiffre, le nombre,

l'article ou le pronom indéfini : un, au moins un, un parmi d'autres

Exemples : « une bactérie est un être vivant », « l'un et l'autre »

Et : sert à exprimer une addition, une opposition, un rapprochement, une conséquence
 sens liés au temps ou à la causalité, peut relier des substantifs ou des adjectifs

Synonymes : alors, avec, comme, plus, puis,

Exemples : « demain, j'irai au travail et au cinéma », « Il est grand et mince », « Manon et Line »

Ou : sert à exprimer une alternative, une équivalence, une exclusion, une explication

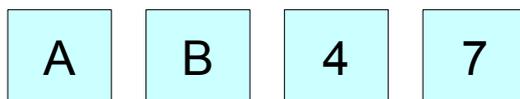
Synonymes : ou bien, sinon, soit

Exemple : on ne dira pas « j'ai un vélo ou une moto », surtout si on a les deux !

Différents raisonnements : exhaustivité des cas, absurde

Problème 1. « La tache de Wason »

On présente quatre cartes sur lesquelles sont écrits respectivement A, B, 4 et 7. On sait que sur chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir l'autre face.



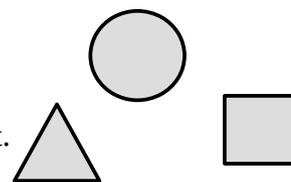
Quelle(s) carte(s) **au plus** devez-vous retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Si une de ces cartes a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

Problème 2. Jetons et couleurs

On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond et Triangle) et de trois couleurs différentes (Rouge, Vert et Bleu). Chaque jeton a une seule couleur.

On suppose que les trois affirmations suivantes sont vraies :

- A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.
- A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.
- A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.



Donnez toutes les solutions (s'il y en a).

Problème 3. Carrés et triangles

Une boîte contient des pièces carrées et des pièces triangulaires. Ces pièces sont soit rouges, soit vertes. On sait que toutes les pièces carrées sont rouges. Parmi les affirmations suivantes, indiquez si elles sont vraies, fausses ou si on peut pas savoir. Justifiez.

- A1. Il n'y a que les pièces carrées qui sont rouges.
- A2. Il n'y a aucune pièce carrée verte.
- A3. Toutes les pièces triangulaires sont vertes.
- A4. Toutes les pièces rouges sont carrées.
- A5. Toutes les pièces vertes sont triangulaires.

Problème 4

Les quatre phrases ci-dessous forment un système logique cohérent.

Combien y-a-t-il de phrases vraies ?

- A1. Aucune de ces phrases n'est vraie
- A2. Une seule de ces phrases est fausse
- A3. Deux exactement de ces phrases sont vraies
- A4. Deux au moins de ces phrases sont fausses

Problème 5. Les cent déclarations

Sur une (grande) feuille, cent déclarations sont écrites.

La première dit « Sur cette feuille, il n'y a qu'une seule déclaration fausse ».

La seconde dit : « Sur cette feuille, il y a deux et seulement deux déclarations fausses ».

La troisième dit : « Sur cette feuille, il y a trois et seulement trois déclarations fausses ».

et ainsi de suite

jusqu'à la centième, qui dit : « Sur cette feuille, il y a cent déclarations fausses ».

Finalement, combien de déclarations sont fausses ?

Négation et réciproque d'une proposition

La négation de « Tous mes copains viendront à mon anniversaire » n'est pas « Aucun de mes copains ne viendra à mon anniversaire » ! Mais cela ne posera aucune difficulté ... (à cause du contexte). La négation de « Toutes les billes sont rouges » n'est pas « Aucune bille n'est rouge », mais « Il existe une bille qui n'est pas rouge ».

Exercice 4

Écrire la négation de « Dans la liste $\{0, 4, 6, 7, 8, 16, 798\}$, il existe un nombre impair ».

Exercice 5

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ ou } x < 1$$

Écrire sa négation.

Exercice 6. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

P et Q étant des propositions quelconques, si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors P est vraie et Q est vraie .

P et Q étant des propositions quelconques, si $P \Rightarrow Q$ est fausse, alors P est vraie et Q est fausse.

Les réciproques de chacune de ces deux propositions sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 7. Soit P et Q deux propositions.

- (1) Écrire la négation de $P \Rightarrow \text{non} Q$.
- (2) Écrire la contraposée de $\text{non} P \Rightarrow \text{non} Q$.

Quelques « problèmes amusants » de logique¹

Chaussettes assorties

Arthur a rangé en vrac dans un tiroir de la commode 8 chaussettes bleues et 8 chaussettes vertes.

Le matin, il joue à choisir une paire de chaussettes dans l'obscurité totale de sa chambre.

1. Combien doit-il prendre de chaussettes pour être sûr d'en avoir au moins deux de la même couleur ?
2. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir deux chaussettes vertes ?

Arthur a maintenant dans son tiroir une autre paire de chaussettes en plus, offerte par Zoé, de couleur rouge.

1. Combien doit-il prendre de chaussettes pour être sûr d'en avoir au moins deux de la même couleur ?
2. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir deux chaussettes vertes ?
3. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir les deux chaussettes rouges ?

Habits éponymes

Monsieur Brun, monsieur Blanc et monsieur Noir se connaissent depuis toujours. Ce jour-là, l'un s'est habillé en brun, l'autre en blanc et le troisième en noir. L'homme habillé en brun fait en riant la remarque aux deux autres : « Chacun a choisi une couleur qui ne correspond pas à son nom ». Monsieur Noir rétorque « C'est vrai, je ne l'avais pas réalisé ! ». Pouvez-vous attribuer les couleurs des vêtements à chacun ?

Un père

Pour faire pratiquer la logique à ses enfants, un père propose le jeu suivant : « Chacun de vous va me dire une phrase. Si elle est vraie, je choisirai de lui donner 1 euro ou 20 euros. Si elle est fausse, il n'aura rien ».

Le premier dit « Tu vas me donner 20 euros ». Hélas, le père ne lui donne rien.

Le second dit « Tu vas me donner 1 euro ». Et le père lui donne un euro.

Le troisième réfléchit, puis dit une phrase qui va obliger le père à lui donner 20 euros. Que dit-il ?

Amis sportifs

Trois amis se rencontrent. Deux jouent au ping-pong, deux pratiquent le judo et deux font du vélo. Celui qui ne fait pas de vélo ne pratique pas le judo. Celui qui ne joue pas au ping-pong ne fait pas de vélo. Quels sports fait chacun d'eux ?

Conversation dans le désert (<http://rustrel.free.fr>)

- Abdullah est un touareg très riche, on m'a dit qu'il a plus de 100 chameaux, dit Ali Bubba.
- Jamais de la vie, rétorque Ismaël. Je peux te dire qu'il a moins de 100 chameaux.
- Disons qu'il possède au moins un chameau, intervient Farik.

Si un seul de ces trois énoncés est vrai, combien de chameaux Abdullah possède-t-il ?

Musique !

Dans ce village de montagne de 117 habitants, beaucoup pratiquent la musique. Tous ne sont pas musiciens, mais si on prend deux habitants au hasard, il y a au moins un musicien parmi eux. Combien d'habitants de ce village sont-ils musiciens ?

Un facteur perspicace

Connaissant l'intérêt de son facteur pour les énigmes, un homme lui déclare un jour : « J'ai trois filles, le produit de leurs âges vaut 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la maison en face ». Le facteur intrigué réfléchit quelques instants puis dit : « J'y suis presque, mais il me manque un indice ». L'homme rajoute alors : « Mais oui, j'ai oublié de vous dire que l'aînée joue du piano ! ». Le facteur s'exclame « J'ai trouvé ! ». Quel est le numéro de la maison d'en face, et quel âge ont les filles ?

Cartes

Les 32 cartes d'un jeu ont été réparties en deux tas, un tas de quatre cartes et un avec toutes les autres. Toutes sont retournées faces contre la table. On sait que les quatre cartes choisies sont un roi, une dame, un valet et un as. Trouvez la « couleur » (carreau, cœur, pique, trèfle) de ces quatre cartes, si je vous dis que :

- trois « couleurs » (au moins) sont représentées
- le roi et le valet sont rouges
- l'as et la dame sont de la même « couleur »
- la dame de pique et le roi de cœur sont dans un même tas
- Ah oui ! ... J'ai caché l'as de trèfle dans ma poche !

¹ Certains de ces problèmes sont tirés de – ou inspirés par – le site <http://rustrel.free.fr>, d'autres ont été inventés par nous.