

Pavages

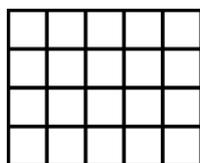
Léa est carreleuse de profession. Elle recouvre le sol de pièces entièrement avec du carrelage. Parfois elle doit couper un carreau pour finir une salle. Mais le résultat est moins harmonieux, elle cherche donc à recouvrir les salles sans jamais couper de carreaux. Pouvez vous l'aider ?

Avec un carreau 1×2

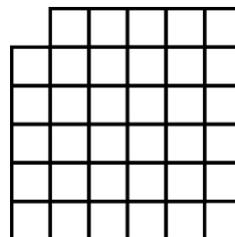


Le carreau élémentaire que Léa utilise est de taille 2×1 . Parmi les salles suivantes, lesquelles peut-elle paver sans couper de carreaux ? Lorsque c'est possible, proposer une solution. Dans le cas contraire, prouvez que c'est impossible à l'aide d'un raisonnement (simple et compréhensible).

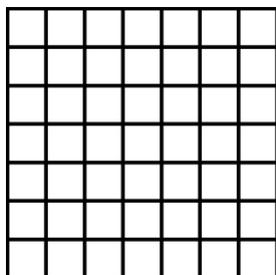
Plus généralement, considérons une salle $N \times N$, avec N impair. Si il manque un carré à cette salle, à quelles positions ce trou rend la salle pavable avec des carreaux 2×1 ? (sachant qu'il ne faut pas paver le trou)



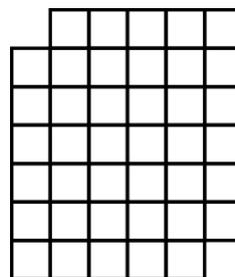
(a) 5×4



(b) 6×6 avec coins manquants



(c) 7×7

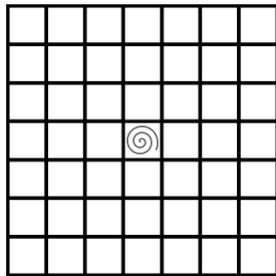


(d) 7×6 avec coins manquants

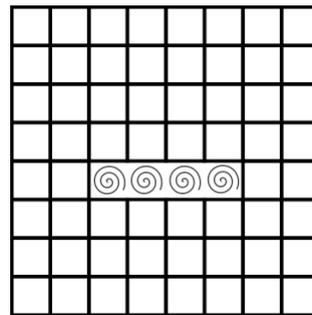
Avec un carreau 1×3



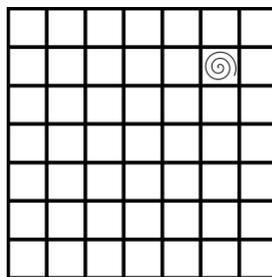
Léa a trouvé un nouveau type de carreau, de taille 1×3 . Elle souhaite paver les salles suivantes uniquement avec ce type de carreau, et sans les couper. Est-ce possible ? Les tourbillons représentent des zones aquatiques qu'il ne faut pas paver.



(a) 7×7 avec eau



(b) 8×8 avec eau



(c) 7×7 avec eau (deuxième version)