Le jeu de Pac-Man

Groupe SiRC de l'IREM de Grenoble

1 Le problème

1.1 La forme générale du problème

Le jeu de Pac-Man est un jeu à deux joueurs, qui se joue sur un graphe (ensemble de sommets reliés par des arêtes) simple (sans arête double ni arête bouclant sur un même sommet), connexe (d'un seul tenant) et fini (avec un nombre fini de sommets). Au début de la partie, le premier joueur (appelé joueur **F** dans la suite) place un certain nombre de fantômes sur des sommets du graphe, le second (appelé **P** dans la suite) place Pac-Man sur un autre sommet. les joueurs jouent ensuite à tour de rôle. À chaque tour, le joueur **F** déplace chacun des fantômes sur un sommet voisin ou le laisse à sa place. Ensuite, **P** déplace de même Pac-Man sur un sommet voisin ou le laisse immobile. Le jeu s'arrête si l'un des fantômes se retrouve sur le même sommet que Pac-Mac qui est alors "capturé".
Nous nous intéressons ici à la question suivante :

Question. *Étant donné un graphe, quel est le nombre minimal de fantômes qui assure l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur* ***F*** *?*

1.2 Un cas particulier : la grille rectangulaire

Un cas particulier qui permet de mettre en place une situation de recherche pour la classe est de jouer sur un graphe qui est une grille rectangulaire comme sur la Figure 1 ci-dessous.

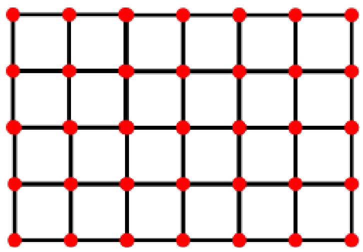
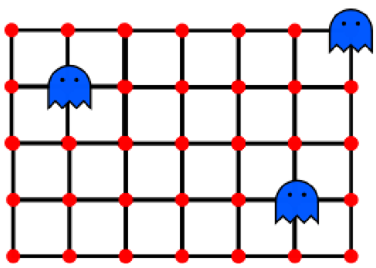
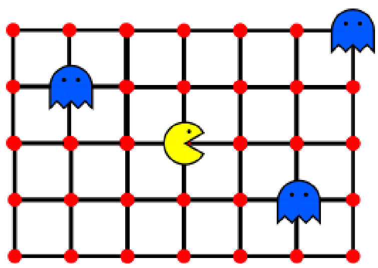


FIGURE 1 – Exemple d'un grille rectangulaire.

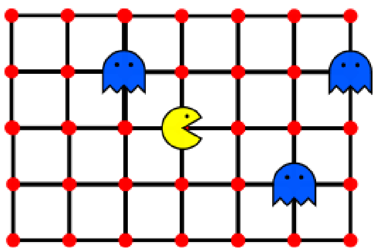
Voici par exemple un exemple de début de partie où **F** joue avec trois fantômes.



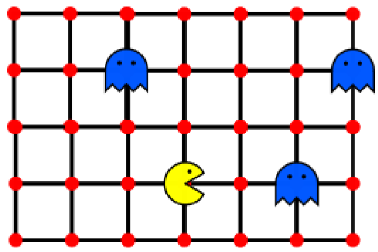
(a) **F** place ses fantômes.



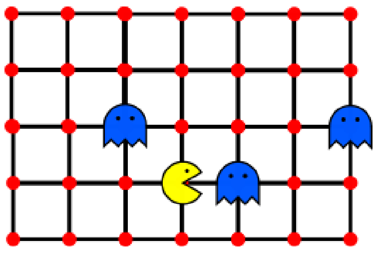
(b) **P** place Pac-Man.



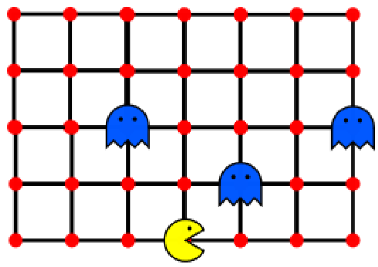
(c) **F** déplace deux des trois fantômes.



(d) **P** déplace Pac-Man.



(e) **F** déplace les trois fantômes.



(f) **P** déplace Pac-Man.

FIGURE 2 – Un exemple d'un début de partie sur une grille rectangulaire.

Voyez-vous comment le joueur **F** doit jouer pour gagner la partie ?

2 Une stratégie à deux fantômes sur la grille rectangulaire

2.1 Notation et modélisation mathématique du problème

On part d'une grille rectangulaire $(m+1)\times(n+1)$ vue comme la grille donnée par tout les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \le x \le m$ et $0 \le y \le n$.

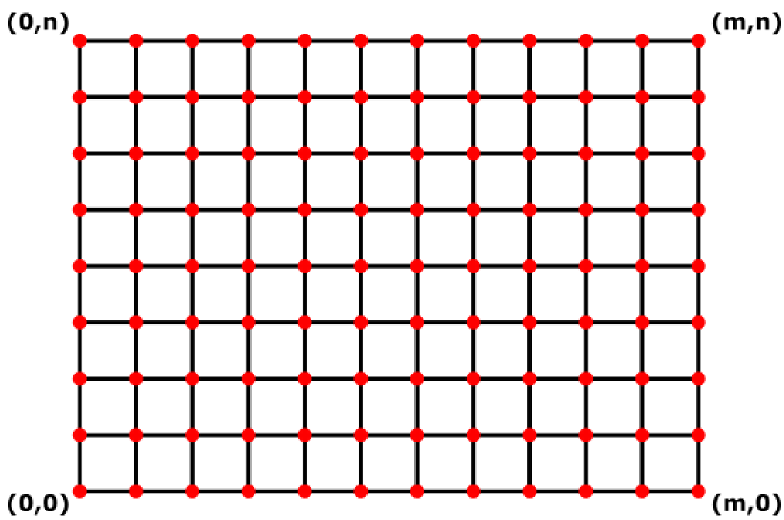


FIGURE 3 – Exemple de grille avec $m = 12$ et $n = 9$.

Sur cette grille évoluent deux fantômes et Pac-man. Chacun se déplace d'un sommet à l'un de ses voisins, horizontalement ou verticalement.
Nous parlerons de **phase de jeu** pour l'enchainement d'un déplacement de Pac-Man par **P** suivi d'un déplacement des fantômes par **F**. Les deux phases initiales du jeu sont particulières : la phase 0 correspond au placement des fantômes par **F**, puis la phase 1 au placement de Pac-Man par **P**, suivi du premier déplacement des fantômes par **F**.
Pour plus de lisibilité, nous distinguerons un fantôme bleu et un fantôme vert et pour, $k \ge 0$ ($k \ge 1$ pour Pac-Man), nous notons $(x_B(k), y_B(k))$, $(x_V(k), y_V(k))$ et $(x_P(k), y_P(k))$ les positions à l'issue la k-ième phase du fantôme bleu, du fantôme vert et de Pac-Man respectivement.

2.2 Une stratégie

On place les fantômes dans deux coins opposés. Ici on pose le bleu en haut à gauche en $(0, n)$ et le vert en bas à droite en $(m, 0)$ et ainsi, $(x_V(0), y_V(0)) = (m, 0)$, $(x_B(0), y_B(0)) = (0, n)$.

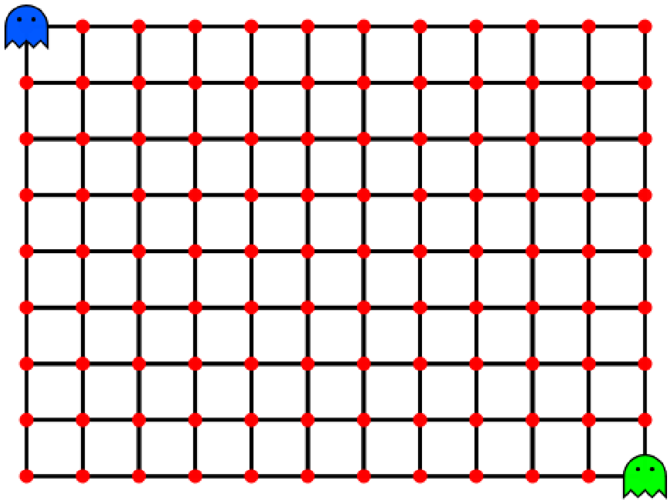


FIGURE 4 – Position initiale.

Remarque 1. La position initiale des fantômes n'a pas beaucoup d'importance. En effet, comme le joueur **F** commence à placer les fantômes, les positons initiales de ceux-ci sont indépendantes de la position initiale de Pac-Man. Le joueur **F** peut alors commencer la partie en utilisant ses coups pour se ramener à une position initiale désirée.
La stratégie proposée s'adapte sans peine si les deux fantômes sont dans deux autres coins (opposés ou non).

Stratégie ♣. *Soit $k \geq 1$. Lors de la phase k, tant que Pac-man n'est pas capturé et juste après que le joueur **P** ait joué (ou placé Pac-Man pour $k = 1$) le joueur **F** joue le fantôme vert de la façon suivante :*

*(V1) Si $x_V(k-1) > x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers là gauche et*

$$(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1) - 1, y_V(k-1)).$$

*(V2) Si $x_V(k-1) = x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers le haut et*

$$(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1), y_V(k-1) + 1).$$

*(V3) Si $x_V(k-1) < x_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme vert vers la droite et*

$$(x_V(k), y_V(k)) := (x_V(k-1) + 1, y_V(k-1)).$$

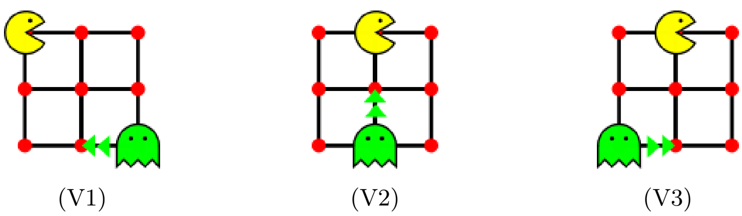


FIGURE 5 – Illustrations des déplacements pour le fantôme vert.

et il joue le fantôme bleu de la façon suivante :

*(B1) Si $y_B(k-1) > y_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme bleu vers le bas et*

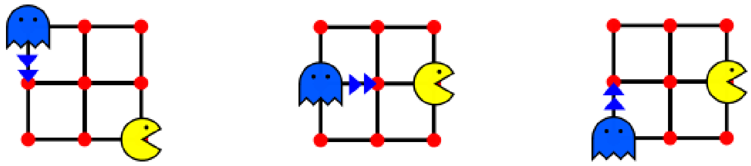
$$(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1), y_B(k-1) - 1).$$

*(B2) Si $y_B(k-1) = y_P(k)$, alors **F** déplace le fantôme bleu vers la droite et*

$$(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1) + 1, y_V(k-1)).$$

*(B3) Si $y_B(k-1) < y_P(k)$, alors **F** place le fantôme bleu vers le haut et*

$$(x_B(k), y_B(k)) := (x_B(k-1), y_B(k-1) + 1).$$



(B1) (B2) (B3)

FIGURE 6 – Illustrations des déplacements pour le fantôme bleu.

Remarque 2. La stratégie ♣ présentée ici ne se veut pas du tout optimale en nombre de coups mais elle a l'avantage de se justifier assez facilement.
Le lecteur pourra aussi remarquer que, dans la stratégie ♣, les déplacements des deux fantômes sont indépendants l'un de l'autre. Cependant, les cas (B1), (B2) et (B3) sont le symétriques par rapport à la première diagonale (d'équation $y = x$) des cas (V1), (V2) et (V3).

La stratégie ♣ est très simple à mettre en place lors d'une partie et le choix du déplacement d'un fantôme ne demande que la connaissance de sa position relative à Pac-Man juste avant de jouer.
La philosophie de la stratégie est la suivante. Le joueur **F** cherche à aligner ses fantômes sur Pac-Man, selon les lignes pour le fantôme bleu et selon les colonnes pour le fantôme vert.

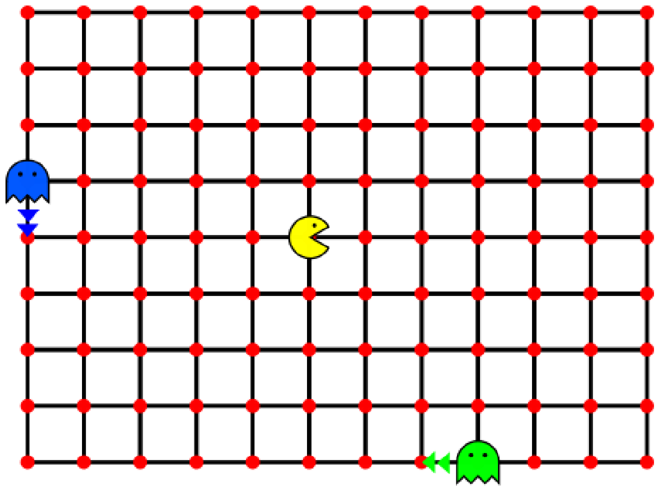


FIGURE 7 – Exemple 1 de coup du joueur **F**. Ici il cherche à aligner les fantômes avec Pac-Man.

Dès que l'un des fantômes s'est aligné avec Pac-Man, le joueur **F** déplace ensuite celui-ci de façon à garder l'alignement ou à le rapprocher de Pac-Man. Par exemple, si c'est le fantôme bleu qui s'est aligné avec Pac-Man, et que le joueur **P** déplace Pac-Man verticalement, le joueur **F** déplacera lui aussi le fantôme bleu verticalement pour préserver l'alignement. Par contre, si le joueur **P** déplace Pac-Man horizontalement, l'alignement est maintenu et le joueur **F** peut déplacer le fantôme bleu horizontalement en direction de Pac-Man.

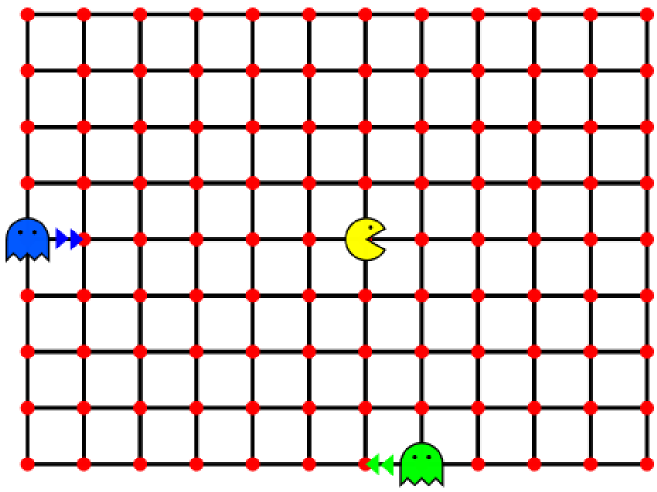


FIGURE 8 – Exemple 2 de coup du joueur **F**. Ici le fantôme bleu est aligné et peut alors se rapprocher tandis que le fantôme vert continue à s'aligner avec Pac-Man.

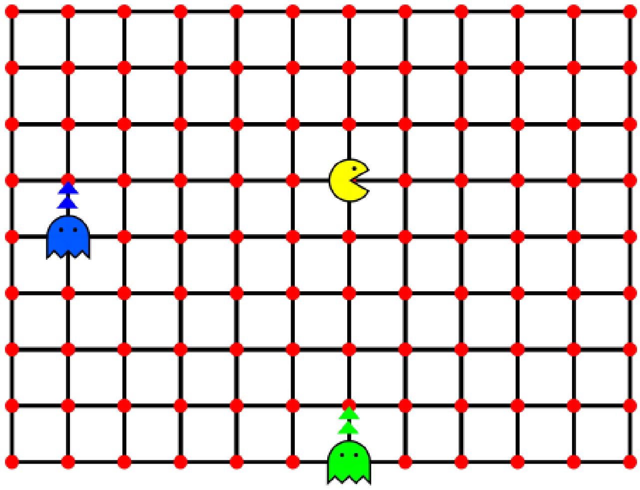


FIGURE 9 – Exemple 3 de coup du joueur **F**. Ici Pac-Man s'est déplacé verticalement et a donc brisé l'alignement avec le fantôme bleu qui va devoir rectifier l'alignement. Le fantôme vert, bien aligné, peut se rapprocher de Pac-Man.

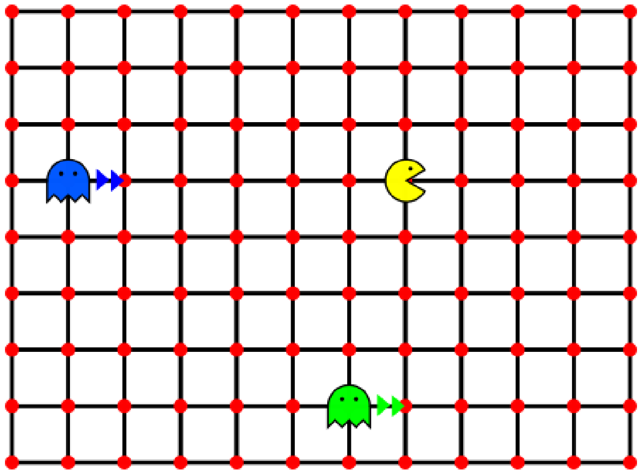


FIGURE 10 – Exemple 4 de coup du joueur **F**. Ici Pac-Man s'est déplacé vers la droite ce qui à brisé l'alignement avec le fantôme vert. Ce dernier rectifie donc l'alignement tandis que le fantôme bleu, bien aligné, se rapproche.

Au final, Pac-Man est coincé dans un rectangle dont les côtés sont donnés par les bords du plateau pour les côtés du haut et de droite, les deux autres côtés sont donnés par la ligne contenant le fantôme vert et la colonne contenant le fantôme bleu. L'aire de ce rectangle devient nulle et on aboutit ainsi à la capture de Pac-Man. Tout ceci est détaillé et démontré dans la section suivante.

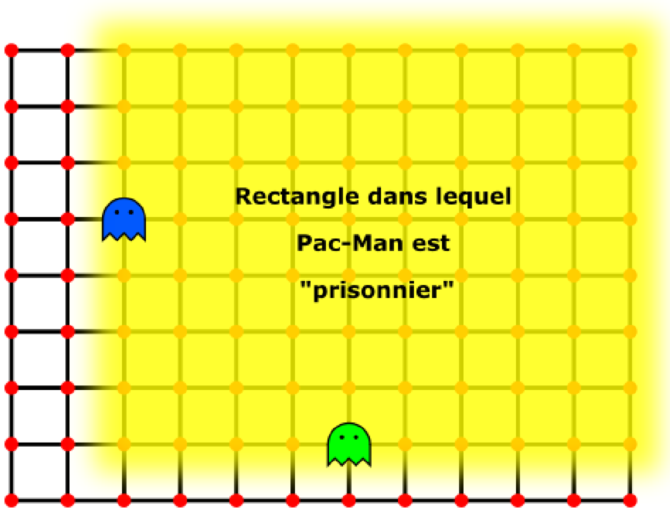


FIGURE 11 – Illustration représentant, dans cet exemple, le rectangle dans lequel Pac-Man peut se trouver.

2.3 Justifications

Dans la suite, on suppose que le joueur **P** se contente de respecter la règle de jeu et que le joueur **F** suit scrupuleusement la stratégie ♣. Trois situations disjointes peuvent alors survenir :

(a) l'un des fantômes au moins capture Pac-Man ;

(b) lors d'une phase de jeu la stratégie ♣ impose au joueur **F** un déplacement interdit par la règle du jeu ;

(c) Le jeu ne se termine pas.

Ici un **déplacement interdit** est un mouvement non autorisé par les règles du jeu d'un des fantômes ou du Pac-Man. Plus précisément, le déplacement d'un des fantômes ou de Pac-Man sur un sommet qui n'est pas voisin de sa position actuelle ou qui est en dehors du rectangle $[0, m] \times [0, n]$. Il faut donc vérifier que, peu importent les déplacements de Pac-Man, les situations (b) et (c) ne se réalisent jamais et que seule la situation (a) peut survenir.
Comme indiqué à la Remarque 2, les conditions de déplacement des fantômes dans la stratégie ♣ sont symétriques par rapport à la première diagonale. **Ainsi, mis à part pour la Proposition 2, nous effectuons les démonstrations pour le fantôme vert, celles pour le fantôme bleu s'obtenant par symétrie.**
Nous commençons par quatre lemmes qui permettent de comprendre l'évolution des positions relatives des fantômes par rapport à Pac-Man au cours d'une partie. Nous montrons ensuite dans la Proposition 1 que la situation (b) n'arrive jamais et dans la Proposition 2 que seule la situation (a) peut survenir.

2.3.1 Résultats préliminaires

Premièrement, on démontre que, dès qu'un fantôme s'est aligné avec Pac-Man, à toutes les fins de phases de jeu suivantes, cet alignement est préservé.

Lemme 1. *Soit $k \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k*
Si $x_V(k) = x_P(k)$, alors $x_V(k+1) = x_P(k+1)$.
De même, si $y_B(k) = y_P(k)$, alors $y_B(k+1) = y_P(k+1)$.

Démonstration. Si $x_P(k) = x_V(k)$, en fonction du coup de P, on a $x_P(k+1) = x_V(k) - 1$, $x_P(k+1) = x_V(k)$ ou $x_P(k+1) = x_V(k)+1$. Ainsi, dans chaque cas, en suivant la stratégie ♣, F joue selon (V1),(V2) ou (V3) respectivement et on a $x_V(k+1) = x_P(k+1)$. □

Deuxièmement, on démontre que, en fin de phase de jeu, le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une colonne à gauche de Pac-Man (il reste sur la droite ou sur la même colonne). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une ligne en dessous de Pac-Man (il reste en dessus ou sur la même ligne).

Lemme 2. *Pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a*

$$x_P(k) \leq x_V(k) \qquad \text{et} \qquad y_P(k) \geq y_B(k).$$

Démonstration. Démontrons par récurrence sur k que pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $x_P(k) \leq x_V(k)$.

Initialisation ($k = 1$). On a $x_V(0) = m$ et, comme la grille est de taille $(m+1) \times (n+1)$, $x_P(0) \leq m$. On a alors trois cas.
Soit **P** place Pac-Man sur le fantôme vert et la partie est terminée.
Soit $x_P(1) = m$ et $y_P(1) > 0$. Dans ce cas, en suivant la stratégie ♣, **F** joue selon (V2) et déplace le fantôme vert en $(x_V(1), y_V(1)) := (m, 1)$. Ainsi on a bien $x_P(1) \leq x_V(1)$.
Soit $x_P(1) < m$. Dans ce cas, et en suivant la stratégie ♣, **F** joue selon (V1) et déplace le fantôme vert en $(x_V(1), y_V(1)) := (m-1, 0)$. Ainsi, on a encore $x_P(1) \leq x_V(1)$.

Hérédité. Démontrons que pour tout $k \geq 1$, si la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k et si $x_P(k) \leq x_V(k)$, alors $x_P(k+1) \leq x_V(k+1)$. Soit donc $k \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase k. Supposons que $x_P(k) \leq x_V(k)$ et distinguons deux cas : $x_P(k) = x_V(k)$ et $x_P(k) < x_V(k)$.
Si $x_P(k) = x_V(k)$, on applique le Lemme 1.
Si $x_P(k) < x_V(k)$, en fonction du coup de **P**, on a $x_P(k+1) = x_V(k)$ ou $x_P(k+1) < x_V(k)$. Dans chaque cas, en suivant la stratégie ♣, F jouera selon (V2) ou(V1) respectivement. Ainsi, dans chaque cas on a bien $x_V(k+1) \leq x_P(k+1)$. □

Le Lemme 3 démontre que le fantôme vert ne quittera la ligne toute en bas ($y = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man. De même le fantôme vert ne quittera la colonne toute à gauche ($x = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man.

Lemme 3. *Soit $k \geq 1$.*
Si $y_V(k) > 0$ alors $x_V(k) = x_P(k)$.
De même, si $x_B(k) > 0$, alors $y_B(k) = y_P(k)$.

Démonstration. Soit k_0 la première phase de jeu où $y_V(k_0) > 0$. comme $y_V(0) = 0$, $k_0 \geq 1$. On a forcément $y_V(k_0 - 1) = 0$ et à la phase k_0, **F** a déplacé le fantôme vert verticalement (selon (V2)). On avait donc $x_V(k_0 - 1) = x_P(k_0)$ et on a maintenant $x_V(k_0) = x_P(k_0)$. Ainsi, en vertu du lemme 1, $x_V(k) = x_P(k)$ pour tour $k \geq k_0$.

□

Enfin, ce dernier lemme démontre que le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une ligne au dessus Pac-Man (il reste "en dessous"). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une colonne à droite de Pac-Man (il reste "à gauche").

Lemme 4. *Pour tout $k \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a*

$$y_P(k) \geq y_V(k) \qquad \text{et} \qquad x_P(k) \leq x_B(k).$$

Démonstration. Supposons qu'il existe k tel que $y_P(k) < y_V(k)$ et soit k_0 le plus petit des k tels que la partie ne soit pas terminée à la fin de la phase k et $y_P(k) < y_V(k)$. Notez que, au vu de la position initiale du fantôme vert, $k_0 \geq 1$. Comme $y_P(k_0) < y_V(k_0)$, on a $y_V(k_0) > 0$ et, par le Lemme 3 $x_P(k_0) = x_V(k_0)$. De plus, par minimalité de k_0, on a $y_V(k_0 - 1) \leq y_P(k_0 - 1)$ et donc $y_V(k_0) - y_P(k_0) \leq 2$.
Si $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 2$, comme c'est la première fois que cette différence est strictement positive, c'est que le fantôme vert et Pac-Man se sont déplacés verticalement. Donc à la fin de la phase $k_0 - 1$, ils étaient sur la même case ce qui est absurde.

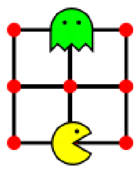


FIGURE 12 – illustration d'une position où $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 2$. Par minimalité de k_0, on aurait forcément, à la fin de la phase $k_0 - 1$, les deux pièces sur le sommet central.

Si $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 1$, alors, par minimalité de k_0 et au vu des déplacements autorisés par la règle du jeu, seules les deux configurations suivantes peuvent survenir à la fin de la phase $k_0 - 1$.

(i) Soit $y_V(k_0 - 1) - y_P(k_0 - 1) = -1$ et alors, lors de la phase k_0 le joueur **P** déplace forcément Pac-Man vers le bas sur la position du fantôme vert ce qui est absurde.

(ii) Soit $y_V(k_0 - 1) - y_P(k_0 - 1) = 0$ et alors, comme forcément $x_V(k_0 - 1) \neq x_P(k_0 - 1)$ (sinon la partie serait déjà terminée à la phase $k_0 - 1$), on a par le Lemme 3 $y_P(k_0 - 1) = y_V(k_0 - 1) = 0$. Ainsi, qu'importe le déplacement de Pac-Man, comme la partie ne se termine pas à la phase k_0, on a forcement $x_V(k_0) \neq x_P(k_0 - 1)$ et alors le fantôme vert se déplace selon (V1) ou (V3), i.e il se déplace horizontalement. En particulier, $y_V(k_0) = 0$ ce qui est absurde.

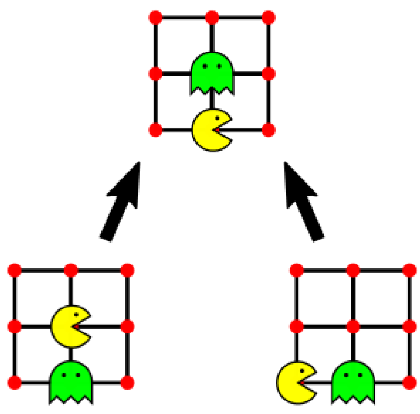


FIGURE 13 – illustration d'une position où $y_V(k_0) - y_P(k_0) = 1$ en haut. Les deux illustrations en dessous représentent les positions possibles à la fin de la phase $k_0 - 1$. On peut alors voir que ce n'est pas possible.

□

2.3.2 Les résultats principaux

Proposition 1. *La stratégie ♣ n'aboutit pas à un déplacement interdit.*

Démonstration. Les déplacement (V1), (V2) et (V3) sont des déplacements d'une case vers la gauche, le haut et la droite respectivement. Ainsi, les seuls déplacements interdits qui pourraient être joués à une phase k sont

(1) (V1) quand le fantôme vert est sur la colonne de gauche ($x_V(k) = 0$),

(2) (V2) quand le fantôme vert est sur la dernière ligne ($y_V(k) = n$) et

(3) (V3) quand le fantôme vert est sur la colonne de droite ($x_V(k) = m$).

Le cas (1) n'arrivera jamais car, si le fantôme vert est sur la colonne de gauche, comme $x_P(k+1) \geq 0 = x_V(k)$, **F** jouera selon (V2) ou (V3) mais jamais (V1). Le cas (2) n'arrivera jamais non plus car, si le fantôme vert est sur la dernière ligne, on a, grâce aux lemmes 3 et 4, $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $m = y_V(k-1) \leq y_P(k-1) \leq m$ et ainsi la partie aurait du se terminer à la phase $k-1$. Enfin, le cas (3) est lui aussi impossible car, si le fantôme vert est sur la colonne de droite, comme $x_P(k+1) \leq m = x_V(k)$, **F** jouera selon (V1) ou (V2) mais jamais (V3). □

Proposition 2. *La partie s'arrête en un temps fini.*

Démonstration.
Etape 1 : il existe $k_V \leq m$ tels que pour tout $k \geq k_V$, $x_V(k) = x_P(k)$.
D'après le Lemme 2, on a, pour tout $k \geq 0$, $0 \leq x_P(k) \leq x_V(k)$. De plus, pour tout $k \geq 0$, si $x_P(k) < x_V(k-1)$ alors **F** joue le fantôme vers selon (V1), c'est à dire vers la gauche et donc $x_V(k) = x_V(k-1)-1$. Ainsi,il existe $k_V \leq m$ tels que, $x_V(k_V) = x_P(k_V)$. On conclut ensuite avec le Lemme (1).

Etape 1bis : il existe $k_B \leq n$ tels que pour tout $k \geq k_B$, $y_B(k) = y_P(k)$.
Cela se démontre de la même manière que l'étape précédente.

Soit $k_0 = \max(k_V, k_B)$.
Etape 2 : Pour tout $k > k_0$ et tant qu'aucun fantôme n'a capturé Pac-Man, on a $y_V(k) = y_V(k-1)+1$ ou $x_B(k) = x_B(k-1)+1$.
Comme $k > k_0 = \max(k_V, k_B)$, on a $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $y_B(k-1) = y_P(k-1)$. Ainsi, si **P** déplace Pac-Man horizontalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme bleu selon (B2) et $x_B(k) = x_B(k-1)+1$, et si **P** déplace Pac-Man verticalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme vert selon (V2) et $y_V(k) = y_V(k-1)+1$.

Conclusion.
Les Lemmes 2 et 4 nous assurent que pour tout $k \geq 0$, $(x_P(k), y_P(k)) \in [x_B(k), m] \times [y_V(k), n]$. Or d'après l'étape précédente, l'aire entière du rectangle $R_k := [x_B(k), m] \times [y_V(k), n]$ décroit strictement à chaque phase de jeu à partir de la phase k_0. Enfin, dès que l'aire de R_k s'annule, les trois personnages sont alignés et, comme pour tout $k \geq k_0$, $x_V(k-1) = x_P(k-1)$ et $y_B(k-1) = y_P(k-1)$, Pac-Man se retrouve sur la case d'un fantôme et est capturé. □

Remarque 3. On peut déduire de la preuve précédente la majorant $\max(m, n) - 1 + m + n - 1$ pour le nombre de phases de jeu pour une partie où **F** joue en suivant la stratégie ♣.