Ouvrez le (ru)ban !

Arnaud Gazagnes

Je vous propose de faire un sondage dans la rue et de demander à la personne interrogée de vous dire ce qu'elle a retenu des mathématiques lors de sa scolarité : la plupart récitera un « a deux plus b deux égale c deux » et, éventuellement, un « b deux moins quatre a c », ainsi que deux ou trois noms de mathématiciens pour vous faire plaisir. Triste conception résumée qu'elle a des maths ! Pourtant, nous le savons tous, notre discipline est plus que riche et vivante. A nous de convaincre encore et toujours nos élèves.

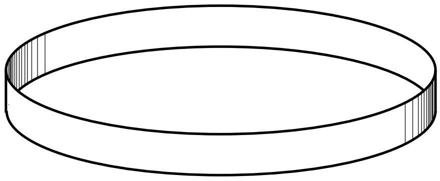
L'activité suivante est une activité de découverte, susceptible de les surprendre et d'exciter leur curiosité. Elle donne une occasion rêvée de toucher des objets mathématiques sans utiliser de formule ! Proposée à des élèves de 4ème, de 2nde et de 1ère L, elle peut aussi se faire en club, dans un cadre culturel[1] et être l'occasion d'un travail commun avec le (la) collègue d'Arts Plastiques.

Vous avez donc à vous mettre dans la peau d'un élève qui découvre les ouvertures proposées ci-dessous (et qui ne connaît vraisemblablement pas les solutions). Vous avez besoin de bandes de papier (quadrillé[2]), de ciseaux et de colle. Différentes questions, écrites en italique, sont posées : anticiper les réponses avant d'effectuer les constructions réserve des surprises ! Toutes les réponses se trouvent en fin d'article (pour laisser place au suspense) ainsi que quelques commentaires. A vos découpages !

Ouverture n°1

Vous convenez sans problème qu'une bande de papier a un seul contour et deux faces.

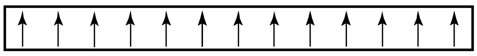
Collez maintenant les extrémités pour en faire un anneau. Nous appellerons **R0** cet objet.



Marquez un point sur le ruban R0 et faites défiler ce dernier entre vos doigts : vous reviendrez en ce point du même côté de la surface après un tour complet. Pour différencier les faces, vous avez donc besoin de deux couleurs. Ce ruban a deux bords et deux faces.

Ouverture n°2

Découpez dans une feuille de papier calque une bande et dessinez des flèches comme ci-dessous.



Collez les extrémités de la bande pour en faire un ruban. Lorsque vous le faites défiler entre vos doigts, les flèches restent dirigées dans le même sens : on dit que cette surface est "orientable".

Ouverture n°3

Tracez sur chacune des deux faces d'une bande la ligne médiane parallèle à la longueur. Collez comme auparavant. Coupez le ruban R0 le long de cette ligne.

Que se passe-t-il ?

A. Gazagnes enseigne au lycée Marie-de-Champagne à Troyes.

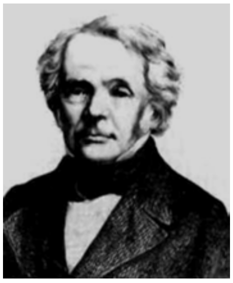
[1] *Et aussi dans un repas familial ou amical !*

[2] *Cela vous évitera de tracer les lignes de partage en deux ou en trois bandes : il suffira de suivre les carreaux*

Une fausse erreur n'est pas obligatoirement une vérité vraie.

Pierre Dac

[3] *Autrement dit… Tracez une croix verte dans les coins supérieur gauche et inférieur droit et une croix rouge dans les coins inférieur gauche et supérieur droit. Puis collez les extrémités de telle sorte que les croix de même couleur se superposent*



A.Möbius

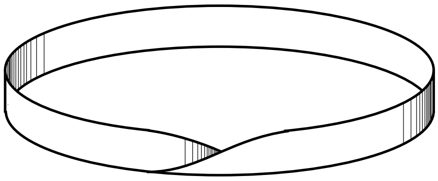
[4] *Tout comme vous dessineriez les départements sur une carte de France. Sur une carte plane, il suffit de 4 couleurs.*

Une activité de coloriage de patron de cube se trouve dans les brochures Jeux 5 et Jeux 6 de l'APMEP (Cf. PLOT n° 1)

[5] *On dit que le « nombre chromatique » de R1 est 6.*

Ouverture n°4

Prenez une nouvelle bande. Cette fois-ci, avant d'en coller les extrémités, faites effectuer à l'une d'elles **un** demi-tour[3] . Le ruban que vous tenez en main est appelé "**ruban de Möbius** ", désigné par **R1**.

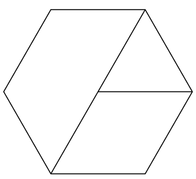


Combien le ruban R1 a-t-il de bords ? de faces ?

Möbius, August de son prénom, est le mathématicien allemand qui, le premier, en 1858, découvrit les propriétés de ce ruban, qui vous est en fait familier, comme le montrent les trois exemples suivants : (1) ce ruban est le symbole international du recyclage et est affiché sur plusieurs produits, (2) vous le retrouvez engendré par les molécules des cristaux liquides servant à l'affichage des nombres sur votre calculatrice, et (3) il se retrouve dans les courroies de distribution. Divers artistes ont été inspirés par lui (voir en fin d'article), comme Maurits Escher avec ses neuf fourmis se promenant sur un tel ruban. De plus, si vous dessinez n'importe quelle carte[4] sur un ruban R1, six couleurs suffisent pour le colorier[5], la condition étant que deux zones de frontière commune ont des couleurs différentes.

Ouverture n°5.

Pour construire un hexagone régulier (sans aucun vide au centre), le compas peut être remplacé par une règle graduée seule ! Il suffit d'aplatir un ruban de Möbius, sous réserve que sa longueur soit égale à $3\sqrt{3}$ ($\approx 5{,}2$) fois sa largeur. Essayez donc avec une bande de 5 cm × 26 cm (n'oubliez pas d'ajouter 1 cm à la longueur pour le collage).

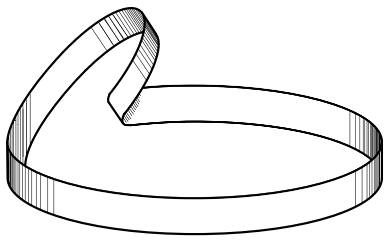


Ouverture n°6.

Comme dans l'ouverture 2, découpez dans du calque une bande, dessinez-y des flèches et fabriquez un ruban R1. Quand vous le faites défiler, vous voyez que les flèches indiquent une direction opposée : on dit que cette surface est « non-orientable » (contrairement à R0).

Ouverture n°7

Prenez une bande de papier. Effectuez à l'une des extrémités **deux** demi-tours avant le collage. La surface que vous obtenez est désignée par **R2**. Vous l'avez déjà rencontrée puisque, par exemple, le logo de la marque de voitures Renault est un ruban à deux demi-tours.



Combien a-t-elle de bords ? de faces ?

Après ces quelques travaux qui titillent l'esprit des élèves, en voici d'autres, qui les épatent toujours… tout comme moi ! Pur moment de féerie mathématique !

Ouverture n°8

Tracez sur chacune des deux faces d'une bande la ligne médiane parallèle à la longueur. Formez un ruban R1.
Découpez-le suivant la ligne tracée sur toute la longueur.

Qu'obtenez-vous ?

Ouverture n°9

Tracez sur chacune des deux faces d'une bande les deux lignes parallèles à la longueur partageant la bande en trois parties égales. Formez un ruban R1. Découpez-le suivant la ligne tracée sur toute la longueur, en restant toujours à la même distance du bord. La découpe ne sera vraiment finie que lorsque vous aurez fait deux fois le tour de la bande (ne traversez donc jamais la bande centrale !).

Qu'obtenez-vous ?

Ouverture n°10

Recommencez l'ouverture n°8 (coupure à la moitié) mais, cette fois-ci, avec un ruban R2.

Que se passe-t-il ?

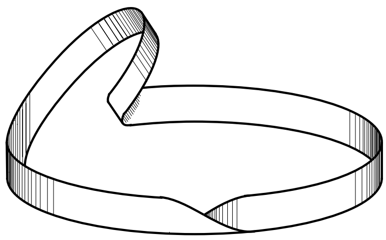
Ouverture n°11

Recommencez l'ouverture n°9 (coupure au tiers) mais, cette fois-ci, avec un ruban R2. Attention à ne jamais traverser la bande centrale.

Qu'obtenez-vous ?

Ouverture n°12

Prenez une bande de papier. Effectuez à l'une des extrémités trois demi-tours avant le collage. La surface que vous obtenez est désignée par **R3**.



Recommencez l'ouverture n°8 (coupure à la moitié) avec ce ruban R3.

Quel(s) objet(s) nouveau(x) avez-vous dans les mains ?

Ouverture n°13

Recommencez l'ouverture n°9 avec une coupure aux tiers mais, cette fois-ci, avec un ruban R2. C'est-à-dire que vous allez découper, dans un premier temps, sur la ligne dessinée du premier tiers et, dans un second temps, sur la ligne du second tiers.

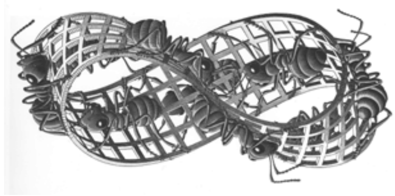
Qu'obtenez-vous ?

Ouvertures suivantes

Maintenant, vous pouvez découvrir d'autres objets, en combinant les techniques, par exemple, en changeant le nombre de subdivisions de la bande ou en augmentant le nombre de demi-tours avant le collage.
Bonnes sculptures mathématiques !

Quelques illustrations.

- *"Ruban de Möbius II" d'Escher*[7] *(1963).*



- *Un quatrain de Luc Etienne*[8] *.*

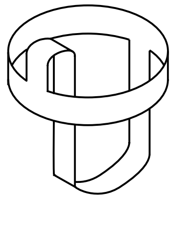
Prenez une bande de papier et disposez-la dans le sens de la longueur. Sur la partie droite d'une face, écrivez le premier quatrain du poème ci-dessous. Retournez ensuite la bande de l'autre côté, par rapport à la longueur, puis écrivez le second quatrain mais, cette fois-ci, à gauche. Transformez ensuite la bande en un ruban de Möbius. Il ne reste plus qu'à lire le texte qui apparaît…

Trimer, trimer sans cesse,
Pour moi, c'est la sagesse
Je ne puis flemmarder
Car j'aime mon métier…

C'est vraiment éreintant
De gaspiller son temps
Et grande est ma souffrance
Quand je suis en vacances.

- *Le slip de Möbius.*

Pour terminer cette récréation mathématique, voici, dans le même esprit de topologie, le « slip de Möbius » : ne disposant que d'un bord et d'une seule face, il lui est impossible d'être mis à l'envers !



Le slip de Möbius

Réponses et commentaires

Ouverture n°3

Vous obtenez deux rubans séparés, du même type R0, de même longueur que celle du ruban initial mais de largeur moitié.

[6] *Vous pouvez vous poser la question (reposant sur une considération pratique, probablement déjà rencontrée) du rapport de la longueur à la largeur de la bande.*

7 *Vous pouvez découvrir quelques-unes de ses œuvres à l'adresse suivante : http://www.worldofescher.com/Gallery . Une piste de travail avec les collègues d'Arts Plastiques (bis) !*

[8] *Luc Etienne (1908-1984) était l'un des membres de l'Oulipo et enseignait les mathématiques à Reims. Le site d'adresse http:// www. fatrazie.com/luc.htm lui est consacré. Les travaux de l'Oulipo sont d'une grande richesse pour un travail commun avec les collègues de Lettres.*

Ouverture n°4

Ce ruban n'a qu'un bord et qu'une face ! Pour vous en convaincre, parcourez avec un crayon le ruban : vous revenez au point de départ en observant que tout le ruban est marqué d'une ligne. Il n'y a donc ni recto ni verso ! Une fourmi (comme celle de l'illustration ci-dessus d'Escher) peut aller de tout point à n'importe quel autre sans jamais devoir passer par-dessus bord. Et aussi, vous n'avez besoin que d'une couleur. Faites de même pour constater qu'il n'y a qu'un seul bord.

Ouverture n°7

Vous avez un anneau à deux bords et deux faces.

De façon générale, si l'on effectue à la bande avant collage un nombre impair de demi torsions, la surface n'a qu'une face et un bord que l'on dit noué, alors que si ce nombre est pair, elle a deux faces et deux bords.

Ouverture n°8

Vous obtenez, non pas deux, mais un ruban seulement.

Première réaction. Quand on coupe une surface en revenant au point de départ, on peut aussi bien obtenir une que deux surfaces (comme habituellement).

Seconde réaction. La difficulté ici est de caractériser la nature du ruban : la solution R0 vite écartée, est-il R1 ou R2 ? Le débat peut être ouvert en classe ! Voici une piste possible pour déterminer (en général) le nombre de demi-tours : (1) couper le ruban et fixer (scotch, punaise, …) une extrémité et (2) désenrouler l'extrémité opposée pour revenir à une bande non tordue, tout en comptant les demi-tours. Vous trouvez alors qu'il est de type R2, sa longueur est double et la largeur est la moitié de l'ancienne. Etonnant, non ?

Ouverture n°9

Vous obtenez un ruban R1 (c'est le tiers central de votre bande originale), enlacé avec un deuxième ruban, deux fois plus long, et de type R2.

Ouverture n°10

Vous obtenez deux rubans de type R2, enlacés, de même longueur que le ruban R2 initial et de largeur, la moitié.

Ouverture n°11

Vous obtenez deux rubans de type R2, enlacés, de même longueur que le ruban R2 initial, la largeur de l'un étant double de celle de l'autre (respectivement les deux tiers et le tiers de la largeur initiale).

D'une façon générale, les mathématiciens montrent que lors d'une coupure au tiers de la largeur à partir de l'un des bords, vous obtenez un ruban central semblable à l'ancien et, en plus, un ou deux anneaux, suivant que le ruban de départ a subi un nombre impair ou pair de demi-tours.

Ouverture n°12

Vous obtenez un ruban comportant 6 demi-tours[9] (on dit qu'il est « noué »).

De façon générale, les mathématiciens montrent que, en notant n le nombre de demi-tours du ruban de départ avant de le couper selon la ligne médiane, nous obtenons le résultat suivant :

- si n est pair, il y aura deux bandes, entrelacées $n/2$ fois, ayant n demi-tours
- si n est impair, il y aura une seule bande, ayant 2 n demi-tours.

Les élèves se contenteront de le constater lors de leurs différentes manipulations.

Ouverture n°13

Vous obtenez trois rubans enlacés deux à deux que, maintenant, vous savez caractériser.

Bibliographie

Fantaisies et paradoxes mathématiques, E. P. Northrop, Dunod, 1954.
Le ruban de Möbius, in L'argonaute, n° 17, Novembre 1984.
La littérature potentielle (2), Oulipo, Gallimard, 1973.
Mathématiques, Un nouvel âge d'or, K. Devlin, Masson, 1992.

[9] *Référez-vous à la piste proposée dans la solution de l'ouverture 8.*

Le Net regorge de pages consacrées au ruban de Möbius. Il suffit d'écrire les mots *ruban anneau Möbius* dans votre moteur de recherche.