

MOBIUS

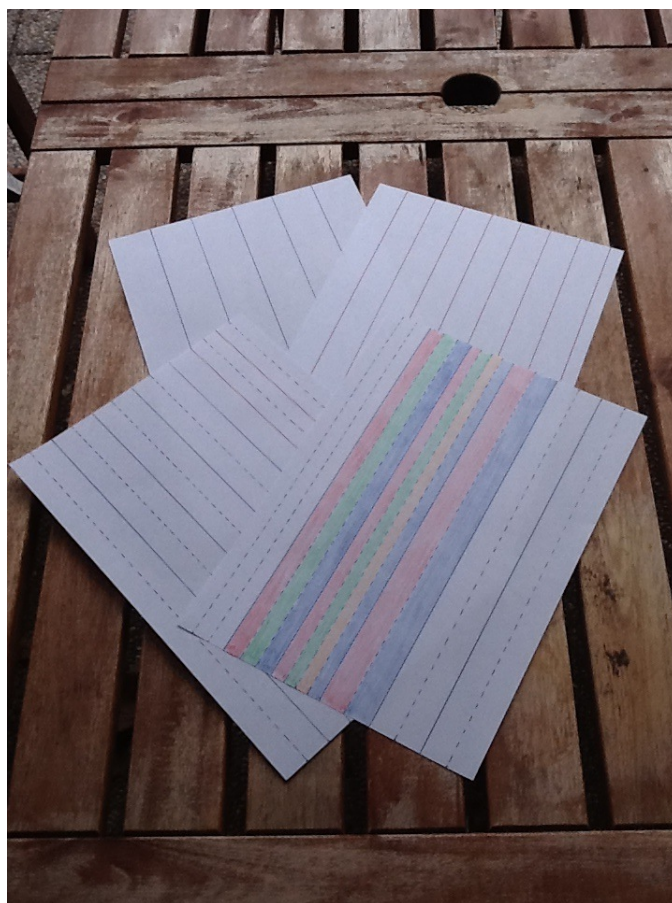
Martine Brilleaud Martin Buhmann*

Matériel : ciseaux, colle, crayons de couleurs ou feutres.

L'activité se divise en deux parties :

- l'activité guidée de découverte et de construction du ruban de Mobius. L'élève fait les manipulations en même temps que l'exposant. La mallette contient 2 feuilles A4 à reproduire avec toutes les bandes matérialisées avec les pointillés de découpe.

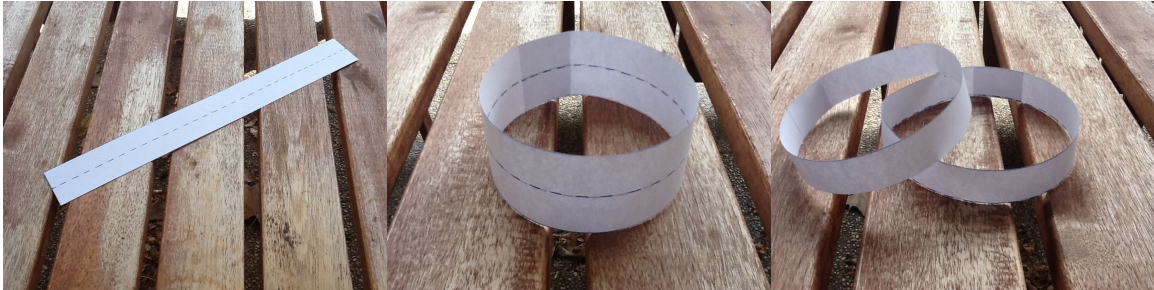
- une activité de recherche. Ce sont les questions P1Q6, P2Q3, P3. La partie 4 peut être prolongée par la création de nouvelles combinaisons selon l'imagination de l'élève et permet une activité plus ouverte. Deux feuilles de gabarit (bandes vierges) sont disponibles pour cette activité.



* Mathematisches Institut, Justus-Liebig Universität, 35390 Giessen, Allemagne

Partie 1: Où l'on découvre le ruban de Mobius et quelques unes de ses propriétés.

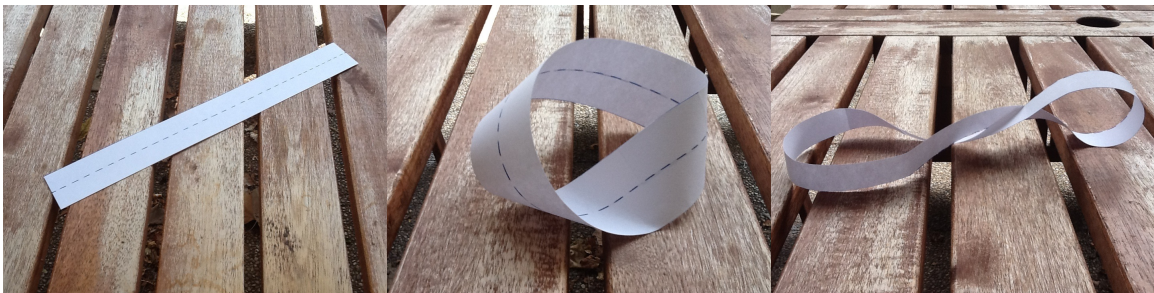
1) Prendre une bande et la coller pour en faire un cylindre. (on peut repasser les pointillés intérieurs en vert et les pointillés extérieurs en rouge). En coupant selon les pointillés on obtient deux cylindres.



En faisant repasser les pointillés avec deux couleurs différentes on donne un moyen de définir le nombre de face de l'objet.

Dans la suite on appellera *bande* le morceaux de papier. Lorsque la bande est collée elle devient un *ruban*.

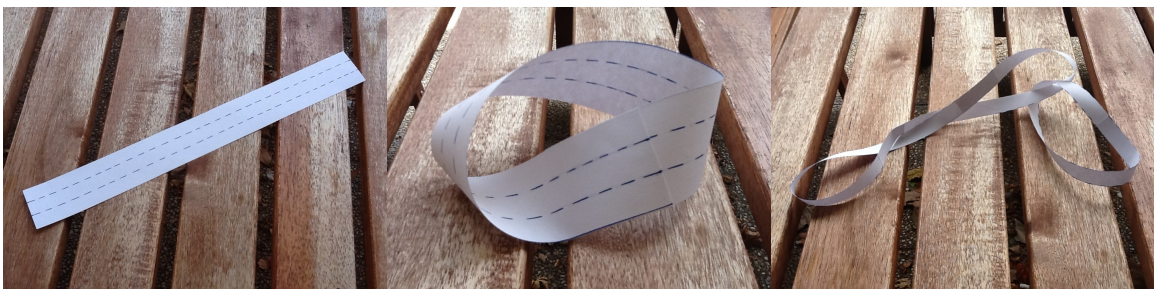
2) Prendre une bande et la coller après lui avoir fait faire un demi-tour. Et si on essaye de repasser les pointillés intérieurs en vert et les pointillés extérieurs en rouge ? Le ruban de Mobius n'a qu'une seule face! Que va-t-on obtenir en coupant suivant les pointillés ? Essayer de deviner puis vérifier.



Parcourir le ruban de Mobius est toujours fascinant, même quand on est habitué. Il est amusant de laisser les élèves découvrir tout seuls qu'il est impossible d'utiliser deux couleurs et qu'on revient toujours au point de départ. On peut prendre les paris sur ce qu'on va obtenir avant d'autoriser le découpage. Il y a toujours des propositions intéressantes.

On obtient un seul objet !

3) Prendre une autre bande qui va être coupée en 3. Construire le ruban de Mobius. Que va-t-on obtenir en coupant suivant les pointillés ? Essayer de deviner puis vérifier.



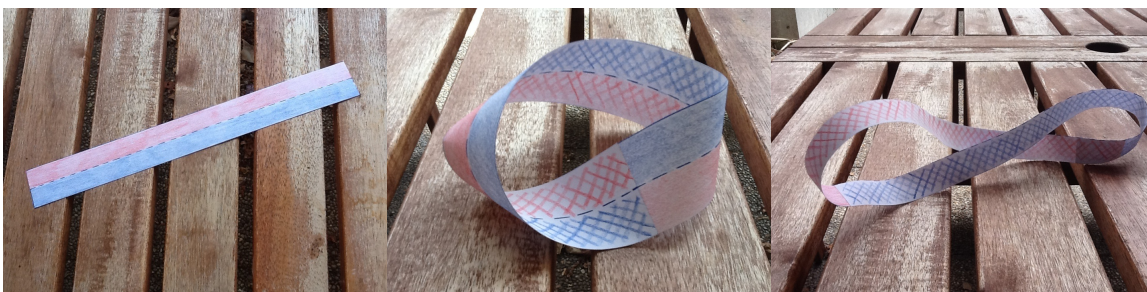
On voit que l'enjeu est de trouver le nombre d'objets obtenus après découpage. On verra que l'on peut aussi s'intéresser au niveau d'entortillement des bandes et à leur entrelacement éventuel.

On obtient deux rubans entrelacés : un grand et un petit. On peut demander, à ce moment, aux élèves de proposer une explication. Certains y arrivent.

4) Avant de continuer on voudrait comprendre ce qui se passe.

La suite propose une méthode d'analyse de la situation utilisant des couleurs, elles permettent de visualiser la structure des objets créés et d'avoir ainsi un support de réflexion. Les bandes utilisées ont les mêmes couleurs sur leurs deux faces mais la texture est différente (remplie ou hachurée) ce qui permet de distinguer le recto du verso.

- Construire un ruban de Mobius avec la bande en deux couleurs. On peut distinguer les deux faces de la bande et regarder comment elle se raccorde. Découper suivant les pointillés. Peut-on maintenant expliquer ce qui s'est passé ?



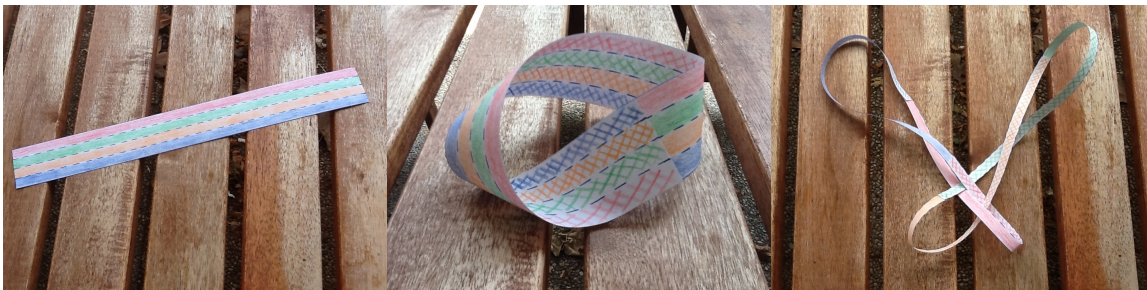
L'explication se trouve en observant la jonction entre les deux extrémités de la bande. On voit que le bleu se raccorde avec le rouge et inversement. Il ne peut donc y avoir, après découpage, qu'un seul objet bicolore. Si on s'intéresse à l'entortillement de l'objet obtenu, on peut compter qu'à chaque raccord le ruban a effectué un demi-tour. L'entortillement est donc de 2 demi-tour. Suivant le niveau des élèves on peut ou non faire de l'entortillement un objet d'étude.

- Construire le ruban de Mobius avec la bande de 3 couleurs, observer la jonction et essayer d'expliquer le résultat obtenu par le découpage.



On observe qu'on obtient deux objets entrelacés : un grand bicolore rouge-bleu entortillé 2 fois (deux raccords) et un petit vert entortillé une fois (un seul raccord).

5) On peut maintenant continuer à découper. Prendre la bande de 4 couleurs et construire le ruban de Mobius. Deviner ce qu'on va obtenir puis faire le découpage pour vérifier.



On obtient 2 rubans bicolores (observer les jonctions) entrelacés. Chacun des deux rubans est entortillé 2 fois (2 raccords).

6) Répondre, en expliquant, aux questions suivantes :

Qu'obtient-on si on découpe la bande en 5 ? En 6 ?

En 5 : 2 grands rubans entortillés 2 fois et 1 petit entortillé 1 fois.

En 6 : 3 grands rubans entortillés 2 fois.

Qu'obtient-on si on découpe la bande en 23 ? En 50 ?

En 23 : 11 grands rubans entortillés 2 fois et 1 petit entortillé 1 fois.

En 50 : 25 grands rubans entortillés 2 fois.

Peut-on trouver une règle ?

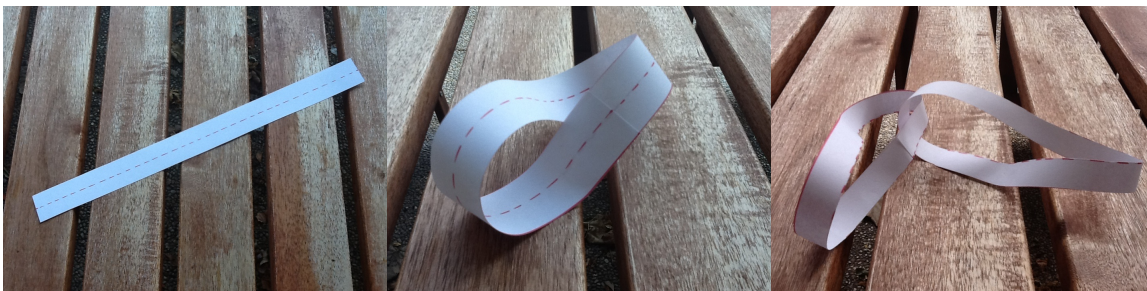
Si n est pair, on obtient $n/2$ grands rubans entortillés 2 fois.

Si n est impair, on obtient $(n-1)/2$ grands rubans entortillés 2 fois et 1 petit entortillé 1 fois.

Pour les découpes en 5 et 6, les élèves ont encore la possibilité de construire les rubans correspondants et d'utiliser une observation directe. Par contre, pour les découpes en 23 et 50 ils sont obligés de raisonner. La règle s'énoncera surtout à l'aide de phrases dans les petites classes. On attend plutôt ce genre de formulation algébrique au lycée.

Partie 2 : Où l'on fabrique d'autres sortes de rubans

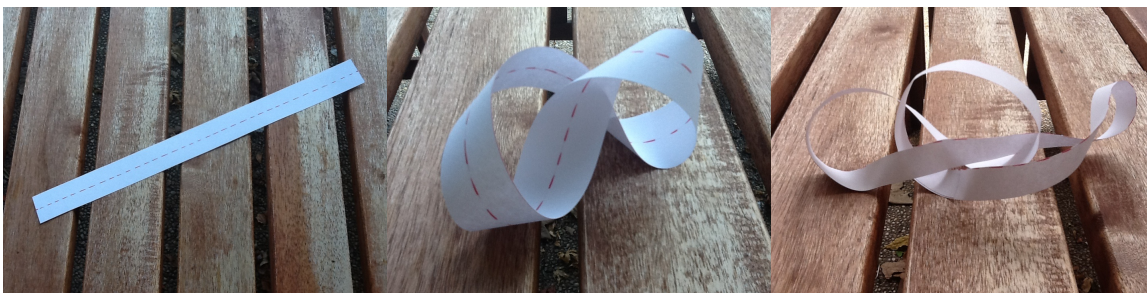
1) Prendre une bande plus mince et lui faire faire 2 demi-tours avant de la coller. Combien le ruban a-t-il de faces ? Essayer de deviner ce qui va se passer quand on va le couper au milieu puis faire le découpage pour vérifier. Comment peut-on expliquer ?



Pour ces nouveaux rubans il est nécessaire d'utiliser une bande plus mince que pour les constructions précédentes.

Après découpage on obtient deux rubans identiques au ruban d'origine (entortillé 2 fois). Pour déterminer le nombre de face du ruban (2 faces), une méthode consistant à suivre les pointillés a été donnée avec les deux premières questions de la partie 1. Elle peut être réinvestie ici par les élèves, ainsi que l'utilisation des couleurs pour trouver une explication.

2) Prendre une autre bande et lui faire faire 3 demi-tours avant de la coller. Combien le ruban a-t-il de faces ? Essayer de deviner ce qui va se passer quand on va la couper au milieu puis faire le découpage pour vérifier. Comment peut-on expliquer ?



On obtient un seul ruban entortillé 6 fois (3 demi-tours à chaque jonction)

3) Répondre, en expliquant, aux questions suivantes :

Qu'obtient-on si on découpe un ruban avec 4 demi-tours ? avec 5 demi-tours ?

Avec 4 demi-tours, on obtient 2 rubans entortillés 4 fois.

Avec 5 demi-tours, on obtient 1 ruban entortillés 10 fois (5 demi-tours à chaque jonction)

Qu'obtient-on si on découpe un ruban avec 15 demi-tours ? avec 22 demi-tours ?

Avec 15 demi-tours, on obtient 1 ruban entortillés 30 fois (15 demi-tours à chaque jonction)

Avec 22 demi-tours, on obtient 2 rubans entortillés 22 fois.

Peut-on formuler une règle ?

On note t le nombre de demi-tours.

Si t est pair on obtient 2 rubans entortillés t fois.

Si t est impair on obtient 1 ruban entortillés $2t$ fois

Partie 3 : Ce qu'on peut découvrir si on a fini avant les autres

On va maintenant découper les rubans entortillés en plus de parties. On peut fabriquer certains objets mais pas d'autres.

1) Expliquer ce qui se passe si on coupe en 3 une bande avec 2 demi-tours ? et si on la coupe en 4 ?

2) Expliquer ce qui se passe si on coupe en 3 une bande avec 3 demi-tours ? et si on la coupe en 4 ?

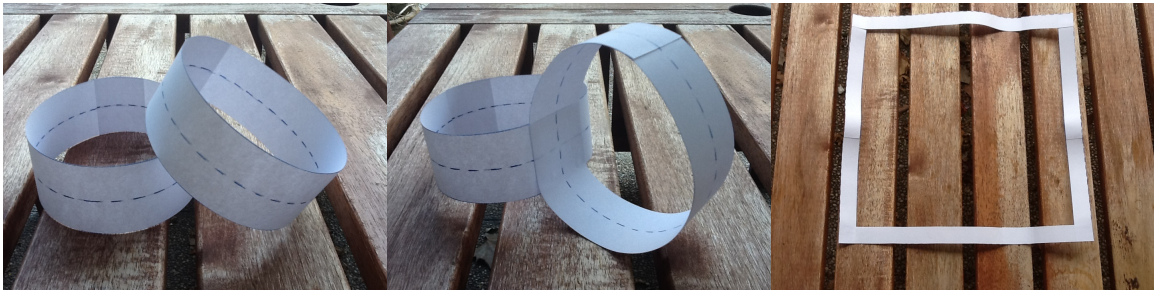
3) Expliquer ce qui se passe si on coupe en 9 une bande avec 5 demi-tours ?

4) Peut-on formuler une règle ?

Partie 4 : D'autres objets à construire et à étudier.

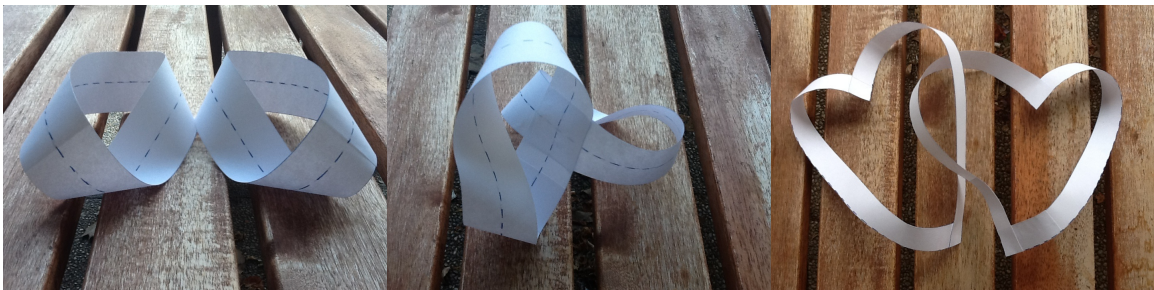
1) Premier objet

Construire deux cylindre et les coller perpendiculairement. Que va-t-on obtenir en coupant suivant les pointillés ? Peut-on l'expliquer ?



2) Deuxième objet

Construire un ruban de mobius. Construire un deuxième ruban en effectuant le demi-tour dans l'autre sens (c'est important). On obtient deux rubans de Mobius symétriques. Coller les deux rubans perpendiculairement. Que va-t-on obtenir en coupant suivant les pointillés ? Peut-on l'expliquer ?



3) Il y a plein d'autres combinaisons de rubans et/ou de cylindres à explorer...

Cette activité a été menée en classe de seconde avec un groupe d'une vingtaine d'élèves. Dans un premier temps toutes les manipulations ont été faite simultanément par l'intervenant et par les élèves. Dans un deuxième temps les élèves ont reçu pour consigne de mener leurs propres explorations et de proposer, pour chaque observation, une explication. Ces explications devaient faire l'objet d'un compte-rendu écrit pour chaque groupe de 4 élèves. L'ensemble s'est déroulé sur une séance de 2 heures.