

Parcours "Mesurer, remplir"

Groupe "Analyse et modélisation au lycée" de l'IREMI de Grenoble*

8 juillet 2025

Le parcours de modélisation intitulé "Mesurer, remplir" réunit 3 situations de modélisation autour des notions de géométrie (surfaces et volumes, empilements) et d'analyse (encadrement, optimisation). Même si les thématiques de géométrie sont moins présentes qu'avant au lycée, ce parcours est une occasion de mobiliser des connaissances abordées à plusieurs reprises au collège pour les transférer à des problèmes où l'objectif principal d'apprentissage est la modélisation. Cette familiarité avec la géométrie contribue, à notre avis, à la facilitation de la dévolution dans l'apprentissage des notions de modélisation. Si l'activité "ping-pong" est réalisée en Terminale, le cas compact 3D de l'activité "ping-pong" s'accorde bien avec le programme de géométrie dans l'espace (orthogonalité et calcul de distances). D'autres objectifs d'apprentissage secondaires concernent la notion d'intervalle ainsi que des notions d'optimisation retrouvées tout au long du parcours.

Liste de situations d'apprentissage

Les tâches proposées et leur ordre ont une cohérence par rapport aux différents objectifs d'apprentissage : le cycle de modélisation, l'encadrement en utilisant un intervalle, l'optimisation de cet intervalle, le calcul du nombre d'objets empilés.

- *Superficie d'une île* : à partir d'une photo aérienne d'une île, on cherche à calculer un intervalle qui encadre sa surface. On introduit ainsi les notions de borne inférieure et borne supérieure, la modélisation d'un objet réel par des objets mathématiques connus (polygones), l'optimisation par augmentation de la résolution, ainsi qu'un premier cycle simplifié entièrement présenté par l'enseignant.e.
Durée : 65-75 minutes
Matériel : impressions photo île, règle, compas.
- *Déménagement* : afin d'optimiser l'espace utilisé dans un camion, on demande de choisir entre deux tailles de cartons. Ici, les élèves s'exercent aux empilements et aux arguments qui justifient l'optimalité ou la non-optimalité d'une configuration. Côté modélisation, on demande aux apprenants de participer à la construction d'un cycle

*Marie Busser (INSPE de Grenoble), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Hélène Langlais (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Cyril Masson (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Florence Michon (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes) et Iulia Tunaru (Univ. Grenoble Alpes)

de modélisation de même complexité que le premier. Cette situation prépare les élèves pour les empilements plus complexes de l'activité suivante.

Durée : 80-90 minutes

Pas de matériel spécial indispensable.

- *Ping-pong* : on voudrait connaître le nombre maximal de balles de ping-pong que l'on peut mettre dans la salle de classe. Il s'agit d'un problème d'empilement de sphères pour lequel on demande explicitement un résultat sous forme d'intervalle. Cette situation comprend aussi un test sur un modèle réduit (des balles en cellulose et des boîtes de chaussures) et la discussion de l'effet de bord déjà rencontré lors de la situation précédente. Le dernier cycle de modélisation est projeté avec les cases vides et les élèves doivent essayer de le remplir.

Durée : environ 1h45

Matériel : des boîtes et des balles pour le test, disponibles à l'IREMI de Grenoble et à Chamonix.

Proposition d'évaluation

En guise d'évaluation sommative, nous proposons la situation de modélisation suivante, que nous avons empruntée à [1] et qui est, d'un point de vue du contenu mathématique, similaire à la dernière tâche de modélisation (ping-pong). Elle permet aussi d'évaluer des aspects liés à la modélisation : comparaison de modèles, limitations, simplifications, notion de borne supérieure et inférieure, effet de bord, cycle de modélisation.

Nous avons fait le choix des calculs guidés dans les questions de résolution mathématique, d'autres choix sont évidemment possibles. L'expérience montre que la formule de la circonférence du cercle devrait être donnée à l'avance.

La durée conseillée est de 45 min avec l'autorisation des calculatrices.

Sujet

Deux modèles M1 et M2 sont proposés pour répondre à la question. Compléter les **calculs littéraux** et répondre aux questions dans les espaces prévus. On rappelle que la formule pour la circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.

1. Le modèle M1 consiste à considérer qu'on peut enrouler le câble en utilisant des anneaux concentriques indépendants dont la section est montrée dans la figure (une autre façon de voir c'est de s'imaginer qu'on peut couper le câble et recommencer). On a donc le même nombre d'anneaux dans chaque étage, mais plus l'étage est éloigné du centre, plus l'anneau est grand. On suppose que le câble est suffisamment flexible pour s'enrouler parfaitement autour du touret.

On calcule alors le nombre d'anneaux par étage $n = \frac{L}{\dots}$ et le nombre d'étages comme $e = \frac{\dots}{2r}$. On prend la partie entière de ces résultats et on obtient $n = 14$ anneaux par étage et $e = 6$ étages d'anneaux, donc 84 au total.

En prenant comme rayon de chaque anneau la distance entre l'axe central du touret (en pointillés) et le milieu du câble, on obtient que le rayon des anneaux du premier étage est $R_2 + r$, le rayon des anneaux du 2ème étage est et ainsi de suite, le rayon des anneaux du 6ème étage est

En utilisant la circonférence de chaque anneau, la longueur totale du câble est :

$$L_1 = \dots\dots\dots \approx 792 \text{ m}$$

2. Un calcul alternatif du nombre total d'anneaux est : la partie entière du quotient entre la surface du rectangle surligné et le carré circonscris à la section du câble (voir Figure 2) :

$$\left\lfloor \frac{L(R_1 - R_2)}{4r^2} \right\rfloor = 92.$$

Entre 84 (question 1) et 92 (question 2) quelle réponse choisiriez-vous et pourquoi ? Connaissez-vous un terme pour le phénomène qui expliquerait cette différence ?

3. Dans le modèle M2 on considère que le câble remplit complètement le volume autour du touret donc la longueur du câble est le volume disponible $V = \pi R_1^2 L - \dots\dots$ divisé par la surface de la section du câble $S = \pi r^2$ donc $L_2 = V/S$ (pas besoin de calculer la valeur numérique).

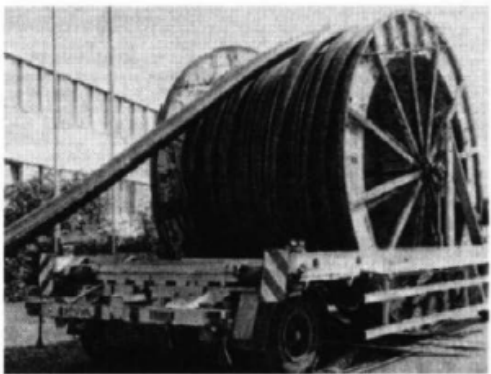
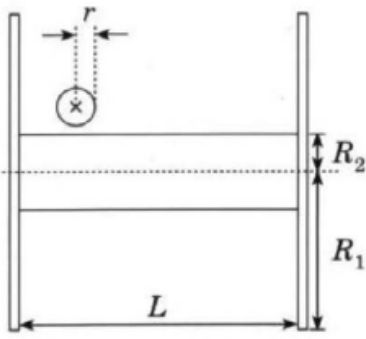
	
Quelle est la longueur du câble de rayon r qu'on peut enrouler sur le touret ci-dessus de façon que le câble ne dépasse pas les bases du touret ?	
Mesures: $L = 4.4 \text{ m}$ $R_1 = 2.5 \text{ m}$ $R_2 = 60 \text{ cm}$ $r = 15 \text{ cm}$	Attention, le diagramme ci-dessus n'est pas à l'échelle en ce qui concerne la section du câble.

FIGURE 1 – Situation de modélisation empruntée à [1] et utilisée pour l'évaluation sommative

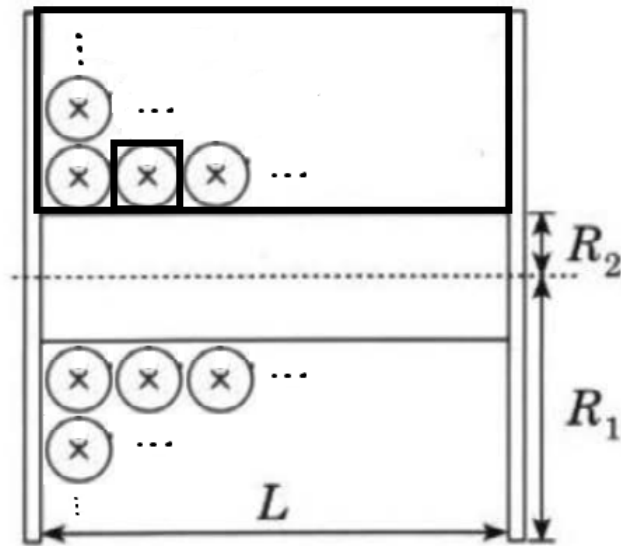


FIGURE 2 – Section verticale du système touret-câble, vue du dos du camion

La valeur L_2 ainsi obtenue est-elle une borne pour la longueur réelle du câble ?
Si oui, quel type de borne (inférieure/supérieure) ? Sinon, justifier.

4. Quels seraient les avantages et limites de ces deux modèles ?
Auriez-vous d'autres modèles à proposer (avec une phrase et/ou un dessin) ?
5. Faire un cycle de modélisation pour le modèle M1.

Observations expérimentales

L'évaluation a été testée sur 45 étudiants de l'année propédeutique de l'UGA qui avaient (en grande majorité) suivi les 3 situations de modélisation du parcours. Par contre, le sujet de modélisation faisait partie d'un DS plus long et uniquement 20 minutes y ont été allouées. Cela est insuffisant pour la majorité d'apprenants et il serait préférable que l'évaluation soit séparée de toute autre évaluation pour que les élèves puissent aborder sereinement le sujet. Avant d'analyser les résultats nous avons écarté 7 copies car les étudiants n'avaient pas touché le sujet (désinvestissement général ou absences).

- Pour tester la compréhension du schéma par les étudiants nous avons regardé le taux de succès de la question 1 (formules de n et e) : 50%
- La question 2 a été très peu réussie : le terme "effet de bord" n'est pas ressorti et le calcul n'a pas été compris. Nous avons donc amélioré le sujet en mettant plus d'explications pour le quotient des surfaces et nous avons encadré en gras les surfaces.
- La question 3 a été plus réussie dans le sens où les étudiants ont identifié le fait qu'il s'agit d'une borne supérieure mais n'arrivent pas forcément à trouver la bonne formule, probablement aussi à cause du manque de temps.

- Très peu d'étudiants ont abordé le cycle (manque de temps et d'entraînement car nous n'avons pas eu le temps de faire un cycle d'entraînement auparavant).
- Pour la dernière question, plusieurs types de réponses ont été observés.
 - Tout d'abord, certains ne se rendent pas compte que les deux modèles proposés ne sont pas réalistes (pour des raisons différentes) ou insistent sur la supériorité du modèle M2 (probablement car il s'agit d'une valeur plus élevée).
 - D'autres proposent d'effectuer un test sur un modèle réduit, ce qui peut-être une confusion avec la validation du modèle, ou d'appliquer une méthode proportionnelle pour le calcul de la longueur totale à partir d'un modèle réduit. Dans la même catégorie, un étudiant propose de peser le touret avant et après enroulement pour calculer la longueur totale à partir du poids de 5 m de câble.
 - Pour améliorer le modèle M1, un apprenant suggère de prendre en compte la rigidité du câble (avec des espaces entre les étages). Pour améliorer M2, un autre propose d'intégrer un facteur de correction pour l'espace entre les câbles.
 - Plusieurs étudiants décrivent un modèle alternatif où les étages sont décalés d'un rayon pour que l'empilement soit plus compact. Pour des raisons géométriques, ce rangement n'est pas possible sans découper le câble.

Références

- [1] Mogens Niss and Werner Blum. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge, 2020.