

Année universitaire 2021-2022

Master Meef Pratique et Ingénierie de la Formation
parcours DSN

Enseigner la preuve à des élèves
d'école primaire au sein d'un projet
LéA

Présenté par : Laurence Mossuz

Co-encadré par : Michèle Gandit et Sylvain Gravier

Attestation de non-plagiat

Je, soussigné(e)

Laurence MOSSUZ

Auteure du mémoire de MASTER MEEF PIF/DSN,

« Enseigner la preuve à des élèves d'école primaire au sein d'un projet LÉA »

déclare **sur l'honneur que** ce mémoire est le fruit d'un travail personnel, que je n'ai ni contrefait, ni falsifié, ni copié tout ou partie de l'œuvre d'autrui afin de la faire passer pour mienne.

Toutes **les sources** d'information utilisées et les citations d'auteur ont été mentionnées conformément aux usages en vigueur.

Je suis conscient(e) que le fait de ne pas citer une source ou de ne pas la citer clairement et complètement est constitutif de plagiat, que le plagiat est considéré comme une faute grave au sein de l'Université, **pouvant être sévèrement sanctionnée par la loi.**

Fait àAnnecy,.....

le30/08/2022.....



« [...] un problème mathématique devrait être difficile à résoudre pour nous séduire, mais pas complètement inaccessible de peur qu'il ne se moque de nos efforts. Il devrait être pour nous, un guide sur les chemins labyrinthiques des vérités cachées, et, finalement un rappel de notre plaisir à l'aboutissement de sa solution¹. »

¹ Traduit de l'extrait de Mathematical Problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, By Professor David Hilbert, <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Sylvain Gravier d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire. Les prouesses de la technologie m'ont permis de le rencontrer, d'échanger avec lui en essayant de comprendre sa pensée (très rapide) et d'apprendre un peu de ce domaine des mathématiques qui m'est encore à ce jour, si complexe et mystérieux.

Je remercie également ma collègue Nathaly Essonnier, membre de notre groupe IREM, d'avoir accepté de faire partie de mon jury. J'attends ses remarques pertinentes avec impatience.

Je remercie aussi mes chers collègues de l'école du Parmelan Annecy avec lesquels je travaille depuis quatre ans sur ce projet, ainsi que ceux qui nous ont rejoint, sans lesquels nous ne pourrions mener notre recherche. Leur implication au niveau du terrain et leurs réflexions furent et sont très formatrices personnellement et porteuses pour le projet.

Je remercie particulièrement Caro pour son accueil chaleureux dans sa classe et sa disponibilité.

Enfin, je remercie Michèle de m'avoir accompagnée dans ce travail au long court. Michèle Gandit sans qui nous n'aurions pu faire de problèmes ouverts ni de SiRC. Michèle, sans qui mes connaissances autour de la résolution de problèmes n'en seraient pas là. Sa disponibilité, sa bonne humeur, sa générosité et surtout, son appétence pour le partage des connaissances, m'ont permis d'évoluer, de douter, de progresser dans ma réflexion et ma pratique.

Michèle, aux multiples casquettes : chercheuse, formatrice à l'INSPE, coach, un grand merci !

A Brigitte.

TABLE DES MATIERES

1. Introduction générale	7
1.1 Contexte de la recherche	8
2. Cadre théorique	11
2.1 Les conceptions	11
2.2 Un modèle des conceptions de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver »	12
2.2.1 La conception du chercheur	13
2.2.2 La conception épistémologique de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver »	14
2.2.3 La conception de l'enseignant par rapport à la transposition en classe du « chercher-prouver »	15
2.3 Nos situations	17
2.3.1 Le problème ouvert	18
2.3.2 Les SiRC	19
2.3.3 Les caractéristiques de nos situations	21
2.4 Les leviers pour favoriser la transposition du « chercher-prouver »	23
2.4.1 Cartographie d'une transposition du « chercher-prouver »	23
2.4.2 Notre progression de problèmes	24
2.5 Problématique	28
3. Méthode	29
3.1 Les participants	29
3.2 Objectif : mesurer l'évolution de la pratique d'une enseignante	29
3.2.1 Critères et indicateurs du débat scientifique	30
3.2.2 Critères et indicateurs de la conclusion du problème et de l'institutionnalisation	33
3.3 Notre progression de problèmes : un premier outil pour l'enseignant	34
3.3.1 Le problème des Billets et deux variantes	34
3.3.2 Le problème des Diagonales	36
3.3.3 Le problème des Gommettes	36
3.3.4 Le problème de la Grille	38
3.3.5 Le problème du Carrelage de la Salle de Bain	40
3.4 Le tableau de progression : un deuxième outil pour les enseignants	41
3.5 Les données	43
4. Les données recueillies	45
4.1 Analyse du tableau I (problème des Billets)	45

4.2 Analyse du tableau II (problème de la Grille)	46
4.3 Analyse du tableau III (problème des Diagonales)	47
4.4 Analyse du tableau IV (problème des Nombres)	48
4.5 Analyse du tableau V (problème des Albums)	49
4.6 Analyse du tableau VI (problème des Gommettes)	50
4.7 Analyse du tableau VII (problème de la SDB)	52
4.8 Analyse du tableau VIII (problème de la Grille)	54
5. Nos résultats	57
5.1 Les invariants dans sa pratique	57
5.2 Les changements dans sa pratique	58
5.2.1 Les modalités de gestion des situations	58
5.2.2 La gestion du débat scientifique	58
5.2.3 La conclusion et l'institutionnalisation	60
5.2.4 Et les élèves ?	61
5.3 Conclusions	62
5.4 Limites et perspectives	62
Bibliographie	63
Sommaire des annexes	65

1. Introduction générale

J'ai le sentiment depuis toujours que l'enseignement des mathématiques est porteur d'autres choses que de notions ou techniques opératoires, comme s'accordent à le dire nos élèves puisque c'est ce que, la plupart du temps, on leur demande de faire.

Perrin (2007), affirme :

« En effet, à côté de l'aspect utilitaire lié à leurs applications, l'enseignement et la pratique des mathématiques ont une autre raison d'être : ils contribuent à former les citoyens au raisonnement et à la réflexion, donc à leur donner les outils pour comprendre le monde et le regarder avec un esprit critique. C'est à ce deuxième aspect que renvoie la question : comment faire des mathématiques » (p.6).

C'est cette potentialité des mathématiques que nous souhaitons investir à travers ce mémoire, pour amener les élèves à découvrir et pratiquer les mathématiques autrement, selon leur dimension expérimentale. Au delà du plaisir, ce contexte alternatif à un enseignement plus traditionnel, est aussi un moyen de développer des savoirs spécifiques propres à la démarche scientifique, essentiels pour faire des mathématiques. C'est aussi le lieu pour révéler la dimension sociale de cette discipline et leur montrer que cette science est en perpétuelle évolution. Dans cette perspective, les difficultés de nos élèves deviennent les nôtres – les problèmes d'apprentissage ne peuvent être réduits exclusivement à des problèmes cognitifs – ce qui nous ramène de manière inaltérable à nous, enseignants, à nos conceptions sur ce que signifie faire des mathématiques et à notre culture mathématique.

Dans son allocution à la conférence du mois de janvier 2012² portant sur les démarches d'investigation, Michèle Artigue (2012) conclut : « l'importance, c'est d'apprendre à faire vivre au quotidien de réels moments d'investigation aux élèves dans les classes au cours d'activités mathématiques qui peuvent apparaître a priori plus classiques ». Mais elle souligne aussi que l'avènement de tels moments ne va pas de soi et requiert une formation et un accompagnement des enseignants sur le long terme.

C'est dans cette perspective d'accompagnement que s'inscrit notre recherche collaborative au long court, afin d'amener les enseignants à une certaine consistance épistémologique, chère à Marc Legrand, essentielle pour évoluer dans notre enseignement. Notre objectif est d'insuffler aux élèves et aux enseignants un goût pour la recherche, induire des réflexions et un engagement scientifique de la part de nos élèves et de nous-mêmes, et, mesurer les enjeux de telles situations en classe.

Je cite Perrin (2007) pour conclure :

« Evidemment, on peut enseigner les mathématiques de manière rigide, formelle, contraignante et insipide et c'est d'ailleurs souvent ainsi que le grand public les perçoit. Je pense qu'on ne remplit pas alors l'objectif d'apprendre à raisonner, à penser, en un mot. Pour éviter cette dérive, l'une des solutions essentielles me semble être de revenir à la vocation première des mathématiques et de leur enseignement, qui est de poser³ et de résoudre des problèmes⁴ » (p.6).

² Conférence du 14 janvier 2012, dont l'intitulé est : « Démarches d'investigation, problèmes ouverts, ..., recherche didactique : une perspective historique : <https://www.youtube.com/watch?v=A1PNXDCJmTo>.

³ En note de bas de page dans le texte original : « De manière provocatrice, sans doute parce que c'est ce que je sais le mieux faire, j'ai, envie de dire que c'est cela le plus important, battant en brèche une tradition séculaire de l'enseignement des mathématiques, qui ne sort que rarement du : « montrer que » ».

⁴ Le mot *problème* est employé au sens de question mathématique et non d'exercice.

1.1 Contexte de la recherche

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire s'inscrit dans la continuité d'un projet initial mené par le groupe IREM Haute-Savoie (2018-2021), sous l'égide de Michèle Gandit, en collaboration avec les écoles du Parmelan et de Vallin Fier d'Annecy. Ce projet a émergé de la volonté d'un groupe d'enseignants de l'école du Parmelan, porté par sa directrice Hélène Abella, d'améliorer leurs pratiques dans le domaine de la résolution de problèmes pour faire progresser leurs élèves. Les enseignants observaient que les élèves ne s'engageaient guère dans la recherche du problème. Peu réalisent des essais pour produire un premier résultat (partiel), ou certains préfèrent ne rien faire plutôt que de produire une réponse erronée. Souvent, la solution doit être immédiate sinon ce n'est pas possible ou il n'y en a pas. Les élèves s'arrêtent dès qu'ils ont trouvé un résultat sans le vérifier, laissant la validation à l'enseignant. Notre équipe de recherche a alors choisi de se placer du côté des enseignants pour les amener à évoluer vers une pratique plus adéquate dans le domaine de la résolution de problèmes et favoriser les apprentissages des élèves.

Dans cette perspective, nous avons mis au point une première progression de problèmes, abordables à tout niveau, qui permet d'initier les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et de favoriser leur engagement dans des actions scientifiques en lien avec la preuve (Gandit, 2015). Ces problèmes sont adaptés à la pratique de la preuve en classe sous réserve d'une gestion adéquate de la part des enseignants (Gandit & al., 2011). Gandit (2015) a décrit des conditions relatives à une mise en œuvre idéale d'une pratique de la preuve en classe à travers quatre variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer. Néanmoins, ces conditions nécessaires se révèlent difficiles à réaliser, même pour des professeurs expérimentés, comme en témoignent les enseignants impliqués depuis le début dans notre projet de recherche-formation. Pour les accompagner dans la gestion de ces situations, nous avons développé des premiers outils⁵, grâce auxquels les enseignants progressent dans la mise en œuvre de la démarche de résolution du problème. Néanmoins, nous avons pu repérer leurs difficultés (formalisées par les enseignants eux-mêmes) pour conduire la mise en commun, expliciter les connaissances en jeu et les institutionnaliser. Ces constats sont révélateurs du fait qu'ils ne parviennent pas à mettre en œuvre le processus de preuve.

Or, la preuve est centrale en mathématiques et son enseignement primordial pour préparer les élèves à l'exercice d'une pensée rationnelle, la formation de l'esprit critique et le développement de l'autonomie ; il permet aussi d'amener les élèves à pratiquer les mathématiques autrement et modifier leur rapport à cette discipline. Néanmoins, son enseignement est difficile à tous les niveaux.

Brousseau (1998) l'affirme d'ailleurs : « Il ne s'agit donc pas seulement pour l'enfant de « savoir » des mathématiques mais de les utiliser en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition [...] ce qui exige une attitude de preuve. Cette attitude n'est pas innée. Elle se développe et s'entretient par des situations didactiques particulières. [...] Le « pourquoi » en mathématiques ne peut être appris en référence à l'autorité » (p. 39).

Ce mémoire porte sur l'enseignement de la preuve à des élèves d'école primaire. Il est réalisé dans le cadre du projet LéA⁶ initié par Michèle Gandit. Son intitulé de recherche est : *Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique*. Le projet s'articule autour de deux questionnements : est-il possible, grâce à une

⁵ Essonnier, N., Gandit, M., Mossuz, L. & Salmon, J.-C. (2019-2021). Projet IREM de recherche-action-formation sur la résolution de problèmes aux cycles 1, 2 et 3, avec les écoles du Lachat, du Parmelan, de Vallin-Fier, de La Plaine (Annecy).

⁶ LéA : <http://ife.ens-lyon.fr/lea> ; les porteurs du projet pour la recherche sont l'IREM et Michèle Gandit.

progression dans l'enchaînement de situations de recherche – et de problèmes s'en approchant – d'amener les enseignants à une pratique adéquate, favorisant l'autonomie, la responsabilité scientifique des élèves et le débat scientifique ? Quels bénéfices en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes ?

Nous partons d'un constat : à l'école primaire, les enseignants proposent peu de problèmes pour chercher, par manque de temps ou d'expérience, privilégiant les problèmes de réinvestissement, d'entraînement ou ceux pour découvrir de nouvelles notions⁷ (les situations problèmes). Or, cette pratique usuelle est bien loin des activités de recherche en mathématiques. Cette frilosité à l'égard des problèmes pour chercher est peut être liée au manque d'informations des programmes qui, explicitent peu la façon de mettre en œuvre ces problèmes. Elle est aussi sans doute propre à l'enseignant, à son histoire mathématique, sa formation, ses rencontres avec les problèmes. Cet écart est lié à de multiples facteurs que certains chercheurs ont pu identifier. Grenier (2009) met en évidence notamment trois causes principales d'inquiétude ou de refus qui sont « unanimement⁸ exprimées » par les enseignants du secondaire. Je cite :

- « Les contraintes institutionnelles : il n'y a pas ni le temps ni la « place » pour laisser les élèves chercher vraiment [...]
- La conviction que les problèmes de ce type ne sont pas accessibles aux élèves (quel que soit le niveau !), et ce serait donc du temps perdu pour l'apprentissage. Mais cela dépend de quels apprentissages il s'agit. Là, ce sont les conceptions des enseignants sur ce qu'il est prioritaire d'enseigner et sur les capacités des élèves qui sont en question.
- L'absence de formation à la gestion de ces situations » [...] (p. 163).

La pratique de la preuve en classe ne va de soi. Mais faut-il en rester là ? A travers notre étude, nous essaierons de montrer qu'il est possible, pour des enseignants de l'école primaire, d'amener les élèves à s'engager dans des problèmes complexes de recherche et entrer dans la preuve. Il s'agit de développer d'autres formes de connaissances, constitutives de la démarche scientifique.

Les instructions officielles nous renforcent dans l'idée de mener notre étude. Un extrait du rapport Villani-Torrossian (2018) souligne : « Les mathématiques sont nécessaires à la démocratie parce qu'elles favorisent l'autonomie et la capacité d'innovation. Il est ainsi indispensable de fournir aux enfants tous les outils de logique, de calcul, de développer chez eux l'intuition et la démarche scientifique, la rigueur et sa nécessité, et enfin de leur permettre de mener des raisonnements et d'élaborer des preuves » (p. 31).

Par ailleurs, les programmes de 2020 mettent en avant, pour le cycle 2 et le cycle 3, les « problèmes pour apprendre à chercher ». Ces problèmes ne sont pas sans rappeler les « problèmes pour chercher », introduits en 2002, « centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte » (MEN, 2002).

Pour le cycle 2 : « La résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. [...] On veillera aussi à proposer aux élèves dès le CP des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas de simples problèmes

⁷ On désigne aussi les notions par connaissances d'ordre I (en référence à Sackur & al., 2005). Ce sont les contenus classiquement enseignés, répertoriés dans les programmes. Nous les distinguons des connaissances que nous visons dans le cadre de nos situations de recherche.

⁸ Denise Grenier précise dans son article que ces causes sont exprimées par les enseignants eux-mêmes, en réponse à des questionnaires soumis systématiquement sur plusieurs années.

d'application à une ou plusieurs opérations mais nécessitent des recherches avec tâtonnements » (MEN, 2020, p.84).

Pour le cycle 3 : « On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements » (MEN, 2020, p. 182).

Ces éléments montrent que notre étude s'inscrit dans les attentes institutionnelles.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous questionnons sur l'enseignement de la preuve à des élèves d'école primaire en nous focalisant sur les pratiques des enseignants. Notre problématique porte sur la façon de faire évoluer les pratiques des enseignants en agissant sur leurs conceptions par rapport à la pratique de la preuve en classe. Il s'agit, notamment, de rechercher des leviers susceptibles de les soutenir dans la mise en œuvre du processus de preuve.

Déroulement du mémoire

La rédaction de ce mémoire s'articule autour de cinq parties. Après une première partie d'introduction générale, nous présenterons le cadre théorique dans lequel s'ancrage notre travail de recherche et nous formulerons notre problématique. Dans la troisième partie, nous décrirons la méthode que nous avons choisie pour mener notre étude. Les données recueillies seront présentées dans la quatrième partie. Enfin, nous exposerons nos résultats et les conclusions de notre recherche dans une dernière partie. Nous évoquerons également les limites et les perspectives de notre étude.

2. Cadre théorique

2.1 Les conceptions

Nous nous référons à Vergnaud qui, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, a introduit la notion de conception par rapport à un concept mathématique, et, à Artigue qui a enrichi ce modèle en introduisant le sujet pour définir la notion de « conception du sujet ».

Vergnaud (1990) distingue dans un concept mathématique les trois composantes suivantes :

- la classe des problèmes dans la résolution desquels il prend son sens ;
- les outils : théorèmes, techniques algorithmiques spécifiques du traitement du concept ;
- l'ensemble des signifiants associés au concept : représentations symboliques et iconiques, (p. 145).

Artigue (1990) introduit la notion de « conception du sujet », associée à un état de connaissance du sujet, à un instant donné, relativement à un concept donné ». A partir de la définition d'un concept mathématique, elle distingue dans les conceptions du sujet trois composantes :

- la classe des situations-problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève ;
- les outils, théorèmes, algorithmes qu'il utilise pour manipuler le concept ;
- l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer, en particulier les images mentales, les expressions symboliques, (p. 18)

La Recherche nous conforte dans l'idée de travailler sur les conceptions des enseignants.

Arsac (1992), met en évidence deux points fondamentaux, en s'appuyant sur la théorie de la transposition didactique : « le problème de la légitimation du contenu d'enseignement et l'apparition systématique d'un écart entre le savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le système d'enseignement » (p.10). La théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) permet de décrire l'écart entre le savoir enseigné et le savoir savant de référence à partir de deux processus : la transposition externe – première interprétation du savoir savant issue de la noosphère – qui produit le savoir à enseigner, et, la transposition interne où les professeurs procèdent à un nouveau découpage du savoir à enseigner qu'ils organisent avec une certaine liberté et de nombreuses contraintes (liées à l'institution, aux disciplines, aux manuels...), en fonction de leurs propres connaissances et conceptions de l'apprentissage.

Robert et Rogalski (2002) mettent en évidence que les pratiques enseignantes ne peuvent être réduites au seul cadre de la classe. Elles les décrivent comme un système stable, cohérent et complexe, s'articulant autour de cinq composantes : cognitive, méditative, personnelle, institutionnelle et sociale. Les auteures font l'hypothèse que la cohérence du système des pratiques d'un enseignant empêcherait l'introduction d'éléments incohérents avec ce système, ce qui implique l'influence des trois composantes, personnelle, institutionnelle et sociale. La composante personnelle permet de rendre compte des singularités de l'enseignant : « la personne, ses conceptions⁹ quant au savoir, à l'enseignement, à l'apprentissage des mathématiques, sa tolérance en matière de risque, son besoin de confort, les coûts auxquels il est prêt à consentir... » (p. 517).

⁹ opinions, convictions, connaissances, compétences, expériences en matière d'apprentissage passé... p 523

2.2 Un modèle des conceptions de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver »

On nomme « chercher-prouver », le concept central de notre étude.

La preuve se définit à travers trois dimensions, ce qui fait sa particularité et sa complexité. La preuve, comme processus qui vise à lever le doute, à valider, à établir la vérité, à convaincre, mais aussi à expliquer. La preuve¹⁰, comme produit pour communiquer, oralement ou à l'écrit, des mathématiques, en tant que résultats, aboutissement d'un travail d'écriture et de verbalisation, qui accompagne le processus tout au long. A ces deux dimensions, *processus/produit* et *validation/explication* s'en ajoute une troisième qui relève du couple *syntaxe/sémantique*¹¹.

Le modèle que nous présentons vise à traduire la structure et l'évolution des conceptions de l'enseignant par rapport au concept « chercher-prouver¹² » selon trois dimensions :

- La conception épistémologique de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver ». C'est la conception que le sujet s'est forgée par rapport au dit concept à travers son propre vécu en tant qu'enseignant, élève, individu.
- La conception de l'enseignant par rapport à la transposition en classe du concept « chercher-prouver ». La transposition du dit concept relève de son enseignement et de son apprentissage, qu'il est difficile de distinguer.
- La conception du chercheur du « chercher-prouver », (son activité professionnelle). La pratique du chercheur est une pratique de référence, sa conception du « chercher-prouver » sert de référence épistémologique.

Le modèle comporte trois conceptions : la conception du chercheur et celles de l'enseignant (cf. figure 1).

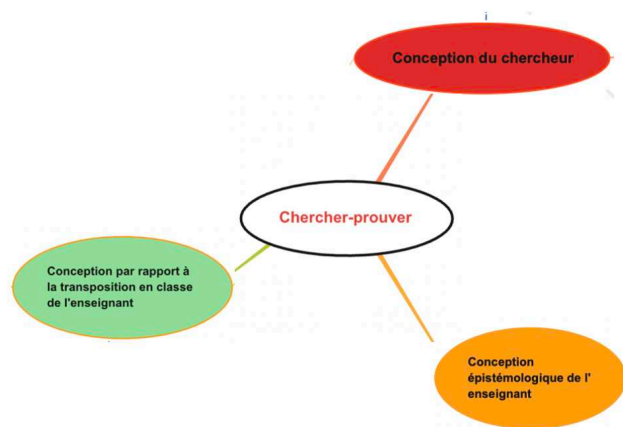


Figure 1 : les trois sphères de notre modèle

Nous faisons l'hypothèse que la conception épistémologique de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver » influence sa conception par rapport à la transposition en classe du dit concept et inversement, si bien qu'il est difficile de les distinguer. C'est notre première hypothèse de travail.

¹⁰ Voir la référence à Deloustal-Jorrand et al. (2020).

¹¹ Dans notre étude, nous ne nous consacrerons pas à la troisième dimension de la preuve qui relève d'un public d'élèves plus grands.

¹² Nous utiliserons plutôt l'expression « chercher-prouver » au lieu de « concept « chercher-prouver » » pour ne pas alourdir le texte.

Le modèle est schématisé dans l'annexe 1.

Pour chaque conception, nous définissons les composantes du triplet, dont les sous-éléments sont des exemples pertinents ou des attendus de ce que l'on a repéré par ailleurs, de la part du sujet – le chercheur ou l'enseignant – au niveau de sa pratique et de son épistémologie.

2.2.1 La conception du chercheur

La conception du chercheur par rapport au « chercher-prouver » décrit la conception qu'il a développée au cours de son activité professionnelle.

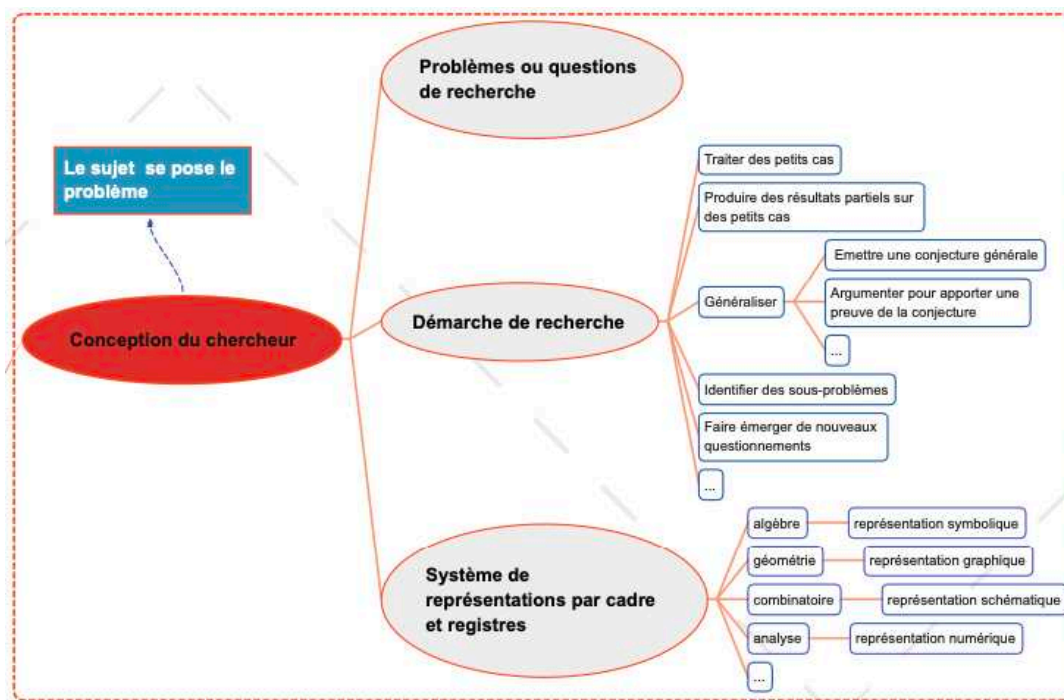


Figure 2 : la conception du chercheur (extrait de l'annexe 1)

La conception est décrite à partir des trois composantes :

- les problèmes ou les questions de recherche qu'il a traités ou en cours de traitement ;
- les démarches de recherche qui s'appuient sur des compétences heuristiques (chercher, prouver, raisonner, communiquer, représenter, modéliser) inhérentes à la recherche d'un problème : traiter des petits cas, identifier des sous-problèmes, produire des conjectures générales, argumenter pour apporter une preuve de la conjecture, faire émerger de nouveaux questionnements en lien avec les actions scientifiques des élèves (Gandit 2015) ;
- le système de représentations liées à différents cadres (Douady 1986) – algèbre, analyse, géométrie, combinatoire ... – et registres (Duval, 1993) sur lesquels s'appuie le chercheur pour résoudre les problèmes.

Les chercheurs témoignent du rôle essentiel de la résolution de problèmes dans la connaissance en mathématiques qui se construit en réponse à des questionnements à long terme dans lequel s'inscrit une large communauté scientifique. Nous en citons quelques références.

Brousseau (1998) place les problèmes et les questions sous-jacentes au centre des mathématiques :

« Nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. » (p. 49).

Grenier et Payan (2002) évoquent : « Aucune activité mathématique n'est possible sans expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, preuve. Même lorsqu'il s'agit de construire (en géométrie, par exemple) ou de calculer, il n'y a activité scientifique que si ces constructions ou ces calculs sont validés du point de vue scientifique. Or, cette activité scientifique est pour nous constitutive de la construction des connaissances mathématiques. » (p. 191)

Arsac et Mante (2007) considèrent la résolution de problèmes comme la composante essentielle des mathématiques : « La science mathématique se construit et évolue à travers les problèmes internes et externes que les mathématiciens se posent à travers leur acharnement à les résoudre. Au cours des différentes tentatives de résolution de ces problèmes, ils sont naturellement amenés à s'en poser un certain nombre d'autres qu'ils essayeront à leur tour de résoudre, etc. La connaissance mathématique se crée en particulier grâce à cette activité de résolution de problèmes. » (p. 19).

Cela nous permet de poser notre deuxième hypothèse de travail : la preuve en mathématiques se pratique dans le cadre de la résolution de problèmes.

2.2.2 La conception épistémologique de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver »

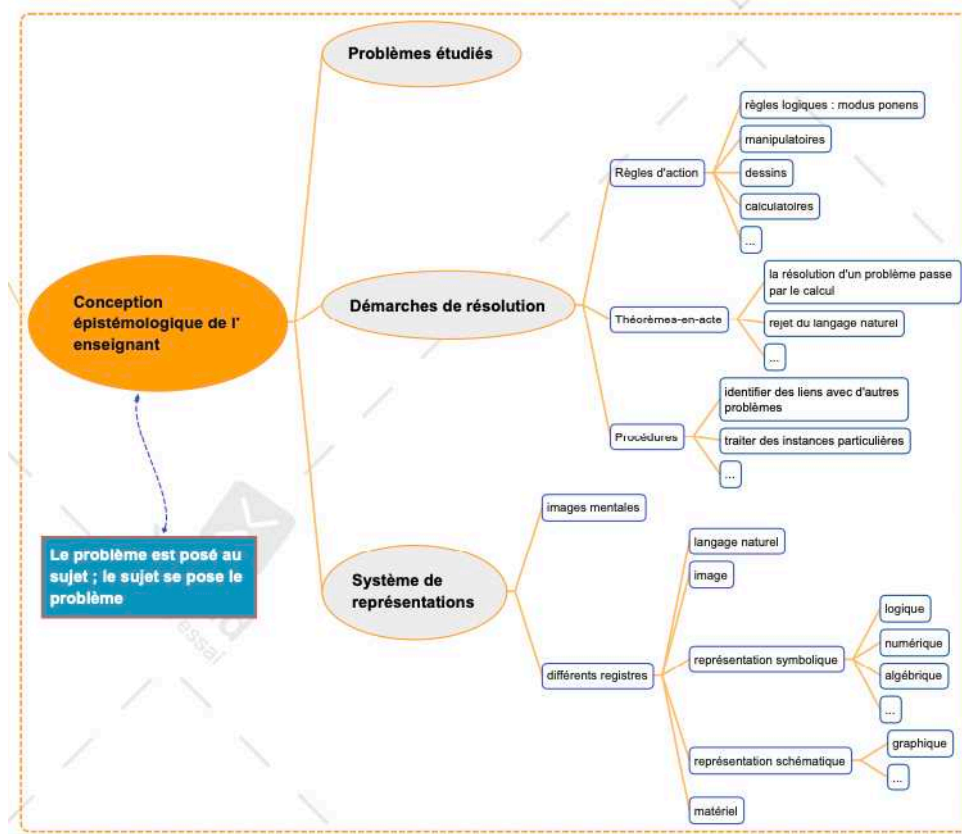


Figure 3 : la conception épistémologique de l'enseignant (extrait de l'annexe 1)

La conception épistémologique de l'enseignant par rapport au « chercher-prouver » décrit la conception qu'il s'est forgée par rapport au concept à travers son propre vécu en tant qu'enseignant, élève, individu.

La conception est décrite à partir des trois composantes :

- les problèmes étudiés par l'enseignant (qu'on lui a posés ou qu'il se pose lui-même).
- les démarches de résolution que le sujet a mis en œuvre (pour résoudre les dits problèmes) en termes de règles d'action, théorèmes en actes et procédures.

Par exemple certains enseignants font appel à leur mémoire de procédures : ils cherchent les problèmes de même type qu'ils auraient déjà résolus ; d'autres vont travailler sur des cas complexes au lieu de penser à simplifier le problème en traitant des instances particulières (les petits cas).

- le système de représentations – images mentales ou différents registres – sur lequel s'appuie l'enseignant pour résoudre les problèmes.

Certains enseignants rejettent le langage naturel, ils ont exclusivement recours à des représentations symboliques (formules, calculs), d'autres privilégient la représentation schématique (codages) ou l'usage de matériel. Par ailleurs, de nombreux enseignants associent à la résolution d'un problème la phrase réponse normalisée normative.

2.2.3 La conception de l'enseignant par rapport à la transposition en classe du « chercher-prouver »

La conception de l'enseignant par rapport à la transposition en classe du « chercher-prouver » décrit sa conception du « chercher-prouver », relativement à son enseignement et son apprentissage.

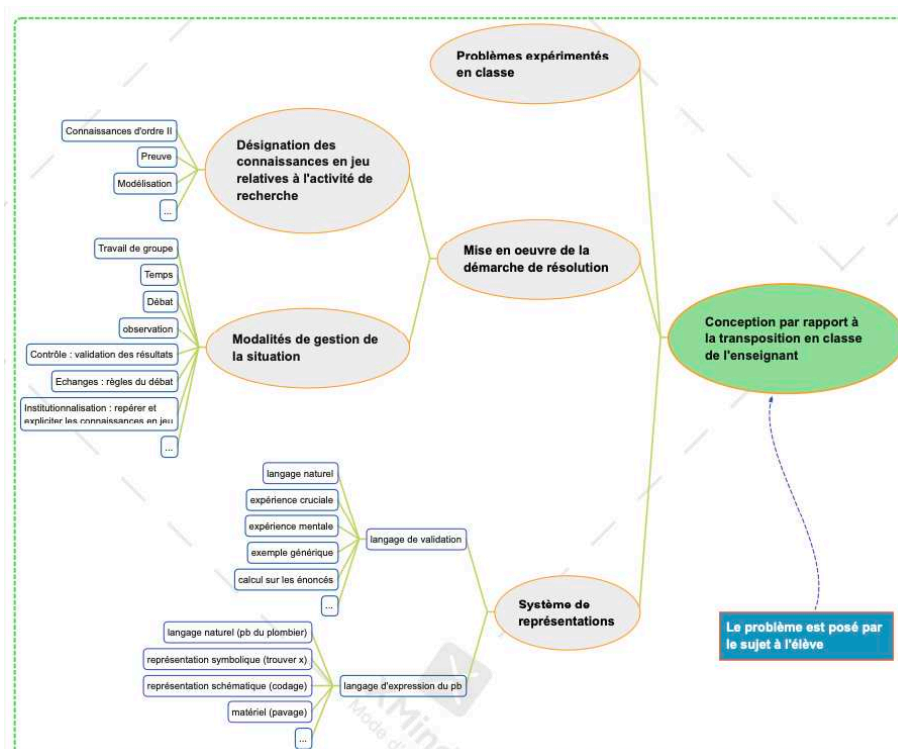


Figure 4 : la conception de l'enseignant par rapport à la transposition du « chercher-prouver » (extrait annexe 1)

La conception est décrite à partir des trois composantes :

- l'ensemble des problèmes expérimentés posés par l'enseignant. Ces problèmes sont enrichis avec notre progression de problèmes (décrite dans la partie 2.4.2).
- la mise en oeuvre par l'enseignant de la démarche de résolution du problème (elle est relative au problème) :
 - la désignation des connaissances relatives à l'activité du chercheur (connaissances, preuves et modélisation). Il est essentiel que l'enseignant sache désigner les connaissances en jeu relatives au problème et conduire la démarche de résolution selon les apprentissages qu'il vise pour pouvoir les institutionnaliser. Cette action est fondamentale mais délicate et certains enseignants ne parviennent pas à la réaliser. La progression des problèmes (décrite dans la partie 2.4.2) ainsi que le tableau de progression¹³ permettent de les faire progresser dans cette action.
 - les modalités de gestion de la situation : elles concernent les modalités d'organisation de la séance – le travail de recherche individuel ou en groupe, le temps accordé à la recherche et aux phases de débat – ; l'observation des élèves ; les règles du débat, selon Legrand (1993) ; le repérage des éléments à institutionnaliser ; les contrôles pour la validation des résultats. L'enseignant utilise des procédures de contrôle pour définir la recevabilité des arguments émis par les élèves pour valider une conjecture (cf. élément du modèle : langage de validation). Dès lors que l'argumentation est recevable et acceptée par la communauté classe, elle obtient le statut de preuve. Balacheff (2017) souligne : « Faire accepter par autrui qu'une argumentation établit la validité d'une solution change son statut et sa valeur par le caractère public qu'elle acquiert. Elle gagne le statut de preuve » (p. 8).

L'observation des élèves, le débat scientifique (Legrand) et l'institutionnalisation sont trois composantes inhérentes à la pratique adéquate de la preuve en classe. Or, la plupart des enseignants rencontrent des difficultés pour les réaliser. Le tableau de progression (note de bas de page 12) permet de les faire progresser dans ces trois domaines.

La mise en œuvre de la démarche de résolution des problèmes est décrite dans les situations que nous exposons dans la prochaine partie.

- le système de représentations sur lequel s'appuie l'enseignant pour conduire la séance. Ce système relève des langages de validation et d'expression du problème. La façon dont l'enseignant présente le problème aux élèves concerne le langage d'expression du problème qui peut être un énoncé (langage naturel), ou du matériel : des plaques en bois pour le problème du carrelage de la salle de bain ou des grilles en carton avec des jetons à placer sur les noeuds.

Le langage de validation est soit le langage naturel utilisé par l'enseignant pour valider en l'occurrence les résultats du problème ou le contenu de l'institutionnalisation, soit les types de preuves issus de la typologie de Balacheff (1987), auxquels l'enseignant se réfère pour définir la recevabilité des arguments émis par les élèves pour valider une conjecture. La typologie sert de référence à l'enseignant pour mieux situer l'élève dans la démarche de preuve et favoriser le feedback¹⁴. En considérant, que les élèves de l'école primaire entrent dans la démarche de preuve à partir de l'exemple générique (Ibid.), on a pour les élèves les deux types¹⁵ suivants :

¹³ C'est un des outils que nous avons développés pour amener les enseignants à évoluer vers une pratique adéquate de la preuve en classe. Nous l'expliquons dans la partie 3.4 du mémoire, pages 41-43.

¹⁴ Nous nous référons aux trois composantes qui forment la boucle de feedback (Lepareur & al. 2019, p.4).

¹⁵ Le calcul sur les énoncés : c'est une démarche qui ne mentionne pas du tout l'expérience. Les arguments s'appuient sur les définitions, propriétés et théorèmes déjà rencontrés. Ce type de preuve relève du cycle 4.

- *L'exemple générique* : démarche où l'on « s'applique à dégager les raisons de la validité d'une conjecture, en s'appuyant sur la représentation d'un cas particulier » (Ibid., p. 20). Dans le problème intitulé « les Diagonales » (c.f. 3.3.2, p. 36), l'enseignante utilise un exemple de polygone à vingt-six côtés, choisi par les élèves, pour les pousser à expliciter leur démarche. Ainsi, elle incite les élèves à entrer dans le processus de preuve par un exemple générique.
- *L'expérience mentale* : démarche où l'on « invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre ; ce qui était le cas pour l'exemple générique » (Ibid., p. 21). Concernant le problème intitulé « Nombres pairs/impairs » (c.f. 2.4.2, p. 25) : un élève explicite sa conjecture à la classe – la somme de deux nombres impairs est un nombre pair – : « Parce que si on enlève 1 aux deux nombres impairs cela fera deux nombres pairs et on rajoute les deux 1 qu'on a enlevés : ça fera un nombre pair. » La qualité de son argumentation atteste du fait qu'il est entré dans le processus de preuve par une expérience mentale.

Les compétences langagières dans une classe étant très hétérogènes, nous prenons, pour référence, la proposition de Balacheff (2017) : « on peut au moins signifier une argumentation potentiellement recevable au regard des normes de la classe de mathématiques. Ce n'est pas d'emblée une preuve pour autant, mais elle peut l'être si elle est reconnue pour telle par la classe et confirmée par l'enseignant » (Ibid., p. 31).

L'auteur explique : « Une situation de validation orientée vers un apprentissage explicite de la preuve devra inclure le besoin de reconnaître la nécessité de règles du débat, de les énoncer et d'en convenir collectivement » (Ibid., p. 22). Il décrit le milieu de la validation (au sens de la théorie des situations didactiques) : « [...] le milieu, qui n'est pas nécessairement matériel, construit par chacun des protagonistes dans le cours de la résolution, doit être partagé parce qu'il est une référence commune nécessaire à l'arbitrage du débat de preuve. Ainsi chaque élève a pour « antagoniste » le milieu « contre lequel » il résout le problème et les autres élèves « contre qui » il ou elle défend la validité de sa solution ou la légitimité de sa réfutation d'une solution par ailleurs défendue » (Ibid.).

Ce qui nous amène à la description de nos situations.

2.3 Nos situations

Nous nous référons aux travaux de la thèse de Georget (2010) qui a introduit l'expression *activités de recherche et de preuve entre pairs* (RPP) pour désigner des activités dont l'objectif principal est : « d'entraîner les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et aux échanges entre pairs à la manière des mathématiciens professionnels. Elles permettent de travailler des notions principalement paramathématiques¹⁶ (Chevallard, 1985, p. 50) qui sont liées à l'activité de recherche d'un mathématicien » (p. 77). Nous nommons ces connaissances, en référence à Sackur et al. (2005),

¹⁶ Chevallard : « Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique; elles ne sont "normalement" pas des objets d'étude. Les notions mathématiques sont, elles, des objets d'étude (on étudie la notion de nombre, la notion de groupe, etc.) et des outils d'étude (en principe !). Bien entendu, il n'y a pas étanchéité absolue entre les deux domaines : la notion d'équation, la notion de démonstration, sont aujourd'hui des objets mathématiques en logique mathématique. La distinction doit toujours se référer à une pratique d'enseignement précise. »

des « connaissances d'ordre II ». Il s'agit de connaissances de mathématiques et non pas autour des mathématiques comme le suggère le préfixe « para ».

Pour caractériser les activités RPP, Georget a introduit les potentiels¹⁷ de recherche, didactique, de résistance et de résistance dynamique et de débat. Il explique que ces potentiels sont « susceptibles de nous aider à mieux distinguer ce qui, dans chaque activité de recherche, relève du problème, des élèves, ou de l'enseignant. » (Ibid., p. 81).

D'après Georget, les situations de recherche pour la classe et les problèmes ouverts sont des activités RPP dont il décrit les potentiels :

- Pour le problème ouvert : « Les caractéristiques données, que l'ont pourraient traduire essentiellement en termes de potentiel de recherche et de résistance dynamique, ont donc pour principal objectif de faciliter la dévolution de la recherche aux élèves. » (Ibid., p. 104).

L'auteur évoque également la dépendance du potentiel de débat aux productions des élèves : « En effet, les auteurs notent que la qualité du débat, dont dépend l'atteinte des objectifs visés, dépend largement des solutions produites par les élèves. Il y a donc une difficulté potentielle due à l'instabilité possible du type de solutions produites (Arsac et Mante 1997, p. 41)¹⁸ » (Ibid., p. 105).

- Pour les SiRC : « [...] les activités sont basées sur des situations initiales encore ouvertes dans le monde des mathématiques savantes. Certaines situations des SiRC sont d'ailleurs proposées dans le cadre de MATH.en.JEANS. Du point de vue des auteurs, cette option est une sorte d'impératif épistémologique. Nous relevons que cela est susceptible d'assurer un potentiel de recherche, voire de débat, de résistance et de résistance dynamique, intéressants à ces situations. Le potentiel didactique est généralement centré sur des savoirs méta et paramathématiques mais ils visent aussi des mathématiques, souvent situées hors des programmes. » (Ibid., p. 109).

Nous rappelons les caractéristiques du problème ouvert et des SiRC.

2.3.1 Le problème ouvert

Les caractéristiques du problème ouvert sont définies par Arsac et Mante (2007) :

- « L'énoncé est court.
- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.
- Il est également souhaitable qu'il y ait plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat et éventuellement aussi plusieurs expressions de la solution, voire plusieurs solutions ou possibilités de trouver des solutions partielles. » (Ibid., p. 20-21).

¹⁷ Les potentiels sont décrits dans la thèse de Georget (2010 p. 78-81).

¹⁸ Georget donne la référence bibliographique : Arsac, G. et Mante, M. (1997). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics* 33, p. 21-43.

2.3.2 Les SiRC

En 2003, des chercheurs en mathématiques discrètes et en didactiques des mathématiques s'associent et fondent l'équipe Maths à Modeler¹⁹. Ils s'inscrivent dans une démarche de diffusion et d'enseignement des mathématiques auprès d'élèves de l'école élémentaire à l'université, et, du public. Leur ambition concernent la médiation scientifique : *c'est précisément de faire expérimenter les processus de production des savoirs scientifiques.*

Leur méthodologie s'appuie dans un premier temps sur : *une identification des problèmes de la recherche actuelle susceptibles d'être transposés dans des pratiques scolaires et des pratiques d'animation et de médiation scientifique. Les chercheurs en mathématiques discrètes constituent la force de proposition des problèmes qui serviront de base aux situations de recherche.*

Dans un deuxième temps : *ces situations sont validées sur la base d'un corpus expérimental riche et varié : ateliers réguliers ou ponctuels, en classe ou hors classe mais aussi en formation de formateurs.* L'ensemble de ces expérimentations permet d'affiner le travail de transposition didactique afin d'aboutir à une situation de recherche pour la classe. Les chercheurs évoquent la richesse de ces situations quant aux possibilités d'*éducation au raisonnement, à la preuve et plus généralement à une démarche scientifique.*

Grenier et Payan (2002) ont créé le modèle des situations de recherche pour la classe²⁰. Ils se positionnent de la façon suivante :

« Le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer son questionnement, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à transformer la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratiques que nous souhaitons confronter l'élève » (p. 190).

Ils ont développé et expérimenté des modèles de situations de recherche, construites à partir d'un problème issu de la recherche et pouvant être considérées comme la transposition pour la classe de l'activité du chercheur en mathématiques. Ainsi une situation de recherche est caractérisée par les éléments suivants :

- « Une situation de recherche s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues.
- La question initiale est facile d'accès : la question est facile à comprendre. Pour cela le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit amener l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires pour initier la résolution sont élémentaires.
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques en jeu.
- Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question. La situation n'a pas de fin. Il n'y a que des critères de fin locaux. » (Ibid., p. 191-192).

¹⁹ Site internet : <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr>. Les informations reprises de leur site sont en italique.

²⁰ Ces situations fonctionnent depuis les années 80 dans les ateliers MATH en JEANS : <https://bibnum.publimath.fr/AAA/AAA09042.pdf>

Les auteurs mettent en évidence les connaissances en jeu²¹ et le milieu d'une SiRC :

« [...] il y a des apprentissages en jeu, et ce sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique : l'argumentation, l'activité de conjecturer, celle de structurer (un objet), la preuve, la modélisation, tous plus ou moins présents selon le type de SiRC choisi. C'est ce qui donne une légitimité institutionnelle à ces situations : il y a bien des apprentissages et ils font partie de ceux prévus par les programmes. Il y a aussi des savoirs notionnels qui sont en jeu : nos analyses didactiques [...] montrent qu'on peut rattacher chacune d'elles à un ensemble de notions mathématiques. Elles vont constituer des « points d'ancrage notionnels » pour l'enseignant. » (Ibid., p. 195).

Dans une SiRC, « le critère de réussite pour l'élève²² n'est pas la résolution du problème (que ce soit juste ou faux), mais la résolution de cas particuliers, la production de conjectures ou de preuves partielles ; la question résolue peut renvoyer éventuellement à une autre question de recherche. On évoque plutôt un critère de réussite « provisoire », qui peut être que « l'on a émis une conjecture forte, ou qu'on a simplement résolu un cas particulier » (Ibid., p. 196).

« Le critère de réussite pour l'enseignant est la reconnaissance d'apprentissages liés au savoir (question, conjecture, preuve) » (Ibid.).

Les positions de l'élève et de l'enseignant se distinguent de leurs valeurs usuelles.

L'élève est en *position de chercheur* car il est amené à produire quelque chose de nouveau pour lui – des conjectures, la résolution de cas particuliers, des contre-exemples, des preuves, des questions nouvelles – ce qui peut favoriser l'engagement des élèves dans la recherche et être source de plaisir.

L'enseignant est dans une *double position* : celles du *chercheur* et du *gestionnaire de la situation* :

- Sur le plan de la recherche : « [...] sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problèmes. *Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux*²³ et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. » (Ibid., p. 196).
- Sur le plan de la gestion, son rôle s'incarne dans plusieurs actions :
 - « le contrôle de l'activité de l'élève en fonction de son avancée dans la résolution²⁴ du problème et par rapport aux objectifs d'apprentissages, les savoirs transversaux ,
 - la mise en place d'un débat scientifique dont les règles de base sont celles du débat scientifique (Legrand, 1993) [...] *Ces règles et propriétés du débat scientifique* forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une situation SRC. » (Ibid., p. 196-197).

Nous formulons notre troisième hypothèse de travail : il existe des situations de recherche adaptées à la classe qui permettent, si elles sont gérées adéquatement, la pratique de la preuve dans toutes ses dimensions.

²¹ Nous faisons l'hypothèse que les questionnements concernant la place de l'activité scientifique dans les classes permettant de développer chez les élèves des capacités à expérimenter, argumenter, conjecturer, modéliser, définir, prouver, et, la façon d'enseigner ces savoir-faire, peuvent être étendus à l'école primaire, avec des ajustements sur les situations de recherche et les savoir-faire visés.

²² En italique dans le texte original.

²³ Nous nommons ces savoirs des « connaissances d'ordre II » en référence à Sackur et al. (2005).

²⁴ L'avancée de l'élève dans le problème évoque sa résolution partielle et non la réponse définitive à la question (que la solution soit juste ou fausse).

2.3.3 Les caractéristiques de nos situations

Nos situations s'appuient sur le dispositif du problème ouvert ou les situations de recherche pour la classe, que nous avons « enrichi » à partir des éléments suivants.

Le point d'ancrage de nos situations est la théorie des situations didactiques avec le processus de dévolution, les phases d'action, de formulation et de validation et le processus d'institutionnalisation (Brousseau, 1998). Nous nous appuyons également sur le débat scientifique (Legrand 1993).

Nos situations sont cohérentes avec les cinq stratégies clés de l'évaluation formative développées par William et Thompson (2009). L'évaluation formative²⁵ des élèves est un vecteur d'amélioration des apprentissages des élèves (Harlen 2013, p. 22).

➡ Parmi les connaissances en jeu dans nos situations, nous nous intéressons aux « connaissances d'ordre II » en référence à Sackur et ses collaborateurs (2005) qui formulent deux postulats : « Les connaissances d'ordre II sont constitutives des mathématiques. [...] ces connaissances ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions ou les théorèmes : on ne peut faire un cours sur la nécessité. [...] d'une part, ces connaissances sont acquises à travers « l'expérience vécue », d'autre part, autrui joue un rôle essentiel dans leur acquisition en classe » (p. 62).

Les connaissances d'ordre II sont les règles du jeu mathématique. Elles concernent :

- La sémiosis (il faut savoir exprimer les règles de manière adéquate dans différents registres). Par exemple, connaître et comprendre les codes de codage sur une figure, le dessin dans un repère ou les écritures algébriques.
- La validité des énoncés (il faut les prouver, les démontrer). Par exemple, un énoncé vrai est nécessairement vrai, ou pour établir qu'un énoncé est vrai, il est nécessaire de le démontrer.
- La logique (il y a des règles pour démontrer) : raisonnement par récurrence, par l'absurde, par disjonction de cas...

Les connaissances d'ordre I sont les axiomes, les « contenus » des mathématiques vrais, ce sont les connaissances classiquement enseignées. Dans le paragraphe précédent, ces contenus sont nommés des savoirs notionnels.

➡ Le domaine conceptuel dans lequel se situe le problème, même s'il ne lui est pas familier, est d'un accès facile à l'élève. Ce qui lui permet de s'engager aisément dans la résolution – faire des essais, émettre des conjectures, élaborer des propositions de résolution, produire des contre-exemples, prouver la vérité de certaines conjectures, en invalider d'autres – donc de développer différentes catégories d'actions scientifiques en lien avec la preuve : Expérimenter, Questionner, Généraliser, Communiquer (Gandit 2015 ; Lepareur & al., 2019), l'impliquant, par là-même, dans un rapport à la vérité.

➡ Pour les problèmes issus des SiRC, une question résolue peut renvoyer très souvent à une nouvelle question. La situation n'a pas de fin, il n'y a que des « critères de fin locaux ». Cela renvoie à l'action scientifique Questionner (Gandit 2015, p. 69). La résolution pourrait se poursuivre, elle s'arrête au moment décidé, sans que nécessairement le problème soit résolu.

²⁵ L'évaluation formative consiste à évaluer en cours d'apprentissage le niveau de l'élève. Elle s'oppose à l'évaluation sommative dont le but est d'évaluer ou contrôler les connaissances des élèves en fin d'apprentissage. L'évaluation est formative si les informations qu'elle produit sont utilisées par les enseignants et les élèves pour modifier leur activité.

➡ La résolution du problème est collaborative, les élèves travaillent comme au sein d'une petite communauté mathématique où il y a un véritable enjeu de vérité dans le cadre d'un débat scientifique (Legrand, 1993). Legrand affirme : « l'activité mathématique relève d'une dialectique entre preuve et réfutation, qui est mise en œuvre en classe par la construction didactique du débat scientifique ».

La gestion de l'enseignant est exigeante car il s'agit d'amener les élèves à accepter le débat au sens du débat scientifique avec ses propres règles : « Il existe un contrat didactique qui légitime le fait que tout élève puisse prendre le risque d'exposer publiquement ses idées et de les soutenir avec ses propres arguments, sans avoir peur de se tromper. En retour, les élèves qui entendent ces énoncés, doivent pouvoir douter des conjectures ou argumentations de leurs pairs sans attendre le soutien de l'enseignant » (Ibid., p. 125).

Legrand définit le « jeu de l'élève, à travers lequel l'élève doit comprendre qu'il va acquérir des connaissances, différemment, en écoutant et en analysant les propos de ses pairs et en s'adressant à eux pour les convaincre, sans solliciter la médiation de l'enseignant » (Ibid.)

Le jeu de l'enseignant est complexe et s'inscrit dans le cadre du triptyque suivant :

- « **Le jeu épistémologique d'abord**²⁶ : le professeur doit être le plus conscient possible, à chaque instant, de tout ce qui est mathématiquement mis en discussion » (Ibid., p. 127). L'enseignant aide la classe à saisir ce qui est fondamentalement en jeu à travers les arguments forts, vrais ou faux, propres au problème. Il doit être le garant du bon déroulement du débat en clarifiant le débat ou en cadrant si la classe s'engage dans une impasse.
- *Le jeu didactique* : « l'enseignant ne doit pas laisser le débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ou de celle de ses meilleurs élèves » (Ibid., p. 129). Il peut utiliser le tableau pour constituer une mémoire des idées fortes de la classe (vraies ou fausses) (*stratégie 2*)²⁷ et ralentir le débat afin d'entraîner le plus grand nombre d'élèves, notamment ceux en difficulté (*stratégie 3*)²⁸. Cette mémoire est essentielle pour mettre en avant ce qui est vrai (et à retenir en tant que tel) et ce qui est faux (et à retenir plus encore en tant que savoir erroné) (Ibid.). L'objectif ultime pour l'enseignant est de rester neutre pour engager les élèves dans la validation et convaincre leurs pairs (*stratégies 4 et 5*)²⁹. Il favorise les rétroactions langagières de la part des élèves (*stratégie 3*).
- *Le jeu social* : l'enseignant a en charge de conduire le groupe *social* de la classe en canalisant les effets leader de certains élèves, ou en stimulant certains autres plus timides.

Ces éléments mettent en évidence la position exigeante de l'enseignant. Comme le souligne Legrand (1993) : « [...] cette neutralité de l'enseignant, qui est la clé de voûte du dispositif, est donc techniquement difficile à établir et ne peut se maintenir que dans un contrat didactique explicite qui permet de renégocier le contrat social coutumier » (p. 130).

Nous formulons notre quatrième hypothèse de travail : une pratique adéquate de la preuve est difficile à mettre en œuvre en classe en raison d'abord de la nature du processus de preuve qui accompagne la résolution d'un problème, mais aussi, de la nécessité d'installer un contrat didactique qui favorise le débat scientifique.

²⁶ En gras dans le texte d'origine.

²⁷ Stratégie 2 : organiser de véritables discussions, activités et tâches qui produisent des preuves des apprentissages.

²⁸ Stratégie 3 : donner un feedback qui fait progresser les élèves.

²⁹ Stratégie 4 : inciter les élèves à être des ressources pour leurs pairs ; stratégie 5 : inciter les élèves à être responsables de leurs apprentissages.

➡ La situation comporte la phase de conclusion **de nos problèmes** et la phase d'institutionnalisation.

La conclusion du problème est importante car elle permet de présenter les résultats mathématiques du problème, à savoir, les conjectures et leur preuve. Dans les SiRC, il peut y avoir plusieurs conclusions partielles car l'objectif pour l'élève n'est pas la résolution du problème (que ce soit juste ou faux), mais la résolution de cas particuliers, la production de conjectures ou de preuves partielles ou la preuve que certaines conjectures émises sont fausses. Au moment de la conclusion, l'enseignant peut solliciter les élèves pour vérifier leur compréhension des résultats et aussi les inciter à être responsables de leurs apprentissages (*stratégie 5*)³⁰. Il peut également réaliser un feedback sur les résultats pour certains élèves (*stratégie 3*)³¹. C'est l'enseignant qui valide les résultats du problème.

L'institutionnalisation : l'enseignant valide le contenu, dont les éléments, « plus généralement des *outils* en jeu à propos du problème ou mis en œuvre lors de sa résolution, prennent ici le statut d'*objets* » (Douady, 1986). L'enseignant met en évidence, avec l'aide des élèves, les connaissances d'ordre II révélées au cours de la résolution du problème et les explicite aux élèves (*stratégie 1*)³². Il peut solliciter les élèves pour l'élaboration du contenu afin de vérifier leur compréhension des enjeux du problème et aussi les inciter à être responsables de leurs apprentissages (*stratégie 5*). L'enseignant peut également faire un feedback sur les résultats pour certains élèves (*stratégie 3*).

2.4 Les leviers pour favoriser la transposition du « chercher-prouver »

2.4.1 Cartographie d'une transposition du « chercher-prouver »

Nous avons créé une carte mentale qui représente la mise en œuvre de la démarche de résolution d'un problème. C'est une description de la façon dont on propose de transposer en classe le « chercher-prouver » (cf. annexe 2). La carte comporte les différentes phases de la mise en œuvre de la démarche de résolution du problème avec des aménagements spécifiques, à savoir, une phase de débat en binôme, pour permettre aux élèves d'échanger et argumenter sur leurs premières idées, ou faire évoluer leurs stratégies personnelles. Nous avons introduit une phase de débat avec toute la classe, au sens de débat mathématique (Legrand, 1993) pour engager les élèves dans la formulation et la validation des conjectures. Nous avons ajouté une phase de formulation et communication car ce sont nécessairement des composantes du débat scientifique. Par ailleurs, l'objectif de présenter le problème et les résultats trouvés (dont les preuves), à une autre classe, peut être très stimulant pour les élèves et accroître leur implication à communiquer et argumenter au cours de la résolution du problème.

Nous décrivons également les rôles attendus de la part de l'enseignant au cours des différentes phases. Ils sont cohérents avec les cinq stratégies clés de l'évaluation formative (cf. partie théorique 2.3.3), indiquées en rose, sur la carte, selon les phases. Leur signification est donnée en haut à gauche.

³⁰ Stratégie 5 : inciter les élèves à être responsables de leurs apprentissages.

³¹ Stratégie 3 : donner un feedback qui fait progresser les élèves.

³² Stratégie 1 : clarifier, partager et faire comprendre les intentions d'apprentissage et les critères de réussite.

2.4.2 Notre progression de problèmes

Les problèmes expérimentés en classe appartiennent à une progression (Gandit & al., 2022) qui comporte des problèmes ouverts et des problèmes issus de la recherche en mathématiques discrètes, adaptés à la pratique de la preuve en classe. Le choix des problèmes est orienté vers le double objectif :

- viser des connaissances d'ordre II de plus en plus complexes,
- développer chez les enseignants une gestion spécifique de plus en plus experte, pour désigner et expliciter les connaissances en jeu et faire entrer les élèves dans le processus de preuve.

Nous présentons les problèmes par la désignation des connaissances d'ordre II qu'ils visent. Ce sont, tout d'abord, des problèmes ouverts dont les enjeux sont simples à comprendre pour les élèves et faciles à institutionnaliser pour l'enseignant. Puis, ce sont des problèmes ouverts et des SiRC, dont les connaissances visées sont de plus en plus complexes à développer sur le plan de l'enseignement et de l'apprentissage.

Pour tous les problèmes nous donnons la référence en note de bas de page à la fiche d'aide dédiée aux enseignants (que nous avons développée) et celle relative aux travaux de recherche réalisés sur le dit problème, le cas échéant. La formulation proposée pour ces connaissances d'ordre II est volontairement proche de ce que l'on peut institutionnaliser en classe.

1. Connaissances d'ordre II visées :

- un problème peut avoir plusieurs solutions,
- on s'organise pour trouver toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres,
- toute solution n'a été présentée qu'une seule fois.

Problèmes des Tours³³ :

C'est un problème ouvert.



C'est un problème de dénombrement.

« En désignant par n et p des nombres entiers naturels, construire une tour en superposant n cubes de p couleurs différentes. ».

Une fois compris qu'on a plusieurs solutions et ce que signifie que des tours sont différentes, il est demandé de trouver toutes les solutions.

Enoncé expérimenté en cycles 1, 2 et 3 avec $n = 3$ et $p = 3$.

Enoncé expérimenté en cycle 3 avec $n = 4$ et $p = 4$.

Problèmes des tuiles de Wang³⁴ :

C'est un problème ouvert.

Des variantes ont été expérimentées : en cycle 3, les tours de 4 étages à 4 couleurs sont remplacées par des tuiles de Wang³ à 4 couleurs (dessinées) (pas de rotation, ni de symétrie autorisée).



³³ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432) et aussi dans <https://hal.science/hal-04818426v1>.

³⁴ Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères-IREM*, 121, 77-108

2. Connaissances d'ordre II visées :

- un problème peut avoir plusieurs solutions,
- on s'organise pour trouver toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres,
- on contrôle sa réponse.

Problèmes des Billets³⁵ :

C'est un problème ouvert.

Enoncé expérimenté en cycle 2 :



La maman d'Alix veut donner 20 euros à sa fille pour son anniversaire. Elle dispose de 5 billets de 5 euros et de 12 pièces de 2 euros. Peut-elle donner 20 euros à Alix ? Si oui, comment ?

Enoncé 1 expérimenté en cycle 3 : « On dispose de 12 billets de 20 euros et de 12 billets de 5 euros. Est-il possible de faire une somme de 200 euros ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? »

Les Albums photos (variante du problème des Billets) :

C'est un problème ouvert.

Enoncé 2 expérimenté en cycle 3 : « Alice a 112 images à ranger dans des albums. Le magasin propose des albums de 12 et de 8 images. Comment Alice peut-elle faire pour n'avoir que des albums complets ? Que peut-elle acheter ? »

3. Connaissances d'ordre II visées :

- faire des essais sur des cas simples permet de comprendre le problème,
- faire des essais permet de dégager une généralité en réponse au problème,
- pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas,
- pour prouver qu'une généralité est vraie, il faut développer des arguments pour convaincre, pour apporter une preuve.

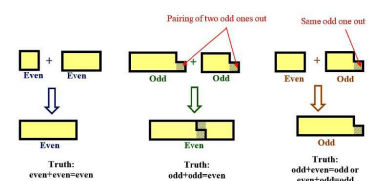
Les nombres pairs et impairs³⁶ :

Enoncé : « La somme de deux impairs est un nombre impair. Vrai ou bien faux ? »

C'est un problème ouvert.

Il s'agit de faire des conjectures et se poser la question de leur vérité.

L'étude de ces questions sera l'occasion de construire la notion de parité (ce qu'est un nombre pair, ce qu'est un nombre impair).



Huang, 2017

Preuve sans mot

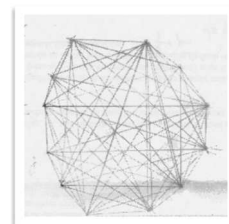
³⁵ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432).

³⁶ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432).

Le problème des Diagonales³⁷ :

Enoncé : « combien un polygone a-t-il de diagonales ? »

C'est un problème ouvert.



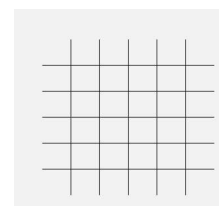
4. Les connaissances d'ordre II visées :

- faire des essais sur des cas simples permet de comprendre le problème,
- faire des essais permet de dégager une généralité en réponse au problème,
- pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas,
- pour prouver qu'une généralité est vraie, on développe des arguments pour convaincre, pour apporter une preuve,
- comprendre la différence entre les formulations « je peux placer n points » et « je ne peux pas placer plus de n points » ; ou « je peux assembler n carreaux » et « je ne peux pas assembler plus de n carreaux ».

Le problème de la Grille³⁸ :

Enoncé : « Quel est le nombre maximum de points qu'on peut placer sur les intersections de cette grille 5 x 5 sans former aucun alignement de trois points ? »

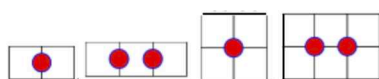
C'est un problème ouvert.



Le problème des Gommelettes³⁹ :

C'est un problème ouvert.

On assemble des carrés de papier tous identiques à l'aide de gommettes, de telle sorte que les carrés tiennent en un seul bloc.



Assembler le plus possible de tels carrés avec 6 gommettes.

Quel est le nombre maximum de carrés qu'on peut assembler avec 6 gommettes ?

³⁷ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432).

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège. [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier], Grenoble. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/document>

³⁸ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432).

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher, IUFM des Pays de la Loire, CREN EA 2661, Université de Nantes. <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/CyJNekYo8qfZz7m>

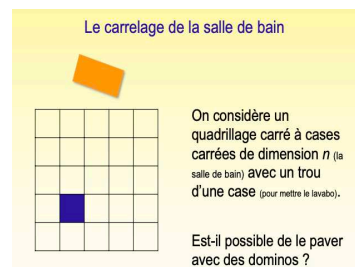
³⁹ Actes de la COPIRELEM 2022 (p. 432).

5. Les connaissances d'ordre II visées :

- les essais sur des carrés de dimensions différentes permettent de dégager une idée générale et proposer une conjecture : « il est nécessaire que le nombre de carreaux d'un côté soit impair pour que le pavage existe »,
- l'argument, « ce n'est pas parce que l'on ne trouve pas de solution qu'il n'y en n'a pas », n'est pas un argument mathématique,
- la notion de condition nécessaire et condition suffisante : le cas du carré de taille 3 avec le lavabo placé sur la case au milieu d'un côté est un contre-exemple qui invalide la conjecture : « il est nécessaire que le nombre de carreaux d'un côté soit impair pour que le pavage existe »,
- comprendre certains types de preuves : la preuve par forçage, pour montrer l'impossibilité d'un pavage ; la preuve par exhibition, pour montrer l'existence d'un pavage ; le contre-exemple.

Le problème du Carrelage de la Salle De Bain⁴⁰ :

C'est une SiRC.



Pour illustrer la progression des connaissances d'ordre II, nous pouvons prendre l'exemple du problème des Tours qui vise particulièrement qu'il est nécessaire de s'organiser pour avoir la certitude de trouver toutes les solutions. Or, suivant la façon dont est posée la question, il vise une autre connaissance d'ordre II, à savoir, qu'un problème peut avoir plusieurs solutions. Si la question est « Combien existe-t-il de tours de quatre étages à quatre couleurs », alors cette connaissance d'ordre II n'est pas visée. En revanche, le problème des Billets vise l'apprentissage de ces deux connaissances d'ordre II.

Le problème des Diagonales vise l'apprentissage d'autres connaissances d'ordre II : faire des essais permet de dégager une généralité (une conjecture de portée générale), mais aussi, pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas (un contre-exemple). Ces connaissances d'ordre II sont plus complexes à développer sur le plan de l'enseignement et de l'apprentissage.

⁴⁰ Gandit, M. (2008). Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation. Université Joseph Fourier Grenoble I.

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00398847/document>

2.5 Problématique

Au regard des éléments théoriques et dans le cadre de nos quatre hypothèses de travail, nous formulons notre problématique : est-il possible de faire évoluer les conceptions des enseignants par rapport à une pratique de la recherche et de la preuve en classe ?

Il s'agit de rechercher des leviers susceptibles de soutenir les enseignants dans la mise en œuvre d'une pratique de la preuve, en tant que processus donnant toute sa place à la recherche et au débat scientifique dans la classe, les élèves exerçant une responsabilité scientifique.

Nous investiguerons particulièrement deux dimensions de la pratique d'une enseignante. D'une part, la dévolution de la responsabilité scientifique à la classe sur le plan de la démarche de recherche et de la validation des résultats. Dans quelles mesures, données par des indicateurs relatifs au contrat didactique, l'enseignante instaure-t-elle un climat favorable au débat scientifique pour permettre aux élèves d'exprimer librement leurs idées et les valider, et entrer dans le processus de preuve ? D'autre part, la conclusion du problème et l'institutionnalisation. Dans quelles mesures l'enseignante désigne-t-elle les enjeux du problème, conduit-elle la mise en œuvre de la démarche de résolution en fonction de ces objectifs ? Procède-t-elle de manière systématique à leur institutionnalisation ?

3. Méthode

3.1 Les participants

Pour notre étude de cas, nous avons sollicité une enseignante en cycle 3 de l'école primaire du Parmelan à Annecy.

Cette école comprend 17 classes pour 366 élèves, dont 122 élèves en classe de maternelle et 243 élèves en élémentaire. L'école accueille 11 enfants en situation de handicap dans le cadre du dispositif d'inclusion scolaire ULIS. Elle est également dotée du dispositif EMILE (Enseignement des Matières par l'Intégration d'une Langue Étrangère) et propose un accueil sous forme d'horaires aménagés pour les élèves relevant du dispositif CRESA (Centre de Regroupement Étude et Sports d'Annecy).

L'enseignante que nous suivons participe à notre recherche collaborative depuis le projet initial (2018) et a en charge des classes de niveau CM2 non EMILE.

Le groupe des enseignants participant au projet comprend également deux enseignants en élémentaire à l'école primaire du Parmelan, impliqués dans le projet depuis 2018, une enseignante en maternelle à l'école primaire de Vallin Fier à Annecy et une enseignante en élémentaire à l'école primaire Quai Jules Philippe à Annecy, présentes sur le projet depuis septembre 2020, et enfin, un enseignant de l'école primaire de Menthon Saint Bernard à Annecy, qui nous a rejoint en septembre 2021. Ces enseignants ont largement contribué à ce travail, notamment au développement de l'outil, « Tableau de progression », que nous présentons dans le troisième paragraphe.

Le groupe IREM impliqué dans le projet est composé de quatre membres : une enseignante chercheuse qui supervise le projet LÉA, une professeure de mathématiques en lycée et docteure en didactique, un professeur de mathématiques au collège, et moi-même, enseignante en cycle3 puis en maternelle dans différentes écoles d'Annecy.

3.2 Objectif : mesurer l'évolution de la pratique d'une enseignante

Pour mesurer l'évolution de la pratique de l'enseignante, nous l'avons observée en classe à différents moments du projet, pour comprendre comment elle s'empare des outils – la progression des problèmes, le tableau de progression et la cartographie d'une transposition « idéale » du « chercher-prouver » – et mesurer, au moyen de critères et d'indicateurs, l'évolution de deux dimensions de sa pratique :

- la gestion du débat scientifique
- la conclusion du problème et l'institutionnalisation.

Pour chaque dimension, nous avons défini des observables – des critères et leurs indicateurs – à partir de ce que nous visons et des éléments théoriques sur lesquels s'appuie notre recherche. Ces critères sont accessibles dans l'annexe 3. Nous les décrivons ci-dessous.

La première colonne comporte les critères et les suivantes, leurs indicateurs. La lettre « P » désigne un(e) enseignant(e).

3.2.1 Critères et indicateurs du débat scientifique

1. Critère 1 : organisation de la présentation des productions

L'organisation d'une phase de débat dépend de l'observation de l'enseignant au cours des phases de recherche des élèves. La signification du terme « productions » varie selon les moments où l'enseignant a décidé de présenter certaines productions d'élèves à la classe.

CRITÈRES	INDICATEURS		
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves

Figure 5 : critère 1 - débat

Ce peut être « au début » de la recherche pour faciliter la dévolution. C'est l'enseignant qui décide de l'intérêt de présenter telle production – production erronée ou non – à toute la classe. A

partir de cette production, l'enseignant peut organiser un débat. Ce type de production sera alors une première ébauche de conjecture, un choix de cas étudié par un élève, qui répond ou non à la question... Il s'agira de débattre du fait que cela répond ou non à la question.

Ce peut être au cours de la recherche, pour relancer celle-ci, afin de partager des idées intéressantes à tous. Ce type de production sera alors une conjecture sur un certain cas, une ébauche de preuve d'un résultat.

Ce peut être à la fin d'un temps de recherche que l'enseignant estime suffisant pour produire des résultats plus aboutis. Ces productions pourront alors être des résultats – des conjectures avec la preuve qu'elles sont vraies – ou seulement des conjectures, ou encore des contre-exemples pour prouver que d'autres conjectures sont fausses.

2. Critère 2 : engagement dans la validation

L'enseignant peut procéder à un vote pour recueillir la tendance de la classe sur une conjecture et inciter chaque élève à s'engager. Depuis cette année, le fait de permettre aux élèves de justifier par écrit leur avis, aide l'enseignant à lancer le débat mais également les élèves à réfléchir avant de prendre position.

Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation

Figure 6 : critère 2 - débat

3. Critère 3 : Interactions

Ce critère décrit les types d'interaction qui ont lieu au cours des échanges dans la classe :

P/élève : entre l'enseignant et l'élève

Elève/élève : entre deux élèves

Elève/élèves : entre l'élève et la classe

Elève particulier : si un élève en particulier est souvent sollicité

Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)

Figure 7 : critère 3 - débat

L'objectif ultime pour l'enseignant est de rester neutre pour amener les élèves à s'engager dans la validation des conjectures et convaincre ses pairs et non lui-même et essayer d'impliquer le plus grand nombre d'élèves. Si les interactions sont de type *P/Elève*, où l'enseignant interagit avec un élève

rapporteur ou un élève qui se serait manifesté pour intervenir dans le débat, le type d'échanges s'apparente à un dialogue entre l'enseignant et l'élève. En revanche, si l'enseignant favorise des interactions de type *Elève/Elève* – où un élève de la classe intervient pour expliquer à un pair – ou de type *Elève/Elèves* – quand un élève rapporteur argumente en s'adressant à ses pairs et non à l'enseignant – le débat se situe entre les élèves, il est donc fort probable que l'enseignant parvienne mieux à conserver sa neutralité tout en gérant les échanges de paroles et les votes. Par ailleurs, les deux types d'interaction – *Elève/Elève* ou *Elève/Elèves* – sont révélateurs du fait que les élèves créent des dialogues entre eux et essaient de convaincre leurs pairs et non l'enseignant. Ces deux types sont cohérents avec les stratégies 4 et 5 de l'évaluation formative, quand l'enseignant incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs et responsables de leurs apprentissages, respectivement.

L'indicateur *Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)* nous informe si l'enseignant sollicite un profil d'élève en particulier. C'est souvent le cas pour des élèves à l'aise. Nous pourrions imaginer que l'enseignant sollicite surtout les élèves en difficulté pour les impliquer dans le débat, les autres étant plus autonomes. Quoi qu'il en soit, l'enseignant devra canaliser les effets leader de certains élèves (parfois très à l'aise) et stimuler plus particulièrement les élèves timides ou en difficulté.

De manière générale, les enseignants peu experts vont se situer dans des interactions de type *P/Elève* et *Elève particulier*. Or, l'enseignant ne doit pas laisser le débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ni de celle de ses meilleurs élèves. Au contraire, un enseignant expert pourra ne pas accorder immédiatement d'importance à un élève rapide, afin de ne pas perdre trop d'élèves, surtout ceux en difficultés. N'oublions pas qu'il s'agit d'engager les élèves dans une démarche et de leur apprendre cette démarche : ce n'est pas le résultat trouvé qui est important, c'est le chemin pour y arriver.

4. Critère 4 : temps accordé aux élèves pour valider une conjecture

Le temps accordé par l'enseignant aux élèves pour valider une conjecture correspond à différents moments de la séance : c'est quand l'enseignant décide d'arrêter une recherche, ou quand l'élève présente sa conjecture à la classe, ou quand l'élève intervient pour donner un avis sur une conjecture ou une argumentation exposée. C'est aussi le temps que prend l'enseignant quand il fait voter les élèves ou leur demande d'utiliser la fiche d'aide au débat pour donner un avis justifié sur des conjectures.

Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant

Figure 8 : critère 4 - débat

La gestion du temps dans un débat est délicate. Parfois le temps peut être estimé suffisant lorsque le bruit augmente et que les élèves semblent avoir épuisé toutes leurs possibilités, alors qu'on est loin de l'aboutissement de la réflexion.

Les enseignants peu experts accordent souvent peu de temps aux élèves pour valider leur conjecture et se basent sur l'attitude de quelques élèves (les meilleurs). Ils ne s'exposent guère à prendre du temps pour accompagner un élève en difficulté à argumenter.

Enfin, il est difficile pour les enseignants de décider de façon pertinente du moment où ils vont arrêter une recherche pour démarrer le débat, si bien que la recherche est souvent trop longue par rapport au débat.

5. Critère 5 : nombre d'élèves impliqués

Ce critère indique le nombre d'élèves impliqués dans le débat, si l'enseignant intègre l'ensemble

Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves

Figure 9 : critère 5 - débat

de la classe, ou s'il restreint le débat à quelques élèves ou à quelques élèves et toujours les mêmes.

L'objectif pour l'enseignant est d'impliquer le plus grand nombre d'élèves, surtout ceux en difficulté. Les enseignants non experts ont tendance à restreindre le débat à quelques élèves et souvent les plus à l'aise (indicateur *Quelques élèves et toujours les mêmes*) car c'est plus efficace donc rassurant sur le plan de la durée des échanges et de leur qualité.

6. Critère 6 : respect des idées des élèves (vraies ou fausses)

Ce critère indique si l'enseignant constitue une mémoire écrite des idées vraies ou fausses des élèves.

Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas

Figure 10 : critère 6 - débat

C'est-à-dire que l'enseignant reformule par écrit les arguments ou conjectures des élèves en demandant si c'est fidèle à ce qu'ils veulent dire, ou, il relève par écrit les arguments proposés. L'enseignant peut également proposer aux élèves volontaires d'écrire leurs arguments au tableau, sans toutefois altérer la fluidité de la communication orale au sein de la classe. Cette posture de l'enseignant révèle sa capacité à rester neutre.

La constitution d'une mémoire de la classe est essentielle à l'enseignant pour mener le débat, c'est-à-dire engager les élèves dans la validation des conjectures proposées puis conclure sur le problème et mener l'institutionnalisation. Elle permet, conjointement, de ralentir le flux des échanges pour impliquer le plus grand nombre d'élèves et favoriser leur compréhension des enjeux du problème.

7. Critère 7 : recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse

Ce critère indique si l'enseignant est capable de recadrer le débat en cas de glissement dans une impasse

Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons

Figure 11 : critère 7 - débat

Le glissement peut être dû à plusieurs situations : si les élèves se dispersent et ne réfléchissent plus au questionnement initial proposé par l'enseignant ; si les arguments produits par les élèves ne sont pas cohérents avec le changement de cadre que l'enseignant essaie d'opérer ; s'il n'y a plus assez de temps ; si l'enseignant se perd ; si les élèves s'engagent dans une voie dont l'enseignant sait qu'elle est trop éloignée du problème ou des objectifs qu'il vise. Ce critère nous informe si l'enseignant a envisagé, dans une analyse a priori, certains cas de situations possibles pour y répondre le cas échéant. C'est essentiel pour éviter que la recherche ne soit interrompue, mais surtout, remédier aux difficultés des élèves.

3.2.2 Critères et indicateurs de la conclusion du problème et de l'institutionnalisation

Critère : organisation de la conclusion du problème

Ce critère indique si l'enseignant a réalisé la conclusion du problème.

Les indicateurs nous informent sur la façon dont la conclusion a été réalisée, le cas échéant.

CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée

Figure 12 : critère 8 - conclusion du problème

La conclusion du problème est un moment important, comme nous l'avons évoqué dans

la partie théorique (2.3.3), car elle permet d'exposer les résultats du problème. Son contenu est lié à la mémoire des idées fortes de la classe constituée au cours du débat.

La conclusion devra être organisée dans une trace écrite ou formalisée à l'oral avec la contribution des élèves. Cela permet à l'enseignant de vérifier leur compréhension du problème. Quoi qu'il en soit, c'est l'enseignant qui a la responsabilité du contenu et le valide.

Il peut y avoir plusieurs conclusions partielles car l'objectif pour l'élève n'est pas la résolution du problème (que ce soit juste ou faux), mais la résolution de cas particuliers, la production de conjectures ou de preuves partielles. L'enseignant peut donc, à différents moments de la recherche, conclure sur la validité de certaines conjectures mais aussi conclure que certaines sont fausses.

De manière générale, les enseignants ne réalisent pas de conclusion du problème soit par manque de temps ou parce que le problème n'est pas résolu, ou, qu'ils n'ont pas compris l'importance de cette phase. Le cas échéant, ils la formalisent souvent à l'oral.

Critère : organisation de l'institutionnalisation locale

Ce critère indique si l'enseignant a réalisé l'institutionnalisation et nous renseigne sur la manière dont elle a été réalisée.

Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence d'une trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée

Figure 13 : critère 9 - institutionnalisation

La plupart des enseignants ne réalisent

pas d'institutionnalisation ou alors de manière trop rapide en fin de séance et sans présence de trace écrite car ils ne savent pas désigner les connaissances en jeu. Si l'institutionnalisation est réalisée, son contenu doit être cohérent avec les connaissances visées dans le cadre du problème. Cet indicateur permet de vérifier si l'enseignant sait désigner les connaissances en jeu du problème et les révéler aux élèves.

L'enseignant devra solliciter les élèves pour décrire son contenu afin de vérifier leur compréhension des enjeux du problème. Comme pour la conclusion, c'est l'enseignant qui a la responsabilité du contenu et le valide.

L'institutionnalisation peut être incomplète si les connaissances en jeu ne sont pas toutes identifiées par les élèves ou explicitées par l'enseignant.

3.3 Notre progression de problèmes : un premier outil pour l'enseignant

Les problèmes sont choisis en fonction de ce que l'on souhaite institutionnaliser auprès des élèves et améliorer du point de vue de l'enseignant, à savoir, les amener vers une gestion de plus en plus experte, pour désigner et expliciter les connaissances d'ordre II en jeu et permettre aux élèves la rencontre du savoir visé.

Nous présentons, pour chaque problème, la gestion spécifique attendue de la part de l'enseignant. Nous suivons l'ordre de la progression des problèmes décrite dans la partie théorique 2.4.2. Le potentiel⁴¹ didactique de chaque situation repose sur les connaissances d'ordre II, explicitées dans cette même partie. Nous ne décrivons que les autres potentiels.

Voici les types de problèmes que l'enseignante a expérimentés et qui sont utilisés pour notre étude :

- Le problème des Billets et deux variantes :
 - Le problème des Albums photos
 - Le problème des Nombres
- Le problème des Diagonales
- Le problème des Gommelettes
- Le problème de la Grille
- Le problème du Carrelage de la Salle De Bain

3.3.1 Le problème des Billets et deux variantes

Le problème des Billets expérimenté par l'enseignante :

La maman d'Alix veut donner 200 euros à sa fille pour son anniversaire. Elle dispose de 12 billets de 20 euros et de 12 pièces de 5 euros. Peut-elle donner 200 euros à Alix ? Si oui, comment ?



Ce problème est une équation diophantienne. L'analyse mathématique va au-delà de ce qui est attendu pour des élèves de l'école primaire. On peut voir ce problème dans deux cadres, le cadre arithmétique et le cadre de la géométrie analytique (exclu à l'école et au cycle 3) :

- Dans le cadre arithmétique, on cherche à trouver toutes les décompositions du nombre 200 sous la forme d'une somme de 5 et de 20, sachant que, dans la somme, on ne peut pas avoir plus de 12 fois le nombre 5 et pas plus de 12 fois le nombre 20.
- Dans le cadre géométrique, le même problème revient à déterminer les coordonnées des points, à coordonnées entières, de la droite qui a pour équation $20x + 5y = 200$, pour x (nombre de billets de 20 €) compris entre 0 et 12 et y (nombre de pièces de 5 €) compris entre 0 et 12.

⁴¹ Se reporter à la partie théorique 2.3, pages 17-18.

Les potentiels de la situation

Le problème des Billets est un problème ouvert. La dévolution de la recherche aux élèves est favorisée par un contexte proche de celui de la vie courante et le fait que les élèves disposent de plusieurs moyens pour essayer de le résoudre : matériel ou méthodes numériques.

La situation de recherche oppose une certaine résistance aux élèves puisqu'il s'agit de trouver différentes façons de donner 200 euros à cause de la question « *Comment ?* » de l'énoncé. Or, cette question n'implique pas forcément pour tous les élèves qu'il s'agit de trouver toutes les façons de donner 200 euros à Alice⁴². L'enseignant peut vérifier la compréhension de la classe dans le cadre d'une mise au point collective pour éviter que les élèves ne sortent du cadre du problème. Le potentiel de résistance dynamique dépend de la posture de l'enseignant qui devra amener les élèves à trouver les moyens de preuve – comme les échanges – pour prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Du point de vue de l'élève, il s'agit donc de comprendre qu'un problème peut avoir plusieurs solutions et qu'il est nécessaire de s'organiser pour prouver qu'on les a toutes. Or, la plupart des élèves vont se limiter à une solution car les problèmes rencontrés par les élèves en arithmétique sont très souvent des problèmes qui n'ont qu'une solution.

Du point de vue de l'enseignant, il s'agit de comprendre la nécessité de la phase d'institutionnalisation, qui devra porter sur l'explicitation de ces deux connaissances d'ordre II.

Le problème des Billets figure au début de notre progression pour répondre à la difficulté que rencontrent les enseignants avec la phase d'institutionnalisation. En effet, la plupart ne savent pas désigner clairement les connaissances qu'ils souhaitent viser dans la résolution de ce problème.

Les notions mathématiques requises de la part des élèves pour résoudre ce problème concernent les domaines de la Numération – la décomposition des nombres ; les répertoires multiplicatif (tables 2 et 5) et additif ; les relations entre les nombres à usage courant – et Grandeurs et Mesures, avec la monnaie. Ces notions devront être accessibles aux élèves et non constituer les enjeux de la situation, ce qui ne devrait présenter aucune difficulté pour des élèves de cycle 3.

Ces deux variantes visent les mêmes connaissances d'ordre II que le problème des Billets :

Le problème des Albums photos (une variante du problème des Billets) :

Jade souhaite ranger ses 112 images dans des albums. Le magasin propose des albums de 8 et 12 images. Comment peut-elle ranger ses images pour n'avoir que des albums complets ? Que doit-elle acheter ?

Les notions mathématiques requises de la part des élèves concernent le domaine de la Numération – la décomposition des nombres ; les répertoires multiplicatif et additif ; les relations entre les nombres à usage courant ; les techniques opératoires de l'addition et la multiplication.

Le problème des Nombres (une autre variante du problème des Billets) :

Trouver les nombres dont la somme des chiffres est égale à 4 (le 0 n'est pas accepté) ;

Trouver les nombres dont la somme des chiffres est égale à 6 (le 0 n'est pas accepté).

Les notions mathématiques requises de la part des élèves concernent le domaine de la Numération – la connaissance des nombres ; les relations entre les nombres à usage courant.

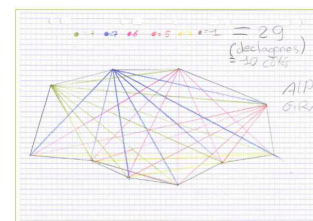
⁴² D'ailleurs cette attitude est cohérente avec la vie courante des élèves où il est plutôt usuel de vérifier si l'on a assez d'argent pour acheter un objet et non de réfléchir à toutes les façons dont on pourrait payer cet objet.

3.3.2 Le problème des Diagonales

Le problème des Diagonales expérimenté par l'enseignante :

Combien un polygone a-t-il de diagonales ?

Il s'agit, autrement dit, de donner un moyen qui permette, dès que l'on connaît le nombre de sommets d'un polygone, de déterminer le nombre de ses diagonales.



L'objectif mathématique du problème est d'amener les élèves à comprendre que l'expérimentation sur de « petits » cas particuliers (des quadrilatères, des pentagones, des hexagones) permet de s'approprier le problème et de découvrir et formuler une conjecture, c'est-à-dire une méthode générale (généralité), qui donne le nombre de diagonales d'un polygone.

L'intérêt de ce problème est qu'il peut ne pas être résolu totalement (trouver la conjecture générale) car c'est la démarche des élèves qui est visée. Plusieurs types de raisonnement sont envisageables, additif ou multiplicatif.

Il s'agit d'amener l'élève à émettre des conjectures et questionner leur vérité en l'encourageant à vérifier ses réponses et à les argumenter. Ainsi, il prend conscience qu'une idée individuelle doit être confrontée à l'évaluation des pairs pour être acceptée par la communauté de la classe, mais qu'elle peut aussi s'enrichir de cette confrontation.

Les potentiels de la situation

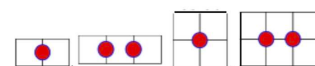
Le contexte de ce problème n'est pas issu de la vie courante des élèves mais la simplicité de l'énoncé et le cadre géométrique est propice aux essais et à la dévolution de la recherche.

Le potentiel de débat est important mais il dépend de l'enseignant, notamment de sa connaissance des enjeux du problème. En effet, les phases collectives ne doivent pas être réduites à une exposition des divers essais ou conjectures des élèves, mais conduite afin de faire émerger des exemples qui montrent l'existence d'une généralité (exemple générique). L'enseignant devra également amener les élèves à comprendre la nécessité de valider leurs conjectures pour avancer dans la résolution et entrer dans le processus de la preuve. A cet effet, le contre-exemple s'avère l'outil idéal pour invalider certaines conjectures et à portée des élèves.

3.3.3 Le problème des Gommettes

Le problème des Gommettes expérimenté par l'enseignante :

On assemble des carrés de papier tous identiques à l'aide de gommettes, de telle sorte que les carrés tiennent en un seul bloc.

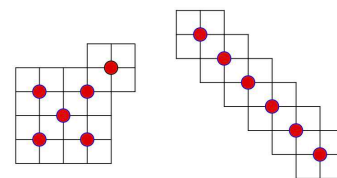


Assembler le plus possible de carrés avec 6 gommettes.

Quel est le nombre maximum de carrés qu'on peut assembler avec 6 gommettes ?

Du point de vue mathématique, on s'engage dans la recherche, de façon expérimentale, en assemblant des carrés, de façon rigide, c'est-à-dire de telle sorte que les carrés assemblés ne fassent qu'un seul bloc (si on tire sur un carré, tous les carrés viennent avec lui). On cherche à assembler le plus possible de carrés en économisant des gommettes.

Après quelques essais, on s'aperçoit qu'il est possible d'assembler 19 carrés avec 6 gommettes, comme indiqué ci-contre.



Se pose alors la question de savoir s'il est possible d'assembler plus de 19 carrés. La réponse est non.

Ce problème est un problème d'optimisation qui, pour être entièrement résolu, nécessite de combiner deux approches :

- une approche empirique expérimentale, qui consiste à assembler effectivement ou à représenter les assemblages ;
- une approche que nous désignerons par « approche déductive » qui consiste à montrer qu'il est impossible de faire mieux que telle valeur. La recherche d'un optimum requiert un raisonnement spécifique : il s'agit de rechercher une preuve de l'impossibilité de faire mieux.

Ce problème permet une approche intéressante de la preuve qui devrait amener les élèves à comprendre la nécessité du basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument pour apporter la preuve qu'on ne peut pas assembler plus que 19 carreaux avec les 6 gommettes.

Les potentiels de la situation

Le contexte de ce problème est facile d'accès et les élèves s'engagent rapidement dans la production des premiers essais (papier-crayon). Ce problème est donc propice à la dévolution de la recherche.

Le potentiel de débat est important mais lié à l'enseignant, à sa connaissance des enjeux du problème et de ses capacités à réussir trois actions essentielles :

- Réaliser le basculement d'une approche empirique expérimentale à une approche déductive.
- Encourager les élèves à verbaliser sur les résultats partiels lorsqu'il s'agit d'«améliorer» le majorant du nombre maximal de carreaux possibles (« le rendre plus petit que 24 ») ou de résoudre les sous-problèmes ;
- Solliciter l'avis des élèves en restant neutre.

En effet, du point de vue de l'enseignant, la gestion de ce problème est complexe.

L'approche empirique permet de trouver un minorant ($M_i < \text{solution}$) du nombre maximum de carrés possibles, tel que $M_i < \text{solution}$. Les élèves devraient parvenir à conclure : « Le maximum qu'on cherche est plus grand que M_i ou égal à M_i ». L'enseignant doit rester neutre et laisser planer le doute quant à la validité de cette réponse commune des élèves. Certains pensent que c'est M_i , d'autres ne seront pas d'accord, d'autres, ne sauront pas.

Pour stimuler la recherche, l'enseignant pourra orienter les élèves vers un autre questionnement, « Est-ce qu'on peut être sûr que le maximum cherché est plus petit qu'un certain nombre ? » Dès lors, il est fort possible que certains élèves raisonnent en faisant appel à leurs connaissances disponibles⁴³ et donnent la valeur 24 comme majorant. A ce niveau, les élèves devront être d'accord sur le fait que le maximum cherché est plus petit que 24 et aussi plus grand que M_i .

Pour résoudre le problème, l'enseignant devra opérer le basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument pour « améliorer » le majorant (« le rendre plus petit que 24 »). En se plaçant

⁴³ Par exemple certains élèves pourront affirmer d'emblée qu'on ne peut pas assembler plus de 24 carrés avec 6 gommettes car on ne peut assembler que 4 carrés avec une gommette : $6 \times 4 = 24$.

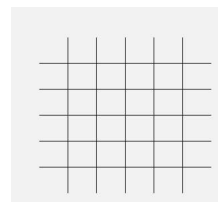
du point de vue de la gomme, l'enseignant proposera aux élèves d'étudier des plus petits cas : recherche du maximum de carrés M_i avec 2 gommettes, puis 3, puis 4, puis 5, puis 6 gommettes. A chaque étape, l'enseignant devra amener les élèves à conclure et mettre en évidence le résultat partiel : le maximum cherché est plus petit que M_i (y compris M_i).

C'est à travers cette démarche de recherche que les élèves pourront produire le raisonnement : $4+3+3+3+3+3$ pour prouver que le nombre maximal cherché est 19.

3.3.4 Le problème de la Grille

Le problème de la Grille expérimenté par l'enseignante est :

Quel est le nombre maximum de points qu'on peut placer sur les intersections de cette grille 5 x 5 sans former aucun alignement de trois points ?



Sur le plan de l'analyse mathématique, on cherche à placer des points sur la grille. On s'engage donc dans la recherche en plaçant des points sur les points d'intersection des lignes. On obtient des grilles valides après vérification qu'il n'existe aucun alignement de trois points, dans n'importe quelle direction. L'exhibition d'une grille valide à n points (n désignant un nombre entier) permet de conclure que le maximum cherché est supérieur (ou égal) à n . Il est assez facile de trouver des grilles valides à 1, 2, 3, 4, ..., 8 points. On en déduit donc que le maximum cherché est supérieur (ou égal) à 8.

La recherche de grilles valides à 9 points est plus difficile (mais tout à fait accessible à des élèves de cycle 2 ou 3). Cette production de grilles valides amène toutefois à se demander si l'on peut majorer ce maximum.

Le problème de la Grille est donc un problème d'optimisation qui, s'articule en deux temps :

- la première partie où il s'agit de produire expérimentalement des grilles valides en cherchant à augmenter le nombre de points ;
- la seconde qui, consiste à prouver, par un raisonnement, que le maximum cherché ne peut pas être supérieur à 10 (donc il est inférieur ou égal à 10).

Ce problème permet une approche de la preuve à condition que les deux temps aient été expérimentés par les élèves pour approcher les notions de condition nécessaire et condition suffisante. Les élèves devront comprendre la nécessité du basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument pour « améliorer » le majorant M (ici, « le rendre plus petit que 15 », par exemple), et, apporter la preuve qu'on ne peut pas placer plus que 10 points sur la grille.

Du point de vue de l'enseignant, la gestion de ce problème est complexe.

Tout d'abord, l'enseignant peut, à l'issue des productions des premières grilles fédérer la classe autour d'un challenge commun qui consiste à chercher à augmenter le nombre de points d'une grille valide. L'approche empirique permet de trouver un minorant ($M_i < \text{solution}$) du nombre maximum de carrés possibles, tel que $M_i < \text{solution}$. Les élèves devraient parvenir à conclure : « Le maximum qu'on cherche est plus grand que M_i ou égal à M_i ». L'enseignant doit rester neutre et laisser planer le doute quant à la validité de cette réponse commune des élèves. Certains pensent que c'est M_i , d'autres ne seront pas d'accord, d'autres, ne sauront pas.

Pour stimuler la recherche, l'enseignant pourra orienter les élèves vers un autre questionnement : « Est-ce qu'on peut être sûr que le maximum cherché est plus petit qu'un certain nombre ? » Il est fort possible que certains élèves vont raisonner en faisant appel à leurs connaissances disponibles et donner les valeurs 25 ($25 = 5 \times 5$) ou 15 ($15 = 5 \times 3$)⁴⁴. A ce niveau, les élèves devront être d'accord sur le fait que le maximum cherché est plus petit que $M=15$ et aussi plus grand que M_i et comprendre que la fourchette possible pour le maximum cherché est tous les nombres entiers compris entre M_i et 15, (y compris M_i et 15). Il est important que l'enseignant fasse apparaître ceci comme un premier résultat du problème.

Dès lors, l'enseignant devra différer la recherche ou la relancer avec le nouveau challenge : « resserrer la fourchette ». Quoiqu'il en soit, il est essentiel de faire comprendre aux élèves tout l'intérêt de resserrer la fourchette jusqu'à la fourchette « idéale » qui ne comporterait plus qu'un nombre (si cela est possible). Puis, l'enseignant, devra opérer, au moment opportun, le basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument par un changement de cadre. Le passage du cadre graphique où l'on place des points, à celui des nombres peut favoriser l'émergence du raisonnement : « On ne peut pas placer plus de 10 points sur une grille valide car il ne peut pas y avoir plus de 2 points par ligne ». L'enseignant devra amener les élèves à comprendre la nécessité de s'extraire des exemples sur les grilles pour trouver le maximum au delà duquel il n'est pas possible de produire de grille valide.

Les potentiels de la situation

Le problème de la Grille est un problème ouvert pour des élèves de l'école primaire. Le contexte du problème est facile d'accès et les élèves s'engagent rapidement dans la production des premières grilles papier crayon ou avec des grilles en carton (fabriquées par certains enseignants), des jetons et des fils pour vérifier l'alignement. Ce problème est donc propice à la dévolution de la recherche.

Le potentiel de débat est important mais lié à l'enseignant, à sa connaissances des enjeux du problème et de ses capacités à relever plusieurs actions essentielles :

- Stimuler les élèves pour chercher à augmenter le nombre de points d'une grille valide ;
- Faire basculer les élèves de la recherche d'une disposition optimale des points sur la grille à la recherche de raisons et de nécessités. Ce basculement implique un changement dans la nature des arguments : « On ne peut pas mettre 3 points sur une ligne » – utile dans l'action de produire des grilles valides – doit évoluer vers une formulation théorique, « Forcément, il n'y a pas plus de 2 points sur une ligne », qui relève de la recherche d'une condition nécessaire (une nécessité).
- Modifier la nature contrat didactique : le contrat de vérification – on vérifie matériellement la validité des grilles proposées – doit évoluer vers un contrat didactique de preuve par arguments.
- Négocier le changement de contrat sans l'explicitier, ce qui n'est pas facile. L'émergence du raisonnement – « On ne peut pas placer plus de 10 points sur une grille valide car il ne peut pas y avoir plus de deux points par ligne » – pourra être favorisée par un changement de cadre : passage du cadre graphique où l'on place des points, à celui des nombres.

Le potentiel de résistance dynamique est lié au problème en lui-même et à la gestion de l'enseignant : la recherche individuelle de grilles valides va opposer une certaine résistance aux tentatives des élèves pour les produire. Cette résistance ne va cesser d'augmenter si les élèves se limitent à la recherche empirique de grilles valides, si bien qu'ils risquent de conclure : « on ne peut pas placer plus de 8 points car je n'arrive pas à en placer plus et pourtant j'ai cherché pendant tout ce temps. » Ainsi, on

⁴⁴ Par exemple certains élèves vont calculer le nombre de carreaux de la grille ($5 \times 5 = 25$) et conclure que le nombre maximal de points est 25, ou alors que, ne pouvant pas placer plus que 3 points par ligne ou colonne, alors on ne peut pas placer plus que 15 points ($5 \times 3 = 15$) sur la grille.

comprend le rôle essentiel de l'enseignant dans la réduction de la résistance du problème et la relance de la recherche.

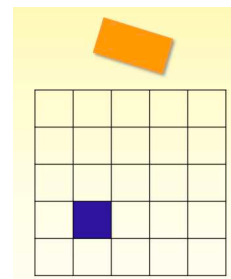
L'intérêt de ce problème est que l'on peut interrompre à tout moment la recherche, dès lors que les élèves auront cherché de manière empirique les premières grilles et trouvé l'argument qui prouve qu'on ne peut pas placer plus que 10 points sur la grille.

3.3.5 Le problème du Carrelage de la Salle de Bain

Le problème expérimenté par l'enseignante est :

On veut carrelers une salle de bain carrée qui peut être de n'importe quelle taille. Peut-on carrelers la salle de bain avec des dominos, quelque soit la place du lavabo (représenté en bleu).

Sur le plan de l'analyse mathématique, le problème général est : *on considère un quadrillage carré à cases carrées de dimension n (la salle de bain) avec un trou d'une case (pour mettre le lavabo). Est-il possible de le paver avec des dominos ?*



Nous mettons ici en évidence quelques preuves relatives à ce problème. Dans toute la suite, n désigne des nombres entiers naturels.

1. Condition nécessaire sur la parité des côtés pour que le pavage existe

Si l'on considère un carré de côtés n , il est nécessaire que n soit impair pour que le pavage existe. En effet, un tel carré comptant $n^2 - 1$ cases, le pavage par des dominos (2 carreaux) implique que $n^2 - 1$ soit pair, donc que n^2 soit impair, donc que n soit impair (puisque si n est pair, alors n^2 est pair).

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante. En effet, pour le cas du carré de taille 3 avec le lavabo placé sur la case au milieu d'un côté nous donne un contre-exemple : le pavage n'est pas possible. Ce résultat simple permet un travail avec les élèves sur le vrai/faux en mathématiques, le contre-exemple, sur les notions de condition nécessaire, de condition suffisante.

2. Une preuve par exhibition pour montrer l'existence d'un pavage

Prouver l'existence d'un objet mathématique peut être abordé avec des élèves de l'école élémentaire. Notamment le cas du carré de taille 3 permet ce type de preuve quand le lavabo est placé sur les cases noires, comme indiqué ci-contre. Les autres cas se ramènent à ces deux-ci par rotation du carré autour de la case centrale.



3. Une preuve par « forçage » pour montrer l'impossibilité d'un pavage

Cette preuve vient assez naturellement dans le cas du carré de taille 3, pour traiter les cas où le lavabo est placé au centre d'un bord, comme indiqué ci-contre. Cette preuve peut se faire **sans mot**.



Le problème du carrelage de la salle de bain permet donc une approche de la preuve sous différentes formes, dès la Grande Section de maternelle, et, d'aborder les notions de condition nécessaire et condition suffisante (plus difficile, donc réservées aux élèves de cycle 3).

Les potentiels de la situation

Le problème du carrelage de la salle de bain est issu de la recherche en mathématiques discrètes. Une analyse de Gandit la présente comme une situation de formation sur la preuve (2003 et 2004).

Le contexte du problème est facile d'accès et les élèves s'engagent rapidement dans la production des premiers essais de pavage avec du matériel – jeu de plateau en bois (de l'IREM) – plaque de carrés en mousse (maternelle) ou papier crayon. Ce problème est donc propice à la dévolution de la recherche.

Le potentiel de débat est important et dépend aussi de l'enseignant, de sa connaissance des enjeux du problème et de sa capacité à installer des conditions favorables au débat scientifique pour amener les élèves à formuler et valider les conjectures en utilisant les différents types de preuve attendus.

L'intérêt de ce problème est que l'on peut, comme le problème de la grille, interrompre à tout moment la recherche, dans la mesure où les élèves ont vécu le changement de cadre. Ce n'est pas le résultat que l'on vise mais la démarche des élèves, comme la résolution de cas particuliers, la production de conjectures ou de preuves partielles.

Conclusion sur la progression de nos problèmes

Nous constatons que pour chaque situation le potentiel de débat est important, notamment à partir du problème des diagonales. Ce potentiel est lié à l'enseignant, particulièrement à ses capacités à désigner les connaissances en jeu, et, à réussir des actions essentielles relatives au problème. Par ailleurs, le potentiel de débat a un impact sur le potentiel didactique (notamment pour l'entrée des élèves dans le processus de la preuve). Ce qui nous amène à conclure que chaque situation autour de ces problèmes requiert une position et un rôle spécifiques de la part de l'enseignant pour permettre aux élèves la rencontre du savoir visé. Ce qui confirme les potentialités de nos situations pour faire progresser les enseignants vers une pratique adéquate de la preuve en classe.

La progression de problèmes est donc un outil pour favoriser la transposition en classe du « chercher-prouver ».

3.4 Le tableau de progression : un deuxième outil pour les enseignants

Le tableau de progression est un outil que nous avons développé pour favoriser la transposition en classe du « chercher-prouver » en collaboration avec les enseignants. La dernière version finalisée date du mois de mars 2022. Il figure dans l'annexe 4.

Le modèle des conceptions de l'enseignant (cf. annexe 1) nous a permis, à partir des vidéos, d'identifier quatre axes sur lesquels jouer pour favoriser une pratique adéquate de la preuve en classe. Ces axes sont :

- la désignation des connaissances en jeu et l'explicitation des objectifs visés ;
- l'observation des actions scientifiques⁴⁵ des élèves ;
- le débat scientifique ;
- la conclusion du problème et l'institutionnalisation

⁴⁵ Les actions scientifiques des élèves sont décrites dans le cadre du modèle EMI, (Gandit 2015 ; Lepareur & al., 2019), évoquées dans la partie théorique 2.3.3, pages 21-23.

Ces quatre axes sont inhérents à une pratique adéquate de la preuve en classe avec une position spécifique de la part de l'enseignant que nous explicitons dans le tableau de progression.

Pour chaque axe, nous avons défini quatre niveaux d'expertise⁴⁶ :

Les deux premiers niveaux 1 et 2 (colonnes 1 et 2) : ils ont été décrits en collaboration avec les enseignants, à partir de nos observations en classe et de leurs retours personnels. Ces niveaux sont des indicateurs des difficultés que l'on peut observer le plus couramment dans leurs pratiques.

Les niveaux experts 3 et 4 (colonnes 3 et 4) : ils ont été définis par nous à partir des éléments de notre cadre théorique (cf. partie 2.3.3). Ce sont des indicateurs d'une pratique adéquate de la preuve en classe. Ils sont cohérents avec les cinq stratégies d'évaluation formative. Ainsi, une pratique experte de la preuve en classe favorise l'auto-régulation des apprentissages des élèves, ce qui nous semble tout à fait cohérent. Nous ajouterons qu'elle favorise également la dévolution du problème aux élèves.

Voici l'exemple d'une pratique experte de la preuve en classe (niveau 4). Nous mettons en évidence sa cohérence avec les cinq stratégies d'évaluation formative que nous écrivons en italique.

➡ **La désignation des connaissances en jeu et l'explicitation des objectifs visés :**

L'enseignant est capable de désigner les objectifs d'apprentissage en lien avec la preuve. Il conduit la mise en œuvre de la démarche de résolution du problème en fonction de ces objectifs qu'il explicite aux élèves. Il ne s'agit pas de dévoiler ces connaissances dès le début, mais de les clarifier lors de la présentation du problème à la classe, au cours de la mise au point collective et pendant l'institutionnalisation où l'enseignant les formalise, dans une trace écrite. Cette action attendue de la part de l'enseignant est cohérente avec la *stratégie 1* de l'évaluation formative⁴⁷.

➡ **L'observation des actions⁴⁸ des élèves** : elle est essentielle pour améliorer le feedback de l'enseignant et la pertinence de ses décisions en classe. L'enseignant observe les attitudes des élèves et leurs productions surtout pendant les phases de recherche pour organiser le débat (idées pertinentes ou pas, questionnements émergents).

➡ **Le débat scientifique** : l'enseignant a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe qui permet de valider ou rejeter ces conjectures. (*stratégie 2* de l'évaluation formative)⁴⁹. L'enseignant favorise des rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies (*stratégie 3* de l'évaluation formative). L'enseignant incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs (*stratégie 4* de l'évaluation formative)⁵⁰. L'enseignant incite les élèves à être responsables de leurs propositions (*stratégie 5* de l'évaluation formative)⁵¹. Les conjectures avec leurs preuves acquièrent le statut de résultats mathématiques.

⁴⁶ Le développement de cet outil a démarré au mois de juin 2021 et a été finalisé en février 2022.

⁴⁷ Stratégie 1 : clarifier, partager et faire comprendre les intentions d'apprentissage et les critères de réussite.

⁴⁸ Les actions des élèves sont les actions scientifiques décrites dans le cadre du modèle EMI, (Gandit 2015 ; Lepareur & al., 2019).

⁴⁹ Stratégie 2 : organiser de véritables discussions, activités et tâches qui produisent des preuves des apprentissages

⁵⁰ Stratégie 4 : inciter les élèves à être des ressources pour leurs pairs

⁵¹ Stratégie 5 : inciter les élèves à être responsables de leurs apprentissages.

➡ **La conclusion du problème** : essentielle, elle porte sur les résultats mathématiques du problème, à savoir, les conjectures et leur preuve. A ce moment, l'enseignant sollicite les élèves pour vérifier leur compréhension des apprentissages et les rendre responsables de leurs apprentissages (*stratégie 5* de l'évaluation formative). Il peut également réaliser un feedback sur les résultats pour certains élèves (*stratégie 3* de l'évaluation formative).

➡ **L'institutionnalisation** : essentielle, elle permet d'explicitier les apprentissages en jeu dans le cadre du problème (*stratégie 1* de l'évaluation formative)⁵². L'enseignant sollicite les élèves pour formuler ce qu'ils ont appris. Ils contribuent à l'élaboration de la trace écrite. Il incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en développant l'auto-évaluation (*stratégie 5* de l'évaluation formative). L'enseignant peut également faire un feedback pour certains élèves (*stratégie 3* de l'évaluation formative).

L'objectif pour les enseignants est d'évoluer vers ces niveaux experts. A cet effet, le tableau présente deux intérêts : celui de comprendre les attendus sur le plan de la démarche de résolution du problème, et, celui de définir des objectifs personnalisés en fonction de leurs besoins : choisir un axe (ou plusieurs) qu'ils souhaitent « travailler » et le niveau d'expertise visé, et, de conduire la séance selon ce(s) objectif(s).

Le feedback est réalisé à partir de nos observations en classe, des vidéos, ou du bilan de séance de chaque enseignant.

Le tableau de progression est donc utilisé par les enseignants comme un outil d'évaluation formative de leur propre pratique. Voici les positionnements⁵³ de l'enseignante que nous suivons :

- « objectifs : débat mathématique pour la validation, niveau 4, ; institutionnalisation avec une trace écrite, niveau 4 » (mars 2022).

3.5 Les données

Les données que nous utilisons pour mener notre étude sont de différents types :

Les enregistrements vidéos

Le groupe IREM a filmé l'enseignante expérimenter cinq problèmes⁵⁴ avec une classe de CM2, sur une longue période entre 2019 et 2022. Nous utilisons deux caméras orientées sur les élèves ou l'enseignante. Nous avons huit expérimentations :

- Janvier 2019 : problèmes des Billets - vidéos ;
- Mars 2019 : problème de la Grille - vidéos ;
- Mai 2019 : problème des Diagonales - vidéos ;

⁵² Stratégie 1 : clarifier, partager et faire comprendre les intentions d'apprentissage et les critères de réussite.

⁵³ Ces objectifs ont été formulés par les enseignants lors de notre réunion collaborative du 2 mars 2022.

⁵⁴ Les problèmes sont présentés dans la partie 4.2 du mémoire.

- Janvier 2020 : problème des Nombres (variante du problème des Billets) - audio ;
- Janvier 2021 : problème des Albums (variante du problème des Billets) - vidéos ;
- 2021 : problèmes des Gommettes - vidéos ;
- 2021 : problème du Carrelage de la Salle de Bain - vidéo ;
- Mai 2022 : problème de la Grille - vidéo.

Nous avons estimé, à partir des vidéos, le temps alloué par l'enseignante aux phases de recherche individuelle et en groupe, au débat-validation, à la conclusion du problème et à l'institutionnalisation. Ces éléments nous permettent de rendre compte de l'évolution des modalités d'organisation sur les huit expérimentations. Ces informations sont consultables à l'annexe 5.

Les retranscriptions de séances

A partir des huit vidéos, nous avons produit huit retranscriptions de séances, sur lesquelles nous nous appuyons pour l'analyse de nos résultats. Nous n'avons pu les mettre dans nos annexes car les documents sont trop volumineux. Nous les référencerons par :

- retranscription 1
- retranscription 2
- retranscription 3
- retranscription 4
- retranscription 5
- retranscription 6
- retranscription 7
- retranscription 8

Dans chaque retranscription, E désigne un élève non identifié, s'il y en a plusieurs ils sont numérotés E1, E2, ... Les lettres, J, L,..., sont les initiales des prénoms des élèves identifiés et qui interviennent souvent. P désigne l'enseignante.

Trois entretiens individuels avec l'enseignante

- 1^{er} entretien : le problème des Gommettes - 2021 (date : 02.05.22) ; annexe 14
- 2^{ème} entretien : questions sur sa pratique (date : 05.05.22) ; annexe 15
- 3^{ème} entretien : questions sur sa pratique (date : 21.06.22) ; annexe 16

4. Les données recueillies

Nous commentons, dans cette partie, les données recueillies par le biais de nos critères et leurs indicateurs pour chaque problème expérimenté par l'enseignante. Les données sont présentées dans huit tableaux, accessibles dans les annexes 6 à 13. Nous utilisons également des extraits des retranscriptions des huit expérimentations que nous citerons entre guillemets.

4.1 Analyse du tableau I (problème des Billets)

L'expérimentation comporte une séance avec une phase de débat-validation et un moment d'institutionnalisation très court d'une minute.

L'enseignante a anticipé l'exposition des solutions, en sollicitant d'abord les groupes en difficulté. Les solutions sont validées par l'enseignante sauf pour le dernier groupe où un élève valide. Pour la validation, les interactions ont principalement lieu entre l'enseignante et les rapporteurs plus quelques élèves qu'elle sollicite une fois. Ce qui signifie qu'une petite partie de la classe est impliquée.

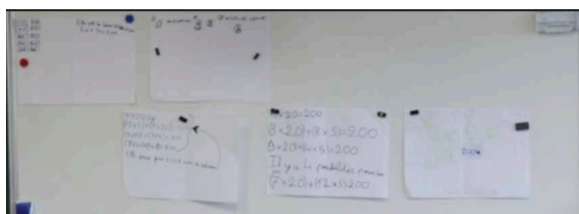


Figure 13 : solutions de tous les groupes

L'enseignante utilise le tableau pour accrocher les solutions de tous les groupes, mais elle ne relève rien au tableau (cf. figure 13). Elle semble connaître les enjeux du problème car elle relance le débat, à 5 minutes de la fin, avec le questionnement : « Est-ce qu'on est sûr qu'il n'y a que ces quatre possibilités ? » (temps 2, cf. annexe 6, tableau A).

Les élèves proposent des arguments intéressants, notamment sur le fait qu'ils aient tous les mêmes solutions, mais ils se tournent vite vers des calculs incohérents (retranscription 1) :

« G : non non non, moi je pense que non car j'ai cherché d'autres solutions....

P : tu as cherché d'autres solutions

Jo : c'est bizarre car nous tous on a quand même tous les mêmes.

J : oui voilà !

P : donc ça c'est une preuve que les 3 groupes là il n'y a pas plus que 4 solutions.

J : oui voilà !

L : non non parce qu'on a eu tous les mêmes mais c'est peut être les plus faciles, ou alors c'est que ça.

J : ou alors c'est plus compliqué que ça.

G : mais non il n'y en a pas d'autre.

E : prouve-le

[...]

L : si tu fais 20x10 dans l'autre sens c'est différent.

P : attention, 20x10 et 10x20 ça reste 10 billets de 20.

E : maitresse, on aurait pu faire par exemple 10x20 + 20 -x quelque chose.

Les élèves ont de moins en moins d'écoute et deviennent bruyants. Le débat glisse dans une impasse car les arguments échangés s'éloignent de plus en plus du sujet. L'enseignante stoppe le débat à une minute de la fin avec la question : « qu'est-ce qu'on peut retenir de ce genre de problème ? ».

L'enseignante reformule la réponse d'un élève par « voilà, il ne faut pas rester sur une seule possibilité, mais qu'il peut y avoir plusieurs solutions. Exactement ! » (cf. tableau B, annexe 7).

4.2 Analyse du tableau II (problème de la Grille)

L'expérimentation comporte une séance. Nous ciblons la phase de débat-validation et la phase de débat pour la recherche des moyens de preuve.

L'enseignante a anticipé l'ordre de présentation des solutions en fonction du nombre de points placés sur la grille, en commençant par une grille à 10. On peut se demander si elle avait observé lors de la recherche en groupe que cette grille n'était pas valide. Cela présente un intérêt sur le plan des apprentissages car il s'agit d'engager les élèves dans les actions : vérifier et valide

La grille à 10 est invalidée par une élève qui montre un alignement de trois points, qui ne fait pas l'unanimité. L'enseignante intervient et reformule en demandant à l'élève si c'est bien cet alignement (cf. figure 14).

L'enseignante valide en dernier lieu : « si, ils sont alignés.

Donc la solution à 10 ne fonctionne pas».

La grille à 9 points est validée par certains élèves qui ne trouvent pas d'alignement de trois points, mais d'autres doutent. L'enseignant la valide et invalide celle à 8 points (retranscription 2) :

G : non maitresse, il y en a 8 !

P : ah, toi tu penses qu'il y en a 8 ? Mais là il en a mis 9 ! Donc il y en a 9 et il n'y en a pas plus de trois..euh..deux alignés. Tu es d'accord ?

Jo : mais 8 c'est juste mais il en manque un

P : 8 c'est juste mais est-ce que la consigne est respectée ?

E : non

P : non tu vois qu'on peut faire plus. Maintenant est-ce que 9, c'est vraiment le maximum ?

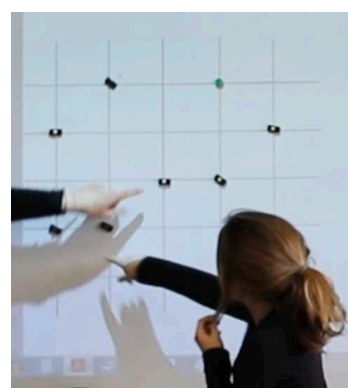


Figure 14 : grille invalidée à cause d'un alignement de trois points

Pour la validation les interactions se situent entre l'enseignante et les rapporteurs et quelques élèves, toujours les mêmes, ce qui révèle peu d'élèves impliqués dans le débat. Le tableau est utilisé comme un support seulement et le temps accordé aux élèves pour argumenter est court.

L'enseignante semble connaître les enjeux du problème, notamment la nécessité du basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument qui prouve que le nombre maximal cherché ne peut pas être plus grand qu'un certain nombre. Elle relance la recherche avec la question : «Maintenant est-ce que 9 c'est vraiment le maximum? Comment peut-on le prouver avec une justification mathématique ? » (temps 2, cf. annexe 7, tableau A). Elle est aidée par le collègue de l'IREM (retranscription 2) :

« J : alors il y a 25 carreaux, du coup...

S : 36 carreaux !...

JC : vous avez entendu ce qu'a dit Julien ? Je ne sais pas si ce qu'il a dit est intéressant, mais Sa démarche... Il n'est plus entrain de placer des points...il est entrain de raisonner...il dit il y a 25 carreaux.....donc.....vous voyez que c'est différent comme raisonnement on entre dans une autre façon de réfléchir..et c là qu'on commence à faire des maths.»

Le débat est bruyant, les élèves ont peu d'écoute, jusque'à ce que deux élèves proposent (retranscription 2) :

« L : en fait c'est 5×2

P : pourquoi ?

L : ben par ce que l'on ne peut en mettre que deux alignés et il y a 5 lignes.

B : Du coup, on fait 2×5 mais il faut donc trouver la bonne place. »

A l'issue de cette preuve, les élèves ne sont pas capables de conclure seuls, que le nombre maximum de points cherchés est compris entre 9 et 10, ou qu'il ne peut pas être plus grand que 10, ou encore qu'il est égal à 9 ou à 10. C'est le collègue de l'IREM qui le prend en charge. Sa conclusion est : « on a prouvé que la réponse c'est 9 ou 10. Alors on n'a pas tout a fait terminé car entre 9 et 10, on n'a pas trouvé la réponse. Alors il faudrait trouver une preuve, soit que c'est 9, soit que c'est 10 ». (cf. tableau B, annexe 7). L'enseignante conclut : « ben on y est presque là du coup ».

4.3 Analyse du tableau III (problème des Diagonales)

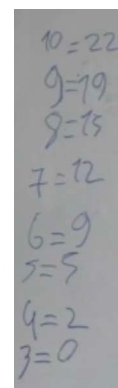
Nous nous focalisons sur les deux phases de débat-validation et la conclusion partielle en début de séance. L'objectif visé par la classe est, à ce moment là : « trouver un moyen de calculer le nombre des diagonales avec le nombre de sommets ». Les élèves recherchent donc une conjecture de portée générale. L'enseignante a ainsi organisé la présentation des conjectures : elle sollicite d'abord les élèves en difficulté, dont elle valide l'organisation de la démarche (chercher sur des petits cas et utiliser les couleurs). Les deux conjectures proposées : « nombre de sommets + 2 » et « (nombre de côtés $\times 2$) - 4 » sont chacune invalidées par une élève avec un contre-exemple.

Deuxième séance : l'enseignante organise la présentation des conjectures par degré d'intérêt.

Exemple 1 : J a organisé ses résultats, la colonne de gauche comporte le nombre de côtés et la colonne de droite, le nombre de diagonales (cf. figure 15). En comparant des petits cas, l'élève trouve la conjecture : « on ajoute 10 au nombre de diagonales quand on saute de deux polygones » (retranscription 3) :

« J : En fait on a vu que là, [entre le 4 et le 7] on saute de deux polygones et ça fait 12 et là on saute 2, ça fait 15... et là on en saute 2 et ça fait 19 et puis après on a continué ».

Certains élèves invalident la conjecture avec des contre-exemples, mais ils ne sont pas d'accord sur le nombre de diagonales attendu. L'enseignante laisse planer le doute mais revient à l'objectif principal : « c'est pour cela qu'il faut trouver car vous avez vu qu'on se trompe, on n'est pas d'accord sur le nombre de diagonales ».



10	= 22
9	= 19
8	= 15
7	= 12
6	= 9
5	= 5
4	= 2
3	= 0

Exemple 2 : B propose une autre démarche qu'il a trouvée en comparant des petits cas (retranscription 3) :

Figure 15 : résultat d'élève

« B : bon ben alors il y a une diagonale qui part de chaque sommet. Là, il y a un sommet, ok. Donc il y en a une qui part même si il y a des croisements, il y en a toujours qui partira de chaque sommet

Autres élèves : oui !!!!!

« B : après on rajoute toujours + 3, car il faut toujours rajouter 3, pour 4, 4, c'est les côtés du quadrilatère.

E1 : car là tu as un seul trait qui arrive donc tu fais $1 + 3$ ça fait 4

B : et ça marche avec toutes les formes actuellement.

E1 : par exemple, une forme à 10 sommets, ben tu auras 7 droites qui vont arriver.

P : 7 diagonales qui vont partir du sommet.

B : d'un sommet

E1 : et là $7 + 3$ ça fait 10

B : donc on verra 10 côtés

P : donc si 7 diagonales partent d'un sommet, ça veut dire que c'est une figure à 10 cotés ?

B : oui

P : est-ce que ça répond à notre problème ?

B : ah ben non ! »

P : mais non mais c'est intéressant quand même.

Exemple 3 : Jo étudie comment se construit le nombre de diagonales dans différents cas. L'élève veut déterminer le nombre de diagonales de l'octogone.

L'enseignante l'aide à finaliser les tracés (cf. figure 16) et en déduit le nombre de diagonales en sollicitant les élèves.

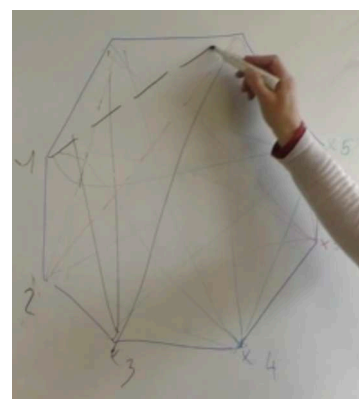


Figure 16 : l'enseignante complète le tracé des dernières diagonales

Sur les deux séances, les interactions se situent, pour la validation, entre l'enseignante et les rapporteurs, sauf sur la dernière conjecture. En cela, il y a peu d'élèves impliqués dans le débat. Le tableau est utilisé comme un support où les élèves écrivent leur démarche. L'enseignante ne relève par écrit que la démarche de Jo et elle valorise à l'oral les démarches qui présentent une organisation (couleurs, études de petits cas) ou sont proches de l'objectif de la classe : chercher la relation entre le nombre de côtés et le nombre de diagonales.

4.4 Analyse du tableau IV (problème des Nombres)

L'expérimentation comporte deux séances sur deux problèmes de même type. Nous nous focalisons sur les phases de débat-validation.

Pour le premier problème (somme des chiffres est égale à 4), l'enseignante a organisé la présentation des propositions des élèves selon le nombre de solutions. Elle met en évidence, à l'oral, l'organisation de la démarche des élèves et réalise un feedback pour les élèves en difficulté en reformulant les propos des élèves (retranscription 4) :

P : Vous avez compris l'organisation ? Ou pas ? D'abord ils ont fait les sommes pour faire 4. Qu'est-ce qu'on utilise comme chiffres, comme nombre pour faire 4 ; et après ils ont trouvé $2+2$; $3+1$; $3+1$ ils ont fait deux nombres 31 et ils ont inversé, 13 ; puis une somme de 3 chiffres et une somme de 4 chiffres.

Pour la validation les interactions se situent entre l'enseignante et les rapporteurs et quelques élèves qui interviennent spontanément ce qui révèle peu d'élèves impliqués dans le débat. Le tableau est utilisé comme un support pour présenter les solutions. Elle valide les solutions mais pas le nombre (retranscription 4) :

P : Alors avec votre organisation est-ce vous êtes sûrs qu'il n'y a pas d'autres solutions ?

E : ben oui

P : pourquoi ?

E : ben car on a essayé tous les calculs qui pourraient faire 4 et on n'a rien trouvé.

P : vous avez fait tous les calculs qui pouvaient faire 4 et après vous avez mis, inverser tous les chiffres et vous êtes sûrs qu'il n'y en a pas d'autres ? Certains ?

E : oui

P : ok, merci. Alors il y a un groupe qui a une autre solution. Abel. Tu es le rapporteur Abel ? Vous avez trouvé 7 vous aussi ? »

A l'issue des présentations, le nombre de solutions ne fait pas consensus. C'est l'enseignante qui conclut : « oui, alors bon, moi j'accepte la solution à du groupe d'A (à 8) mais j'accepte aussi l'autre solution de 7 nombres. J'accepte les deux car c'est juste ce qu'il disent également. D'accord ? Mais vous aussi c'est juste ». Les notions en Numération auraient permis de trancher à huit solutions.

En fin de séance, l'enseignante sollicite rapidement un élève pour lire les choses importantes pour résoudre un problème (dont nous n'avons pas trace dans l'enregistrement). Sa posture révèle qu'elle accorde une importance à l'institutionnalisation.

Pour le deuxième problème (somme des chiffres est égale à 6), l'enseignante sollicite un élève pour écrire ses solutions au tableau. Les interactions restent encore limitées à l'enseignante et l'élève rapporteur, voire quelques élèves qui participent spontanément. En cela, peu d'élèves sont impliqués dans le débat. Puis, elle relance avec cette question : « est-ce que certains ont trouvé d'autres nombres ? Autres que ceux là ? » (temps 2, annexe 9, cf. tableau A2). Veut-elle inclure la classe, amener les élèves à trouver une organisation pour vérifier et valider le nombre de solutions ?

Comme pour le problème des Billets, elle semble connaître les enjeux de ce type de problème, notamment qu'il est nécessaire de s'organiser pour prouver qu'on a toutes les solutions. Le choix du second problème est probablement lié à cet objectif. Cependant, l'enseignante ne conclut pas sur les résultats du deuxième problème car les ils n'ont pas été établis. Le temps manque pour aller plus loin.

4.5 Analyse du tableau V (problème des Albums)

Cette expérimentation comporte une séance dont la phase collective (à l'issue de la recherche) comporte une phase de débat-validation et une phase d'institutionnalisation. L'enseignante a anticipé l'ordre de présentation des solutions selon le nombre croissant de solutions. Les solutions sont validées au fur et à mesure par l'enseignante et les élèves. Les interactions sont principalement entre l'enseignante et les rapporteurs plus deux élèves qui participent spontanément. Ce qui signifie qu'une petite partie de la classe est impliquée dans la validation.

L'enseignante constitue la mémoire des idées fortes de la classe en relevant par écrit leurs solutions et en vérifiant si c'est ce qu'ils veulent dire (cf. figure 16).



Figure 17 : les 5 solutions dont une est fausse.

L'enseignante démarre l'institutionnalisation cinq minutes avant la fin pour amener les élèves à comprendre les enjeux du problème. Elle interagit avec l'ensemble de la classe à ce moment (retranscription 5) :

« P : alors quelle est la première chose que l'on peut en tirer de ce problème ?

E : il est dur

E : il y a plusieurs solutions !

P : il y aplusieurs solutions possibles, d'accord, ça c'est la première chose. Maintenant vous en avez trouvé 5. Est-ce que vous êtes sûrs qu'il n'y a que 5 solutions ?

E : non, non, beaucoup plus, sûrement !

P : toi tu dis qu'il y en a beaucoup plus. Mais comment peut-on le savoir ? Il faudrait prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions. »

Les élèves ont compris qu'un problème peut avoir plusieurs solutions, mais ils n'évoquent pas d'organisation possible, ni qu'il est nécessaire de s'organiser (retranscription 5) :

« P : toi tu dis qu'il y en a beaucoup plus. Mais comment peut-on le savoir ? Il faudrait prouver qu'il n'y a pas d'autres solutions. »

K : peut être qu'il y en a d'autres qui n'ont pas donné leurs solutions

P : alors là on a mis tout en commun et puis on a vu que toutes les solutions qui sont là ont été trouvées par les groupes. »

« E1 : peut être que tu peux trouver plus, si tu fais trouver longtemps la même question.

P : si tu réfléchis plus longtemps? C'est ça ? Oui, mais alors, à un moment ça va s'arrêter. Alors comment va-t-on savoir qu'il n'y a plus de solutions?

E2 : ben avec tous les nombres....

P : c'est-à-dire ?

E : ben ...si tu prends un album...

E3 : ben on n'en trouve pas d'autres.

P : oui mais c'est pas suffisant ça. »

A ce moment là, un élève trouve une cinquième solution. Puis, l'enseignante relance le débat (retranscription 5) :

« P : Alors quelle est la chose que l'on peut retenir de ce problème ? On va le répéter une dernière fois ?

E : il y a plusieurs solutions

P : voilà

[...]

P : Moi je voudrais que l'on prouve, que l'on trouve la preuve qu'il n'y en a pas d'autres.

J : parce qu'il n'y a plus de solution....

P : comment tu le sais

J : parce que...

P : prouve le moi ! Mais il est trop tard pour le prouver. »

Quelques élèves participent au débat mais même si l'enseignante utilise plusieurs fois le mot « prouver », les élèves produisent des arguments non mathématiques. Le temps manque pour aller plus loin.

4.6 Analyse du tableau VI (problème des Gommettes)

Cette expérimentation comporte une séance dédiée exclusivement aux phases de débat-validation et d'institutionnalisation. La phase de débat-validation s'articule en trois temps. L'enseignante a anticipé l'ordre de présentation des conjectures, selon le nombre croissant de carreaux que l'on peut assembler avec 6 gommettes. Les conjectures sont validées par les rapporteurs et certains élèves de la classe, sauf pour la première, c'est l'enseignante qui valide en partie. Les interactions ont plutôt lieu entre les rapporteurs, l'enseignante et certains élèves de la classe qui valident.

Le temps dédié aux élèves pour valider est court car la validation est rapide avec deux contraintes : le nombre de gommettes (6) et si les carreaux de l'assemblage sont tous attachés.

Elle constitue la mémoire des idées fortes de la classe avec l'ensemble des solutions validées (cf. figures 18).

L'enseignante met également en évidence (avec un peu d'aide) le fait qu'il existe plusieurs démarches pour parvenir au même résultat (temps 2, cf. annexe 11, tableau A).

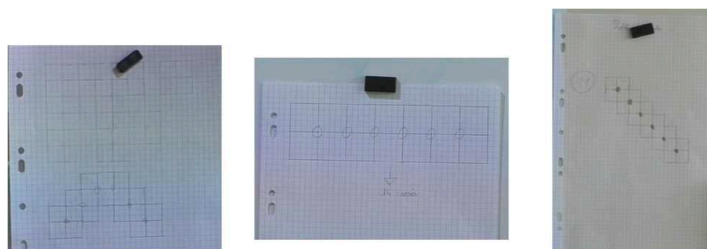


Figure 18 : solutions à 19, 14 et 19 gommettes

Elle consacre environ 5 minutes à la présentation de la démarche de J dans le cadre d'une interaction bilatérale avec l'élève. Cependant elle prend la main et réalise à la place de l'élève, sans vraiment respecter ses propos ni sa façon de faire (cf. Figure 19).

Est-ce par manque de temps ?

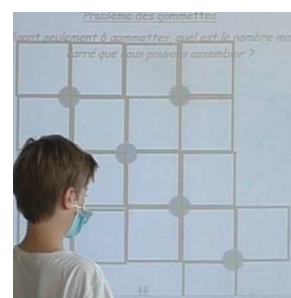


Figure 19 : démarche de J avec 19 gommettes

L'enseignante semble connaître les enjeux du problème pour que les élèves s'engagent dans le processus de preuve : la nécessité d'opérer le basculement de la démarche empirique à la recherche d'un argument, (temps 3, cf. annexe 11, tableau A). Cependant elle a besoin d'aide pour soumettre à la classe les sous-problèmes : rechercher le maximum de carreaux avec 2,3,4,5,6 gommettes.

Les élèves parviennent à produire le raisonnement qui prouve qu'on ne peut pas assembler plus de 19 gommettes. En atteste la trace écrite qui montre que les élèves ont réalisé la preuve (cf. figure ci-contre). A ce moment là, les interactions sont plus entre l'enseignante et la classe, le nombre d'élèves impliqués est donc plus grand.

A la fin de la séance, l'enseignante réalise une institutionnalisation très rapide et son contenu, formulé oralement par les élèves, est cohérent avec les connaissances visées (cf. annexe 11, tableau B).

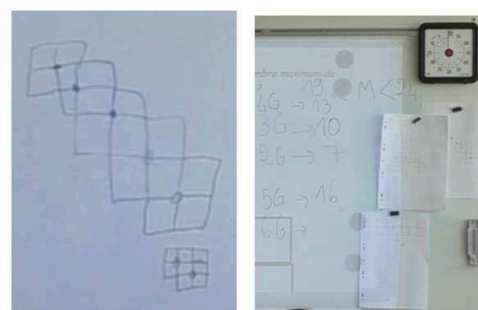


Figure 20 : trace écrite issue de la résolution des sous-problèmes

4.7 Analyse du tableau VII (problème de la SDB)

Cette expérimentation comporte une longue séance dédiée au débat-validation.

Cette phase s'articule en trois temps (cf. tableau A, annexe 12). Le premier concerne l'exposition de quatre conjectures⁵⁵ par les élèves et la constitution de la mémoire de la classe par l'enseignant.

L'enseignante reformule par écrit au tableau les arguments proposés oralement par les élèves, en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas (cf. figure 21)

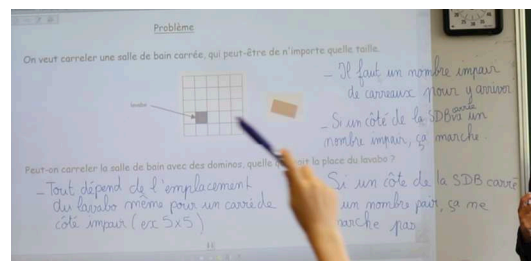


Figure 21 : 4 conjectures proposées par les élèves relevées par l'enseignante

Les interactions sont entre l'enseignante et la classe.

La conjecture C1 fait émerger deux nouveaux questionnements : « avec le 3x3, ça marche », « avec le 3x3 ça ne marche pas ». L'enseignante fait voter les élèves pour recueillir la tendance de la classe.

Elle sollicite deux groupes d'élèves pour venir faire la preuve au tableau quant à ces deux nouvelles conjectures (temps2, cf. annexe 12, tableau A). Les interactions ont lieu entre les élèves au tableau et l'enseignante et non avec toute la classe.

Une preuve par forçage (cf. figure 22) est réalisée par un élève afin de montrer que le pavage n'est pas possible pour cette position du lavabo. L'enseignante sollicite alors l'attention de la classe (retranscription 7) :

« P : chut, regardez ce qu'il a fait Jonaz.

J : je me suis rendu compte que en fait si par exemple lui il est en haut et qu'il n'y a personne en haut avec lui ou qu'il est au milieu et qu'il n'y a personne au milieu avec lui, et bien on ne peut pas car en fait là on est obligé de faire comme ça parce que sinon lui il est tout seul mais en fait on ne peut pas faire ça car... [il montre les deux cases libres en diagonale]. »

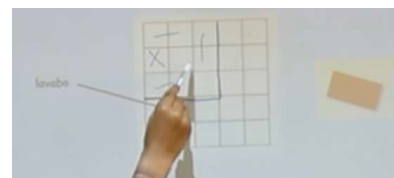


Figure 22 : preuve par forçage



Figure 23 : preuve par exhibition de cas

Le deuxième groupe fait une preuve par exhibition de cas qui permet de montrer que le pavage est possible pour cette position du lavabo (cf. figure 23)

Ces éléments vont enrichir la mémoire des idées fortes de la classe. Ces deux preuves permettent de revenir à la conjecture C2 et de l'invalidé dans le sens où la condition est nécessaire mais pas suffisante. D'ailleurs, un élève l'a très bien compris : «vous avez vu, tout dépend de la position du lavabo ! », mais l'enseignante préfère ralentir le débat : « ah.... toi je te garde pour la fin. C'est super.

⁵⁵ C1 : « Il faut un nombre impair de carreaux pour y arriver » ; C2 : « Si un côté de la SDB a un nombre impair, ça marche » ; C3 : « Si un côté de la salle de bain carré a un nombre pair ça ne marche pas » ; C4 : « Tout dépend de l'emplacement du lavabo, même pour un carré de côté impair. Exemple 5x5 »

Moi je veux avant d'avancer, qu'on valide ça ». Elle a conscience de ce qui est mathématiquement en jeu et elle conduit le débat dans l'objectif d'amener les élèves à (in)valider les quatre conjectures : C1, C2, C3, C4. L'enseignante oriente le débat sur la validation de la conjecture C3, (temps 3, cf. annexe 12, tableau A). Les interactions ont lieu entre l'enseignante et un grand groupe d'élèves (retranscription 7) :

« A : je ne valide pas, si on prend par exemple le carré en bois, c'est un nombre pair
P : alors 8×8 c'est ça ?
A : Forcément si je mets le lavabo, je vais être obligé de le mettre, alors j'aurai un nombre impair de carreaux
P : ce que veut dire Armand si on prend une salle de bain de 8 de côté, s'il y a 8 carreaux de côtés, la salle de bain aura combien de carreaux au total ?
E : 64
P : si on place le lavabo quelque part, il va rester combien de carreaux ?
E : 63
P : est-ce que c'est possible de mettre les dominos ?
E : non
P : pourquoi ?
E : car c'est impair
P : car il y a un nombre impair de carreaux. Donc on élimine les solutions 8×8 et puis ?
E : 5×5
P : c'est pair 5×5 ?
E : non, 4×4 , 2×2 , 6×6 , ..., 10×10 , 12×12
P : 4×4 , 2×2 , 6×6 , ..., etc Stop ! On a dit que si le côté était pair ça ne marche pas on a démontré qu'on obtenait un nombre impair de carreaux après avec le lavabo. »

L'enseignante reformule par écrit la conclusion des échanges (cf. figure 24) où elle valide la conjecture C3. En cela, elle enrichit la mémoire de la classe, mais elle ne rédige pas la preuve. Elle n'évoque pas non plus C1 qui aurait pu être validée.

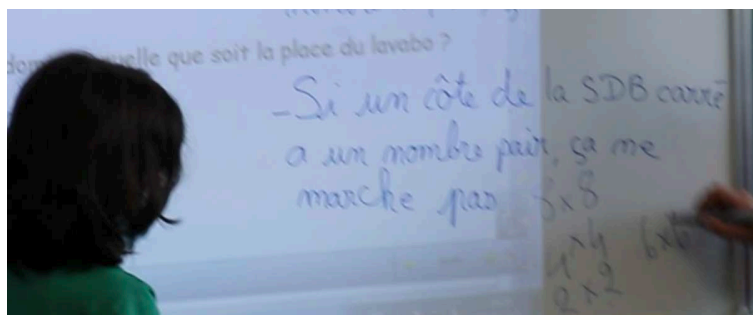


Figure 24 : l'enseignante écrit la conclusion

L'enseignante réalise deux conclusions partielles à mesure que les conjectures sont validées par les élèves (cf. annexe 12, tableau B). Elle ne fait pas d'institutionnalisation car ce n'est pas le moment. Il serait d'ailleurs intéressant de savoir ce qu'il s'est passé après cette séance.

Puis, elle relance la recherche (retranscription 7) :

« Maintenant on reprend cette hypothèse là : si la salle de bain elle a un nombre impair de carreaux, comme 5×5 , est-ce que ça marche tout le temps ?
E : non
P : c'est ce que je veux que vous le vérifiez !!! On dessine sur son cahier, on a les plateaux.....on essaie.... »

Voici un exemple de travail de recherche produit par deux élèves qui cherchent à répondre au nouveau questionnement sur le carré 5×5 . Ils ont trouvé toutes les positions du lavabo pour lesquelles il est possible de paver (cf. figure 25). Ils ont compris que, par symétrie, ils n'avaient pas besoin de vérifier toutes les positions du lavabo (retranscription 8) :

E1 : oui ça marche
 E2 : si on fait la même chose en haut. Pour cette position je suis sûr, mais je ne suis pas sûr pour tout car on n'a pas encore tout fait pour faire les essais.
 JC : si je le mets là [lavabo placé au centre du bord gauche]
 E1 : euh..je crois..oui [preuve par exhibition de cas]
 E2 : j'ai l'impression que quand on part du milieu et qu'on va en haut à droite à gauche et en bas, ça marche tout le temps et en diagonale
 JC : et si je le mets là [lavabo placé au centre du bord bas]
 E1 : ben c'est la même chose !
 JC : ah !
 E2 : c'est la même chose si on la tourne.
 E1 : si je le mets là
 JC : si tu le mettais là [lavabo placé dans un coin]
 E1 : si ça marche !
 E2 : ça, c'est ce que tu penses Hector, on va vérifier ça tout de suite. Oui ça marche.
 E1 » : oui ça marche je l'ai déjà fait [cf. figure ci-contre avec les dessins]
 E1 : en fait dans cette diagonale ça marche,
 E2 : en fait quand on fait tous les nombres vertical diagonal horizontal qui passent par le milieu ça marche

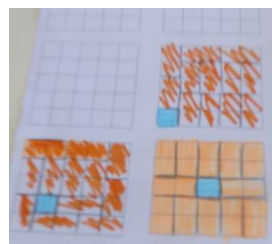


Figure 26 : tests pour différentes positions de lavabo



Figure 25 : positions du lavabo pour lesquelles il est possible de paver

Ils vont vérifier pour les autres positions.

4.8 Analyse du tableau VIII (problème de la Grille)

Cette expérimentation est une communication des élèves à la classe des résultats obtenus sur le problème de la Grille. Certains élèves étaient absents. L'enseignante organise la séance en trois temps. Tout d'abord, elle amène les élèves à reformuler les étapes de la dernière séance pour leur permettre de réinvestir le vocabulaire spécifique, elle attend le mot « vérifier » (retranscription 8) :

P : entre la recherche, les hypothèses et le débat ? D'ailleurs tu es bien placée car c'est toi avec ton groupe qui l'a fait. Qu'est-ce qu'on a fait après avoir projeté votre grille ?
 S : ah ben on a essayé de trouver si on pouvait rajouter des points, et on pouvait pas en rajouter et par contre les points ils étaient mal placés.
 P : alors qu'est-ce qu'on a fait ?
 S : ben on a montré un contre exemple.
 P : ça veut dire quoi ?
 E : prouvé
 P : non, vous allez trop vite, quel est le mot ?
 E : on a donné une preuve
 P : Non
 E : on a vérifié
 P : on a vérifié, très bien. »

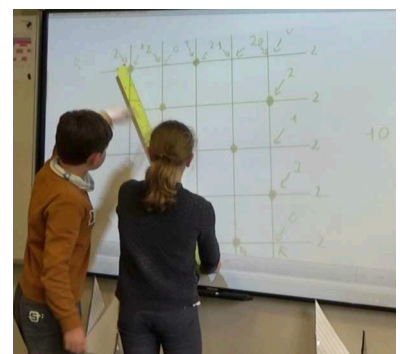


Figure 27 : une élève intervient pour vérifier l'alignement

Sur le deuxième temps (cf. annexe 13, tableau A), l'enseignante expose cinq grilles qu'elle a choisies en fonction du nombre de points (9 et 10) et de leur validité. Les élèves argumentent pour (in)valider les dites grilles. Les interactions ont lieu entre l'élève et la classe, voire entre deux élèves, lorsqu'un élève intervient pour aider un pair (feedback) (cf. figure 27).

Une élève vient faire la preuve au tableau que sa grille à 9 est valide (retranscription 8) :

[S prend chaque noeud libre et essaie d'y placer un jeton]

S : là on ne peut pas car ça fait déjà trois, là déjà pris, là ça fait 3,

Un élève vient faire la preuve que sa grille à 10 est valide et qu'il ne peut pas rajouter un autre jeton :

T : en fait au début, à la base ça revient un peu comme quand on avait cherché tout seul, T il avait trouvé une grille à 10. Et puis après ensemble on a vérifié avec Jena si elle était juste et on a trouvé que oui, 'elle était juste.

P : pourquoi ?

T : parce ce qu'il n'y avait pas d'alignement de trois points.

P : très bien.

T : Et puis après on a vu que l'on ne pouvait pas en rajouter plus car sinon il y aurait au moins un alignement de 3 points.

P : sur votre grille là ?

T : oui

P : si vous rajoutiez un point, peu importe où, vous avez essayé partout, c'est ça ?

T : oui

P : ok, ça marche

E : ah ouai ?

P : ah, ben montre, montre par exemple, si tu rajoutes un point, comment, enfin, ce qui se passe. Comme Sacha a fait tout à l'heure.

T : déjà ce qui est sûr c qu'on ne peut pas en mettre sur cette ligne vu que cela fera forcément trois vu qu'il y en a déjà deux, on ne peut pas en mettre sur la ligne d'à côté car il y en a aussi déjà deux, pareil sur cette ligne et pareil sur celle d'à côté il y en a aussi déjà deux, ici aussi.

Une élève montre que sa grille à 10 n'est pas valide à cause d'un alignement de trois points :

R : ben nous notre méthode, c'est qu'on a fait pour vérifier le nombre de points qu'il y avait sur les lignes et les diagonales... Et bien du coup elle a été fausse car ici c'est un alignement.

E : où ? Il est où l'alignement ?

E : Non, c'est pas là, regarde, là... je peux montrer maîtresse ?

J : maîtresse, il y en a un deuxième alignement

P : quoi, d'alignement ? où ça ?

[J vient le montrer mais se trompe.]

E : et non !!!

[...]

P : de toutes façons, le fait qu'il y ait trois points alignés, est-ce que cette grille est valide ?

E : non

P : non, à partir du moment où on trouve 3 points alignés quelque part, elle n'est pas valide.

L'enseignante prend aussi en charge les feedbacks (retranscription 8) :

G : ben j'avais dit pourquoi pas 8 ?

P : Tu avais dit qu'on pouvait peut-être faire 8, mais ?

G : ben on peut pas... parce que...

E : si on peut

G : si on peut, mais ..

P : mais ?

G : on en a trouvé plus ! Donc ça servait à rien puisqu'on pouvait faire plus et la question c'est combien au maximum.

P : voilà, 8 oui on peut le faire, mais on a vu qu'on pouvait faire plus, OK ?

L'enseignante semble connaître les enjeux du problème : la nécessité d'opérer un basculement de la recherche empirique à la recherche d'un argument, pour amener les élèves à trouver un moyen de prouver que le nombre maximal de points ne peut pas être plus grand qu'un certain nombre.

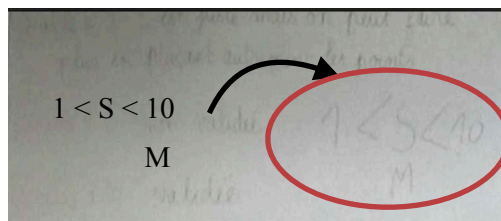


Figure 28 : trace écrite de la classe qui comporte l'encadrement du nombre de points maximum : $1 < M < 10$

C'est ce que les élèves ont fait lors de la séance précédente : ils ont trouvé un encadrement du maximum cherché : $1 < M < 10$ (cf. figure 28 où j'ai réécrit par dessus par manque de lisibilité).

Deux élèves expliquent leur raisonnement pour parvenir à cet encadrement (cf. annexe 13, tableau B). Nous pouvons remarquer la qualité d'écoute, le respect du temps de parole, et l'implication des élèves (retranscription 8) :

S explique son moyen de preuve :

S : moi je me suis dit, vu que ça faisait 5, je fais 5×5 et ça fait 25. Je me suis dit dans la table de 5, c'est 10 qu'on avait trouvé. Je me suis dit que comme personne n'avait réussi à en faire 11, et ben, du coup on ne pouvait pas faire plus que 10, donc c'était de 0 à euh, c'était de 1 à 10, donc on pouvait pas trouver plus. Après si on faisait 15, ça dépassait 11, ça dépassait 10, dans la table, et ça ferait plus d'alignement qu'il faudrait.

L'enseignante s'adresse aux élèves qui étaient absents :

« P : M et A...qu'en pensez-vous de l'hypothèse de Sacha ?

M : j'ai rien compris.

A : ben moi, je pense que c'est juste.. ce qu'elle a trouvé..car si on met plus que deux sur une ligne, ben ça fait trois. »

Dialogue entre les deux élèves A et S qui ne sont pas d'accord :

« A : ben j'étais pas convaincue car elle avait expliqué, elle avait trouvé grâce à la table de 5 et elle avait dit 11, vu que 11 ça fait pas partie de la table de 5, et ben ça ne peut pas marcher. Donc je n'étais pas convaincue car 15 ça fait partie de la table de 5 et ça ne marche pas.

[...]

S : pour moi, vu qu'il y a 11 ça marche pas et bien au dessus ça ne pouvait pas marcher Adèle !

A : oui, sauf que je n'avais pas compris le rapport avec la table de 5.

S : ben peut être que que toi tu n'as pas fait comme ça, mais moi j'ai trouvé comme ça, mais tu pouvais faire autrement ! Mais moi je me suis dit 25, c'est sûr qu'il y a un rapport avec le nombre 25, sinon, il n'y aurait pas de logique.

A : ben c'est comme ça que tu as trouvé, c'est juste que c'est un peu bizarre, maintenant j'ai compris ! »

Reformulation de l'élève W :

« W : ben en fait, ...ben en fait Sacha ce qu'elle voulait dire depuis le début, $5 \times 2 = 10$, du coup...au début on a la grille et la grille, il y a 5×5 traits, enfin lignes. Si on fait $5 \times 2 = 10$, du coup, c'est ça la réponse. C'est ça, on peut pas faire plus. Par exemple, si on ne devait pas dépasser 4, si à la place de 3, c'était 4, voilà, on pouvait faire 3 lignes, du coup ça faisait 15. »

Reformulation de l'élève A :

« A : moi ce que j'ai compris, quand il avait dit, il ne fallait pas dépasser de deux lignes, enfin de deux points aux interlignes, du coup tu faisais $2 \times 5 = 10$. Il a dit, imaginons qu'on ne doit pas dépasser 3 lignes, du coup on ferait $3 \times 5 = 15$. »

G : ah !!! c'est pas bête. »

« M : ben oui, quand ça arrive à 10, ben on peut mettre deux points, mais quand ça arrive à 15, là ce serait 3 points, à 20, ce serait 4 points, et ainsi de suite..

G : et à 5 ce serait à 25 car $5 \times 5 = 25$.

P : Roxanne ?

R : en fait c'est ça que je voulais dire, la même chose que Sacha qu'elle avait dit en se battant avec Adèle....

S : on ne s'est pas trop battue. »

5. Nos résultats

L'analyse de nos données nous permet de mettre en lumière des changements dans la pratique de l'enseignante, particulièrement pour les deux dimensions en lien avec notre problématique, à savoir, la gestion du débat scientifique et la conclusion du problème et l'institutionnalisation. Nous essaierons de comprendre si ces évolutions sont significatives de moments où les élèves ont une responsabilité scientifique. Nous mettrons en évidence les invariants et les changements de sa pratique, que nous affinerons à travers la loupe des entretiens individuels.

5.1 Les invariants dans sa pratique

Nous identifions deux éléments réguliers de la pratique de l'enseignante.

Nous constatons tout d'abord qu'elle organise les activités de recherche selon un même canevas : une phase de recherche individuelle de quelques minutes, suivie d'une phase de recherche en groupe, assez longue (entre 20 et 30 minutes) et d'une phase de débat-validation, plus variable en termes de durée et contenu (nous y revenons dans la prochaine partie). Lors du premier entretien individuel (cf. annexe 14), l'enseignante explique : « Pour ce type de problème IREM, je prévois une phase de recherche individuelle puis en groupe. C'est très bien pour permettre aux élèves de se lancer dans la recherche, de s'approprier le problème, de les faire reformuler pour amorcer la recherche » (cf. annexe 14, question 1-2). Il est vrai que pendant les phases de recherche individuelle, nous constatons sur les vidéos, que l'enseignante n'hésite pas à répondre aux questions, à solliciter les élèves pour expliquer à leurs pairs. Elle précise également pour la composition des groupes : « Pour la recherche en groupe, je ne prépare pas la composition des groupes, c'est parfois hétérogène, selon affinités, selon le placement aux tables » (cf. annexe 14, question 1-3).

Par ailleurs, l'enseignante anticipe toujours la présentation des productions des élèves qu'elle a pour objectif de valider de manière collective. L'organisation choisie est liée à ses objectifs. Par exemple pour le problème des Gommettes, elle présente les solutions dans l'ordre croissant du nombre de carreaux assemblés avec les 6 gommettes : 14, 18 puis 19. Au cours du même entretien, elle explique : « J'ai choisi l'ordre des solutions de la plus petite à la plus grande pendant le travail de groupe. Lorsque je pose la question, « est-ce le maximum », c'est pour aller vers les solutions des autres groupes et enchaîner dans la recherche » (cf. annexe 14, question 2). Sur le problème de la Grille en 2019, elle choisit de présenter d'abord une grille à 10 non valide alors que d'autres élèves ont trouvé des grilles valides à 8 et 9. Cela peut paraître surprenant mais laisse supposer que son objectif est de mettre en avant la nécessité de la part des élèves de vérifier leurs solutions. Elle souligne d'ailleurs souvent l'importance de cette action au cours des échanges avec les élèves. Les retranscriptions en attestent. L'anticipation de la part de l'enseignante suppose qu'elle observe de manière active les élèves pendant les phases de recherche. Ce qu'elle confirme au cours de ce même entretien : « Pendant la phase de recherche, je passe d'un groupe à l'autre, j'observe..., pas de discussion ..., s'il y a une question j'y vais sinon je les laisse » (cf. annexe 14, question 1-3).

5.2 Les changements dans sa pratique

5.2.1 Les modalités de gestion des situations

Le tableau qui décrit l'évolution des modalités d'organisation sur les huit expérimentations (cf. annexe 5) nous indique que pour les premiers problèmes de l'année 2019, le temps de recherche en groupe est supérieur à celui de la phase de débat-validation. Le travail en groupe consiste à échanger sur les solutions puis se mettre d'accord pour pouvoir présenter à la classe ses résultats ou ses démarches. L'enseignante accorde beaucoup d'importance à ce moment : « Je travaille beaucoup plus en groupe car c'est eux qui s'expriment, ils sont plus attentifs aux autres copains », (cf. annexe 15, question 2). Le contrat didactique est d'ailleurs bien établi entre les élèves et l'enseignante, comme nous le notons sur la retranscription du problème des Diagonales en 2019 : « Attendez, juste, je ne rappelle pas les règles du travail en groupe. Si il y a une feuille cela veut dire qu'il y a un scripteur, les autres expliquent, discutent, mais il y en a un qui écrit » (retranscription 3). Les élèves au sein du groupe doivent également nommer un rapporteur qui aura en charge la présentation des résultats.

A partir de janvier 2020, l'enseignante accorde plus de temps à la phase de débat-validation car elle programme son expérimentation sur plusieurs séances, comme pour le problème des Nombres (cf. annexe 5, tableau 1, ligne 4), où elle propose un second problème de même type. Ce changement important révèle que l'enseignante n'a plus comme objectif principal de résoudre le problème en une séance, mais de différer sur une autre séance.

Si la phase de débat-validation est toujours présente dans les séances, subséquente à la phase de recherche en groupe, ce n'est pas le cas de l'institutionnalisation. Sur la période 2019-2020, l'enseignante ne réalise pas d'institutionnalisation, ce qu'elle confirme dans le troisième entretien : « De plus, en 2019, je ne faisais qu'une ou deux séances pour chaque problème donc pas d'aboutissement. Cette année, j'ai fait au moins 4 séances par problème » (cf. annexe 16, question 2).

Quant à la conclusion du problème, nous ne l'avons évoquée qu'au cours de l'année 2022 avec la dernière version du tableau de progression. Le fait qu'elle ne soit réalisée que sur le problème du Carrelage de la Salle de Bain voire de la Grille, en 2022, est cohérent.

5.2.2 La gestion du débat scientifique

Nous déduisons des évolutions dans la pratique de l'enseignante au niveau de la gestion du débat scientifique. Nous nous appuyons sur les critères suivants : *Organisation de la présentation des productions* ; *Interactions* ; *Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture* ; *Nombre d'élèves impliqués* ; *Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)* (cf. annexe 5, tableau A).

Sur l'année 2019 jusqu'au problème des Nombres en 2020, la phase de débat-validation consiste à exposer les productions des élèves dans le but de les valider. Les interactions se situent principalement entre l'enseignante et les élèves rapporteurs plus quelques élèves qu'elle sollicite parfois ou des élèves participant spontanément. Le nombre d'élèves impliqués dans la validation est donc souvent inférieur à la dizaine (voir le critère *Nombre d'élèves impliqués* dans le tableau A des annexes 6 à 9). Par ailleurs, c'est souvent l'enseignante qui valide en dernier lieu.

Au cours de cette période, elle utilise le tableau comme un support d'exposition ou d'écriture des conjectures des élèves afin de valoriser la pluralité des solutions ou l'intérêt de leurs démarches, et non comme un outil pour constituer la mémoire des idées fortes de la classe (critère *Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)* dans le tableau A des annexes 6 à 9). L'enseignante formule les idées

importantes à l'oral, mais n'en garde aucune trace, à part les solutions accrochées ou écrites au tableau par les groupes. Par exemple, pour le problème des Diagonales en 2019, l'enseignante utilise le tableau pour projeter les conjectures d'élèves afin de valoriser leur organisation (utilisation de couleurs) ou leur démarche (essais sur des petits cas) ou leur conjecture de portée générale : trouver un lien entre le nombre de sommets et le nombre de diagonales. Mais les conjectures ne sont pas vraiment discutées, ni (in)valider, sauf la dernière sur laquelle l'enseignante s'attardera plus longuement pour montrer à la classe comment déterminer le nombre de diagonales d'un octogone. Mais dans quel but ? Il n'y aura pas d'autre séance.

Le temps accordé à l'élève rapporteur pour argumenter est très variable : il peut être suffisant, comme pour le problème des Billets en 2019 (cf. partie 4.1.1) ou trop court, pour le problème de la Grille en 2019 (cf. partie 4.1.2), ou court, pour le problème des Gommettes en 2021 car la validation est facile et rapide (cf. partie 4.1.6). Ce que confirme l'enseignante dans le premier entretien : « Concernant la formulation, il n'y a pas beaucoup d'explications » (cf. annexe 14, question 2). Ce n'est qu'à partir de l'année 2021, que l'enseignante accorde aux élèves un temps suffisant pour argumenter, ce de manière systématique. Ce changement est cohérent avec la période où l'enseignante commence à programmer plusieurs séances pour l'expérimentation d'un problème et prendre plus de temps.

A partir du problème des Albums photos en janvier 2021, ce sont les élèves ou l'enseignante qui valident, mais plus elle en dernier lieu (critère *Organisation de la présentation des productions* dans le tableau A des annexes 10 à 13). Cependant, l'enseignante ne parvient toujours pas à rester neutre, notamment sur le problème des Gommettes. Elle souligne lors du premier entretien : « c'est une catastrophe, il aurait dû prendre en main le tableau numérique avec le stylet mais je le fais moi-même. J'ai pris la main car Jules est dans son monde rêveur et je voulais l'aider » (cf. annexe 14, question 5). Par ailleurs, elle commence à utiliser le tableau comme un outil de mémoire des idées fortes de la classe : pour le problème des albums photos, elle reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou elle relève par écrit leurs arguments (critère *Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)* dans le tableau A de l'annexe 10). Pour le problème des gommettes, les élèves construisent, par écrit au tableau, la preuve de leur résultat (cf. partie 4.1.6). Cette action de l'enseignante permet de ralentir le débat. Pendant la validation, les interactions se situent entre l'enseignante et les élèves rapporteurs, voire quelques élèves intervenant spontanément ou qu'elle sollicite (critère sur le temps 1 *Nombre d'élèves impliqués* dans le tableau A de l'annexe 11). Par conséquent, le nombre d'élèves impliqués dans la validation reste faible. Mais les interactions évoluent et à un moment clé de la séance, c'est l'enseignante qui interagit avec l'ensemble de la classe : pour le problème des Albums photos, c'est lorsqu'elle questionne les élèves sur les moyens de prouver qu'il n'y a plus de solutions. La preuve n'est pas trouvée car le nombre de solution n'est pas établi correctement ; pour le problème des Gommettes, c'est lorsqu'elle guide les élèves pour changer de cadre et les faire basculer de la recherche empirique à la recherche d'un argument.

A partir du problème du Carrelage de la Salle de Bain en 2021, l'enseignante démontre un niveau plus expert dans la conduite du débat. Elle incarne plutôt un rôle de chef d'orchestre qui anime le débat. Notamment elle relève par écrit les conjectures des élèves pour constituer la mémoire des idées fortes de la classe, sur laquelle elle s'appuie pour faire émerger de nouveaux questionnements. Certaines conjectures proposées par les élèves sont validées par eux-mêmes, progressivement. Cela révèle une réelle activité mathématique des élèves qui sont plus impliqués dans la validation des conjectures et la recherche de réponses à de nouveaux questionnements. Ces activités mathématiques sont favorisées par le problème en lui-même dont l'enseignante exploite assez bien les potentialités : elle a compris que l'enjeu n'est pas de résoudre le problème mais de faire entrer les élèves dans le processus de la preuve. En attestent les types de preuve – par forçage, exhibition de cas, ou contre-exemple – fournies par les élèves au cours de la validation. L'enseignante parvient à ralentir le débat quand elle garde pour plus tard la remarque d'un élève très à l'aise. On voit qu'elle ne laisse pas le

débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ou de celle de ses meilleurs élèves. Son objectif est sans doute d'impliquer un plus grand nombre d'élèves. Les interactions sont plus entre l'enseignante et la classe (critère *Nombre d'élèves impliqués* dans le tableau A de l'annexe 12). Par ailleurs, l'alternance entre les phases de débat-validation et de recherche en groupe, favorise la dévolution de la responsabilité scientifique à la classe. En atteste la qualité des productions des élèves (voir des résultats de recherche partie 4.1.7).

5.2.3 La conclusion et l'institutionnalisation

Nous déduisons des évolutions dans la pratique de l'enseignante au niveau de la conclusion du problème et de l'institutionnalisation. Nous nous appuyons sur les critères suivants : *Organisation de la conclusion du problème* et *Organisation de l'institutionnalisation locale* (cf. annexe 5, tableau B).

Sur les premières expérimentations de l'année 2019, nous pouvons penser qu'elle connaît les enjeux des problèmes. En effet pour le problème des Billets, elle pose la question : « Est-ce qu'on est sûr qu'il n'y a que ces quatre possibilités ? » Son objectif est sans doute d'amener les élèves à comprendre un des enjeux de ce problème, à savoir qu'il est nécessaire de s'organiser pour prouver qu'on a toutes les solutions et qu'il n'y en a pas d'autres (cf. partie 4.1.1). De même pour le problème de la Grille, elle essaie d'amener les élèves à changer de cadre pour trouver la preuve que le nombre maximal de points sur la grille ne peut pas être plus grand que 10 (cf. partie 4.1.2). Cependant, l'enseignante ne parvient pas à réaliser l'institutionnalisation sur les deux problèmes (cf. annexes 6 et 7, tableau B) dont elle semble pourtant mesurer l'importance. En effet, elle conclut souvent ses expérimentations par la question « que peut-on retenir de ce problème ? ». Au cours du troisième entretien, l'enseignante explique : « En fait, pour les problèmes faits en 2019, mon manque d'expérience fait que j'avais beaucoup de difficultés à finaliser les problèmes. Je ne voyais même pas moi-même où je devais aller et ce qu'il fallait conclure. Je ne pensais pas encore aux conjectures, preuve, débat » (cf. annexe 16, questions 1 et 2).

Pour le problème des Nombres en 2020, comme nous l'avons évoqué, elle prend la liberté de proposer un second problème (dont le nombre de solutions est plus grand) pour amener les élèves à s'organiser, mais elle ne finalise pas : les résultats ne sont pas établis et les élèves, loin de formaliser une organisation pour prouver qu'il n'existe pas d'autres solutions. Il aurait fallu différer cette réflexion, mais l'enseignante ne fera pas d'autre séance.

A partir du problème des Albums photos en 2021, elle démarre l'institutionnalisation cinq minutes avant la fin, avec ce questionnement : « Alors quelle est la première chose que l'on peut en tirer de ce problème ? » Cependant, les résultats du problème ne sont pas complets et la réflexion est interrompue par l'annonce d'une nouvelle solution par un élève. Le travail sur la preuve ne peut pas aboutir. Ce scénario met en évidence l'importance de conclure le problème avant l'institutionnalisation. L'enseignante relance avec la question : « Quelle est la chose que l'on peut retenir de ce problème ? On va le répéter une dernière fois. » Au cours du troisième entretien, l'enseignante explique : « Pour les billets et l'album photo, après l'expérience de la première fois en 2019, je sais où aller donc oui, j'ai abordé l'organisation des solutions qui permet d'arriver à la preuve qu'il ne peut pas y avoir d'autres solutions possibles. Par contre, je ne me souviens plus du nombre de séances. Nous étions toujours dans la même démarche : recherche des solutions, organisation des différentes solutions trouvées, recherche d'autres solutions, preuve que toutes les solutions ont été trouvées » (cf. annexe 16, question 3). Pour le problème des Gommettes en 2021, l'enseignante réalise une institutionnalisation assez rapide où les élèves formulent oralement un contenu cohérent avec les objectifs visés – moyen de preuve et certaines connaissances d'ordre II – (cf. annexe 11, tableau B). Néanmoins, au cours du premier entretien, l'enseignante évoque ses difficultés : « c'est la première fois que je faisais ce

problème avec les élèves et le fait que je pose la question avec 50 carreaux c'est spontané. J'ai pensé au problème de la grille. Mais je ne l'avais pas envisagé et donc je suis perdue » (cf. annexe 14, question 6). L'enseignante souligne le fait que l'institutionnalisation n'est pas finie : « ils ont bien compris : faire des essais, chercher. On a trouvé une solution à 19, mais pour moi on n'a pas fini car elle n'est pas validée » (cf. annexe 14, question 8). La durée de l'institutionnalisation était-elle trop courte ?

Pour le problème du Carrelage de la Salle de Bain, l'enseignante réalise deux conclusions partielles à mesure que certaines conjectures sont validées (cf. annexe 12, tableau B). Cela atteste de ses capacités à désigner les enjeux du problème et à les expliciter aux élèves. Elle semble par ailleurs avoir une certaine lisibilité sur la résolution du problème. Elle est loin du temps (2019) où elle expliquait : « Je ne voyais même pas moi-même où je devais aller et ce qu'il fallait conclure » (cf. annexe 16, questions 1 et 2).

La dernière expérimentation sur le problème de la Grille (mai 2022) confirme les progrès de l'enseignante – elle connaît les enjeux du problème et elle a conduit sa séance selon ces objectifs, qu'elle a explicités aux élèves. En l'occurrence, quand les élèves sont capables de réinvestir leurs connaissances pour argumenter sur la validité de certaines grilles ou quand deux élèves expliquent leur raisonnement pour prouver que le nombre maximal cherché ne peut être plus grand que 10. La qualité d'écoute, le respect du temps de parole, et leur implication indiquent que la plupart des élèves a compris les moyens de preuve exposés, et, les enjeux du problème (cf. partie 4.1.8). Ce sont deux moments où les élèves ont une responsabilité scientifique.

5.2.4 Et les élèves ?

Nous essayons, à travers le deuxième entretien individuel, d'amener l'enseignante à porter un regard distancié sur sa pratique et de décrire les impacts sur les élèves.

Tout d'abord l'enseignante décrit la façon dont elle a intégré le débat dans sa pratique : « ça a changé ma façon de travailler. On fait des mathématiques et c'est riche au niveau des échanges. Je les utilise aussi dans d'autres domaines » (cf. annexe 15, question 2).

Elle met en évidence le fait que la progression des problèmes a favorisé ses progrès dans l'institutionnalisation : « on connaît mieux les objectifs travaillés par problème et c'est plus facile de mener l'institutionnalisation » (cf. annexe 15, question 1).

L'enseignante valorise également l'impact du débat sur les apprentissages des élèves dans plusieurs domaines – les conduites discursives, les compétences langagières et le vivre ensemble – qu'elle explicite ainsi : « une meilleure ambiance et cohésion de classe, beaucoup plus de respect de la parole de l'autre, de l'écoute et l'acceptation d'idées différentes de la sienne, développement de l'argumentation, de l'expression orale, de l'esprit critique » (cf. annexe 15, question 3).

L'enseignante identifie par ailleurs trois profils types d'élèves, susceptibles d'évoluer au fil de l'année grâce au débat mathématique : « Cette année, quand nous avons fait un débat mathématique avec les problèmes, j'ai constaté les élèves qui participent (ce n'est pas du tout la majorité), ceux qui écoutent (une bonne majorité) et il y a ceux qui écoutent et qui essaient de rentrer dans l'échange mais restent timides. [...] Le débat devient de plus en plus intéressant au fur et à mesure que l'année avance. En début d'année, c'est très timide, les élèves n'osent pas prendre la parole, il faut souvent les relancer. Alors qu'à la fin de l'année, c'est difficile de l'arrêter et l'argumentation est beaucoup plus développée » (cf. annexe 15, question 3). C'est tout à fait ce que l'on observe sur la dernière expérimentation du problème de la Grille en mai 2022 : des élèves très impliqués, enclins à prendre la parole devant la classe (même certains élèves en difficulté) pour valider, justifier, expliquer, débattre.

5.3 Conclusions

L'enseignante progresse au fil des expérimentations de manière significative dans la gestion du débat scientifique. Particulièrement sur le rythme du débat qu'elle parvient à ralentir ; sur sa neutralité ; sur le contenu de la mémoire des idées fortes de la classe qu'elle enrichit au fil de la résolution et à partir de laquelle elle met en avant ce qui est vrai et ce qui est faux en impliquant les élèves ; sur les types d'interaction qu'elle a fait évoluer de dialogues entre élève et enseignant vers des interactions entre élèves ou entre enseignant et la classe. Elle progresse un peu dans la réalisation de l'institutionnalisation grâce à la progression de problèmes, comme elle l'a évoqué. Elle semble désormais mieux comprendre la nécessité de l'institutionnalisation tandis qu'au début du projet elle la réalisait sans en connaître vraiment l'enjeu. Par ailleurs, l'enseignante observe des progrès chez ses élèves dans plusieurs autres domaines. Ses progrès ont un impact sur les apprentissages de ses élèves.

Nous pouvons faire l'hypothèse que ces changements ont été favorisés par les deux outils développés pour les enseignants, à savoir, la progression de problèmes et le tableau de progression. De ces changements observés, nous pouvons répondre à notre problématique, à savoir que l'enseignante réussit la dévolution de la responsabilité scientifique à la classe. Elle parvient à instaurer un climat favorable au débat scientifique pour permettre aux élèves d'exprimer librement leurs idées et les valider, et entrer dans le processus de preuve. Elle est capable de désigner les enjeux du problème et conduire la mise en œuvre de la démarche de résolution en fonction de ces objectifs. Cependant, elle ne procède pas encore à l'institutionnalisation des connaissances visées de manière systématique.

Ces évolutions sont cohérentes en partie avec les objectifs que l'enseignante s'étaient fixés dans le tableau de progression : le débat mathématique pour la validation en niveau 4 et l'institutionnalisation avec une trace écrite, en niveau 4.

5.4 Limites et perspectives

Notre étude a révélé la possibilité de faire évoluer les conceptions d'une enseignante par rapport à une pratique adéquate de la recherche et de la preuve en classe. Néanmoins, cette étude nécessite d'être prolongée et étoffée. En effet, le recueil des données devra être mieux organisé. Il est nécessaire de définir au préalable ce qui va être observé et dans quel but, de manière à améliorer la qualité de nos données. Il serait également pertinent de réaliser plusieurs études de cas pour affiner la grille de critères et indicateurs et mieux comprendre comment les enseignants s'emparent de nos outils, afin de les évaluer et les optimiser. Nos collègues du LéA nous ont déjà soumis quelques suggestions à cet égard. Par ailleurs, le travail sur la conclusion et l'institutionnalisation devra être enrichi au niveau de l'observation et du feedback aux enseignants sous forme de bilan de séance, par exemple.

Ce travail de recherche m'a passionnée car j'ai pu m'immerger dans le monde réel de la classe de C., par le biais des vidéos, et, apprécier ses progrès et les impacts sur les apprentissages des élèves. Cela fut très motivant pour notre travail de recherche, mais aussi ma propre pratique. C'est pourquoi je souhaiterais poursuivre notre étude, pour l'enrichir sur le plan des résultats mais également collaborer avec mes collègues enseignants.

Bibliographie

Arsac, G. (1992). L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique. Vol.12.1, 7-32. Recherches En didactique des Mathématiques.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). Les pratiques du problème ouvert (SCEREN-CRDP Académie de Lyon). Canopé CRDP de Lyon.

Artigue, M. (2018, janvier 12). Démarche d'investigation, problèmes ouverts, ...recherche didactique : Une perspective historique. Colloque organisé par l'Académie des sciences en collaboration avec la Fondation La main à la pâte et le réseau des IREM. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. https://public.weconext.eu/academie-sciences/2018-12-12/video_id_001/index.html.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics. Hal-01619264. <https://hal.science/hal-01619264v1/document>.

Balacheff, N. (2018). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.

Black, P. J., & William, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. 21(1), 5-31.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique.

Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z., & Da Ronch, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. Third conference of the national Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM), 12-19 septembre 2020.

Third conference of the national Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM), 12-19 septembre 2020.

Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. 7/2, 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitive de la pensée. 5, 37-65.

Gandit, M., Gravier, S. & Mossuz, L. (2022). L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques du cycle 1 au cycle 3. Hal-04818426. <https://hal.science/hal-04818426v1>.

Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. <https://doi.org/10.4000/ree.7513>

Gandit, M., Giroud, N., & Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe : Un modèle de situation pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. ENS Lyon.

Georget, J. P. (2010). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Université Paris Diderot 7.

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. Actes du séminaire national de l'ARDM, 161-170.

Grenier, D., & Payan, C. (2002). Situations de recherche pour en « classe » Essai de caractérisation et proposition de modélisation. Actes du séminaire national de l'ARDM.

Harlen, W. (2013). Evaluation et pédagogie d'investigation dans l'enseignement scientifique : De la politique à la pratique (IAP Le Réseau mondial des Académies des sciences).

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. IREM de Grenoble, 10, 123-159.

Lepareur, C., Gandit, M., & Grangeat, M. (2019). Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : Une étude de cas. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021829/file/Evaluation_Formative_DI_ED.pdf

MEN. (2002). Document d'accompagnement des programmes. <http://www.arpeme.fr/documents/42937996EF23426F3D71.pdf>

MEN. (2020). BO Education Nationale numéro 31 du 30 juillet 2020 cycle 2, cycle 3, cycle 4. Education Nationale.

https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/88/5/ensel714_annexe1_1312885.pdf

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. 73, 6-34.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. https://www.researchgate.net/publication/232913077_Le_systeme_complexe_et_cohereant_des_pratiques_des_enseignants_de_mathematiques_Une_double_approche

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. RDM, 25(1), 57-90.

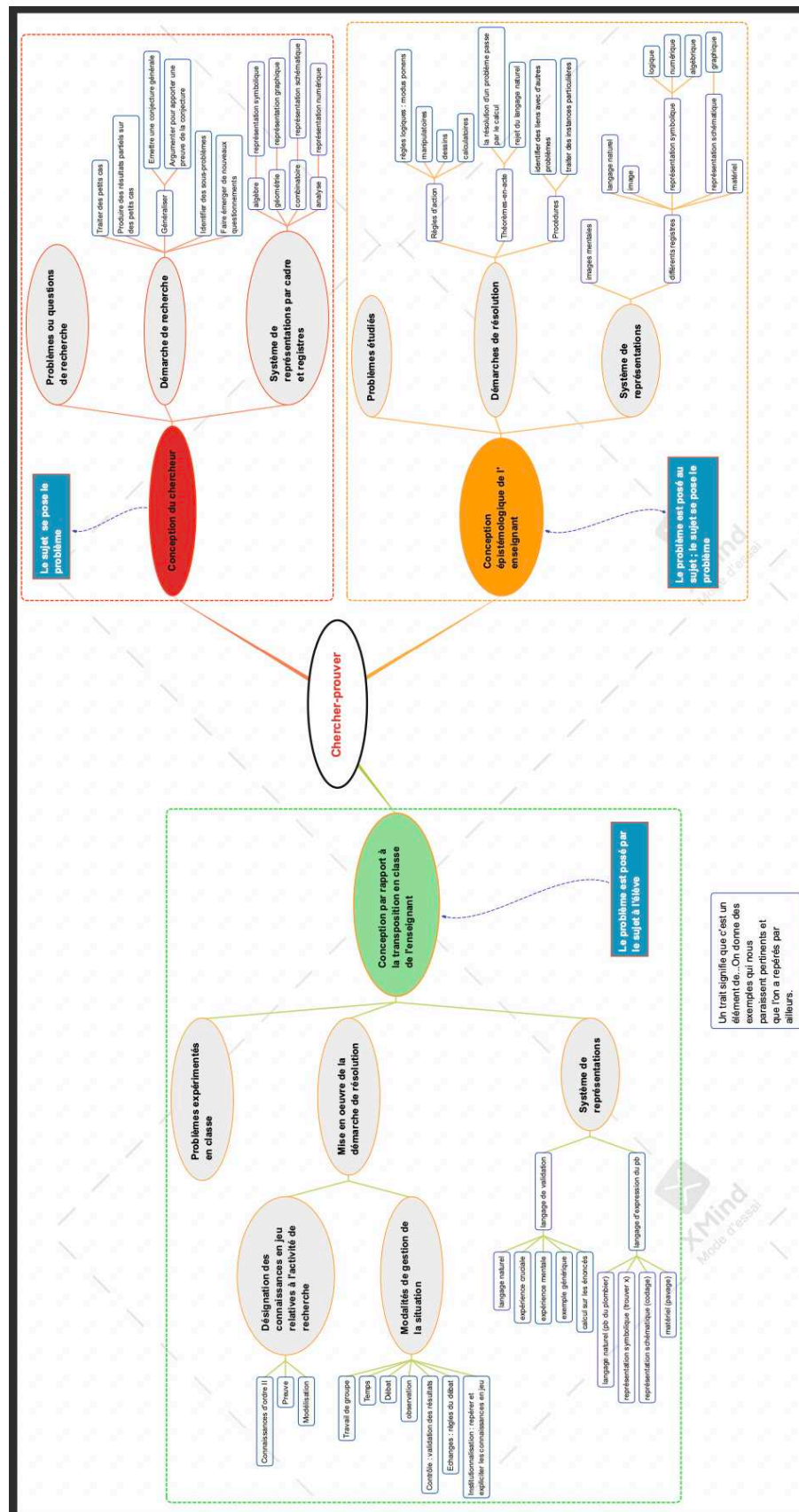
Torossian, C., & Villani, C. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. RDM, 10/2.3.

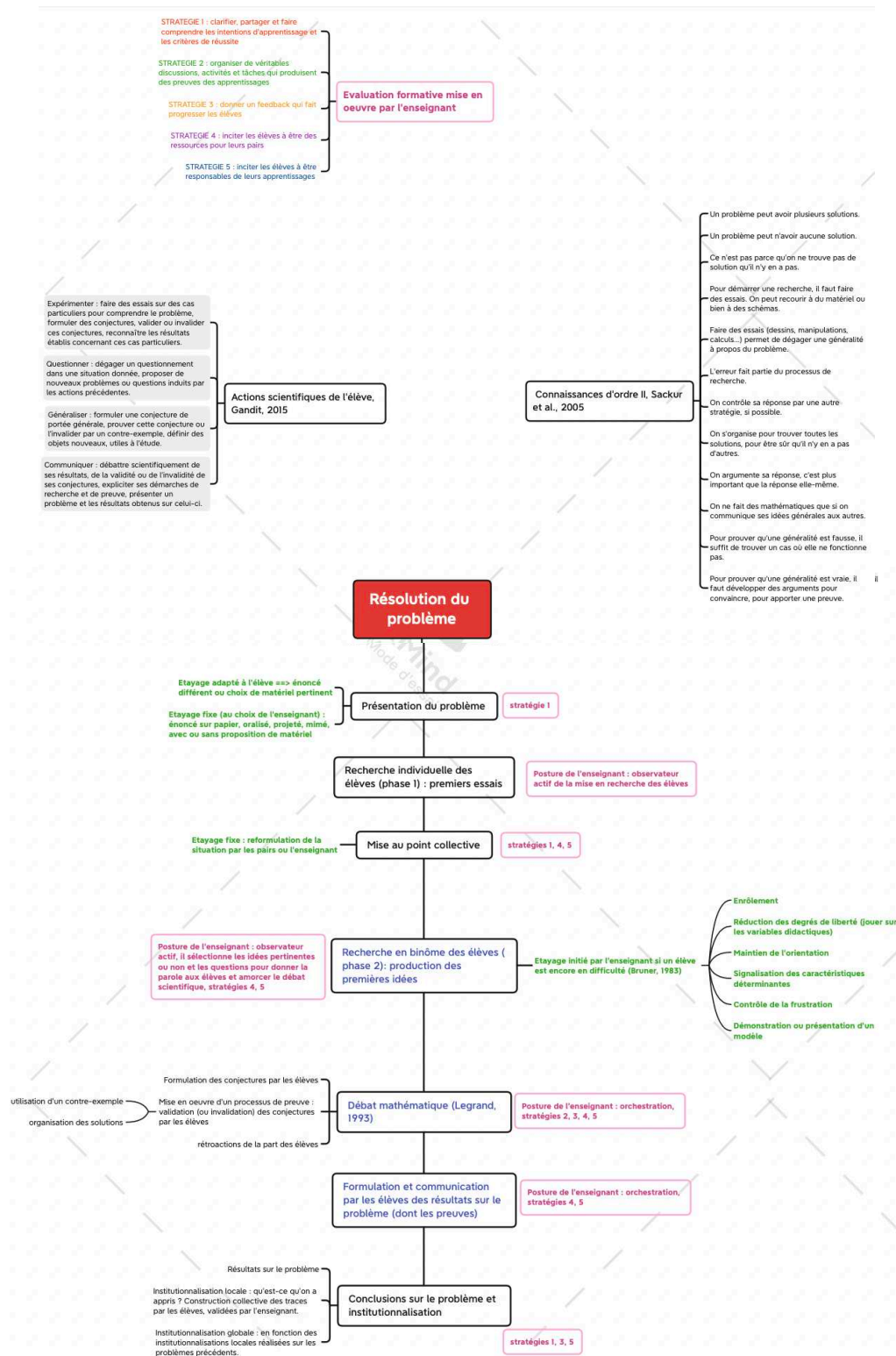
Sommaire des annexes

- ANNEXE 1 : Modèle des conceptions de l'activité de recherche et de preuve
- ANNEXE 2 : Cartographie d'une transposition « idéale » du « chercher-prouver »
- ANNEXE 3 : Tableaux des critères du débat, de la conclusion du problème et de l'institutionnalisation
- ANNEXE 4 : Tableau de progression
- ANNEXE 5 : Tableau récapitulatif des modalités de séances sur les huit expérimentations
- ANNEXE 6 : Tableau I critères/indicateur pour le problèmes des Billets 01.2019
- ANNEXE 7 : Tableau II critères/indicateur pour le problèmes de la Grille 03.2019
- ANNEXE 8 : Tableau III critères/indicateur pour des Diagonales 05.2019
- ANNEXE 9 : Tableau IV critères/indicateur pour le problèmes des Nombres 01.2020
- ANNEXE 10 : Tableau V critères/indicateur pour le problèmes des Albums photos 01.2021
- ANNEXE 11 : Tableau VI critères/indicateur pour le problèmes des Gommettes 2021
- ANNEXE 12 : Tableau VII critères/indicateur pour le problèmes du Carrelage de la Salle de Bain 2021
- ANNEXE 13 : Tableau VIII critères/indicateur pour le problèmes de al Grille 05.2022
- ANNEXE 14 : Premier entretien individuel de Caroline sur le problème des Gommettes mai 2022
- ANNEXE 15 : Deuxième entretien individuel de Caroline au mois de mai 2022
- ANNEXE 16 : Troisième entretien individuel de Caroline au mois de juin 2022

ANNEXE 1 : Modèle des conceptions de l'activité de recherche et de preuve



ANNEXE 2 : Cartographie d'une transposition « idéale » du « chercher-prouver »



ANNEXE 3 :

Tableaux des critères du débat scientifique et tableau de critères de la conclusion du problème et de l'institutionnalisation (modèle)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves		
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/ autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation		
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)	
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant		
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves		
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas	
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons		
CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence d'une trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée

ANNEXE 4 :

Tableau de Progression

Note : P représente l'enseignant-e

Indicateurs de niveau de chacune des actions de l'enseignant au cours de la mise en œuvre de la résolution du problème				
Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs Stratégie 1	P a pour seul objectif que le problème soit résolu.	P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, mais n'en tient pas particulièrement compte dans la mise en œuvre.	P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, Il conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves.	P conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves et le formalise dans une trace écrite.
Observation des actions des élèves Stratégies 3, 4, 5	P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe) et intervient sur le problème, en guidant vers sa résolution.	P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe). Il met en place un étayage, fixe ou adapté, influençant les représentations qu'ont les élèves du problème.	P relève, dans les actions des élèves, des indicateurs pour anticiper une mise au point collective ou un étayage adapté ou le démarrage du débat. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs.	P relève, dans les actions des élèves, des indicateurs pour anticiper le démarrage du débat. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs : il renvoie le questionnement à l'élève ou au groupe classe. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs.
Débat mathématique - validation Stratégies 2, 3, 4, 5	Tous les élèves présentent leurs productions. P valide ou invalide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P anticipe la mise en commun par un classement des productions des élèves suivant les stratégies de résolution ou leur validité. Les élèves présentent leurs productions, que P valide ou invalide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures. P favorise des rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. Mais c'est P, qui, finalement valide ou rejette les conjectures.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures. P favorise des rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. P incite les élèves à être responsables de leurs propositions. Les conjectures avec leurs preuves acquièrent le statut de résultats mathématiques.
Conclusion sur le problème et Institutionnalisation Stratégies 1, 3, 5	Aucune institutionnalisation n'est prévue. P conclut la recherche autour du ressenti des élèves.	P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème.	P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème et il réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve : qu'a-t-on appris ?	P organise une présentation par les élèves des résultats du problème sur le problème. P réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve : qu'a-t-on appris ? L'institutionnalisation fait l'objet d'une trace écrite. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en développant l'auto-évaluation.

ANNEXE 5 :

Tableau récapitulatif des modalités de séances sur les huit expérimentations

Modalités des huit expérimentations					
	Temps de recherche individuelle	Temps de recherche en groupe	Débat-Validation des conjectures	Conclusion	Institutionnalisation locale
Pb des Billets 01.19	2:00	20:00	Durée de la phase collective : 17:00		
			16:00		1:00
Pb de la Grille 03.19	3:00	20 : 00	14:00		
			12:00	2:00 faite par JC	
Pb des Diagonales 05.19	Séance 1 : 5:00	Séance 1 : 20:00 Séance 2 : 30:00	Durée de la phase collective (séance 1 + séance 2) : 27:00		
			Séance 1 : 11:00	Séance 1 : 2:00	
			Séance 2 : 14:00	Séance 2 : /	
Pb des Nombres 01.20	5:00 par problème	Séance 1 : 20:00 Séance 2 : 20:00	Durée de la phase collective (séance 1 + 2) : 19:00		
			Séance 1 : 9:00	/	/
			Séance 2 : 10:00		

	Temps de recherche individuelle	Temps de recherche en groupe	Débat-Validation des conjectures	Conclusion	Institutionnalisation locale
Pb Albums photos 01.21	Séance 1 : 15:00	Séance 1 : 23:00	Durée de la phase collective (séance 1) : 15:00		
			10:00		5:00
Pb des Gommettes 2021	Séance 1 6:00	Séance 1 : 25:00	Durée de la phase collective (séance 2) : 21:00		
			20:00		1:00
Pb de la SDB 2021	Séance 1 5:00	Séance 1 : 20:00 Séance 2 : 8:00	Durée de la phase collective (séance 2) : 30:00		
			25:00	5:00	/
Pb de la Grille 05.22	Séance 1 : 5:00	Séance 1 : 30:00	Durée de la phase collective (séance 2) : 23:00		
			Communication sur le problème à la classe 8:00	15:00	

ANNEXE 6 : Tableau critères/indicateur pour le problèmes des Billets 01.2019 Tableau I

Problème des Billets - janvier 2019 (A)				
PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION				
Temps de la vidéo : 17:12				
Temps 1 : présentation des solutions des groupes : 9:44				
Temps 2 : débat autour du questionnement « y-a-t-il plus de solutions ? 9:44 - 16:01				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
Temps 1 :	Résultats d'élèves : les solutions pour faire 200 euros	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation en fonction du nombre de solutions trouvées	Par P et parfois les élèves Groupe 1 : P Groupe 2 : P Groupe 3 : P + élèves Groupe 4 : élève	
Temps 2 :	C1 : « Est-ce qu'on est sûr qu'il n'y a que ces 4 possibilités »		Non validée	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/ en difficulté)
Temps 1 :	X	2 interactions : 1 élève intervient au tableau pour aider celui qui présente + 1 autre de la classe fait de même		
Temps 2 :	X	Non		
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
			X	
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
Temps 1 :		P demande l'avis à la classe : « Est-ce que vous êtes d'accord avec cette solution, est-ce que vous l'aviez trouvée ? »	Ceux qui présentent leurs résultats au tableau : 5	
Temps 1 :			P demande : « Est-ce que les deux autres groupes vous avez trouvé 4 possibilités et les mêmes ? »	
Temps 2 :		« Alors maintenant, il faudrait prouver qu'on n'a pas plus de solutions. »		
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau
	Non	Non	Non	Oui, P accroche les résultats des groupes
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons	
Temps 1 :	/	/	/	
Temps 2 :	P relance le débat avec une nouvelle question : « Il faudrait prouver qu'on n'a pas plus de solutions »		Oui, P clôt le débat pour essayer de faire l'institutionnalisation	

P représente l'enseignant(e)

Problème des Billets - janvier 2019 (B)					
CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée
Incomplète car il manque l'organisation des solutions	Non, formulation orale par P	Oui P reformule : « Voilà, il ne faut pas rester sur une seule possibilité mais qu'il peut y avoir plusieurs solutions »	Oui	Oui	1 : 00

ANNEXE 7 : Tableau critères/indicateur pour le problèmes de la Grille 03.2019

Tableau II

Problème de la Grille - mars 2019 (A)				
PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Temps de la vidéo : 13:49				
Temps 1 : exposition des grilles 6:33				
Temps 2 : tentative de basculement vers le raisonnement 6:33-12:05				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
Temps 1 :	3 résultats de groupes d'élèves : grilles à 10, 9, 8	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation en fonction du nombre de points placés ; du plus grand au plus petit	Grille à 10 : invalidée par 1 élève qui montre un alignement de 3 points et P Grille à 9 : validée par certains élèves et par P. Grille à 8 : invalidée par P à cause de la grille à 9.	
Temps 2 :	Conjecture sur le nombre maximal de points		Validée par une élève	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)
Temps 1 :	X			1 élève leader très impliqué
Temps 2 :	X			
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
Temps 1		X		
Temps 2		X		
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
Temps 1 :	2		Ceux qui présentent : 2	
Temps 2 :	4			
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau
Temps 1 :	P reformule à l'oral mais sans vérifier si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas			Oui avec une grille vierge projetée
Temps 2 :	Non	Non	Non	Non
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons	

Problème de la Grille - mars 2019 (B)					
CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
X	Non	Oui : On a prouvé que la réponse c'est 9 ou 10. Alors on n'a pas tout à fait terminé... car entre 9 et 10, on n'a pas trouvé la réponse... alors il faudrait trouver une preuve, soit que c'est 9, soit que c'est 10.	Par le collègue de l'IREM	Non, par le collègue de l'IREM	2:00
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence d'une trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P	Durée

ANNEXE 8 : Tableau critères/indicateur pour des Diagonales 05.2019

Tableau III

Pb des diagonales - mai 2019 - séance 1 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Séance 1 / temps de la vidéo : 12:58				
Temps 1 : préparation d'une conclusion intermédiaire de la recherche 1:40 (cf. Tableau B)				
Temps 2 : présentation au tableau des productions par les élèves : 1:40 - 12:58				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
			Conjecture : invalidée par un contre-exemple d'un élève	
	Conjecture + Démarche des élèves	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation : elle sollicite les élèves en difficultés, sauf la dernière	Démarche 2 : organisation du nombre de diagonales en fonction du nombre de côtes : 3,4,5,6. P valide. Démarche 3 : utiliser les couleurs pour s'organiser. P valide Conjecture générale invalidée par l'élève elle-même	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/ en difficulté)
	X	1		1 élève leader tres implique
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
			X	
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
			Ceux qui présentent : 3	
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau
	Non	Non	Non	Oui, P projette les résultats des élèves
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons	

Pb des diagonales - mai 2019 - séance 2 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Séance 2 / temps de la vidéo : 22:40				
Temps 1 : préparation des affiches en groupe. 10:00				
Temps 2 : présentation des solutions de chaque groupe 12:00				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
	Gpe 1 : résultat (poly 7 côtes) Gpe 2 : conjecture Gpe 3 : conjecture Gpe 4 : conjecture Gpe 5 : résultat (poly 8 côtes)	Les groupes plus à l'aise	Gpe 1 : non Gpe 2 : non Gpe 3 : non Gpe 4 : non (mais il y a un élément juste) Gpe 5 : validé par P et les élèves sur le dessin avec les diago en couleurs	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/ en difficulté)
	X			
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
			X	
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
			Ceux qui présentent : 5 Pour la validation du	
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas
	Non	Non	Oui	Oui
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons	

P représente l'enseignant(e)

Pb des diagonales - mai 2019 - séance 1 (B)

CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION Séance 1					
Préparation d'une conclusion intermédiaire de la recherche de la veille 1:40					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P ou par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Conclusion partielle	Non, juste formulée oralement	Oui, d'un résultat intermédiaire : « trouver le nombre de diagonales d'un polygone quand on connaît le nombre de sommets.	P sollicite les élèves mais en reformulant.	Oui	1:40
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée

P représente l'enseignant(e)

ANNEXE 9 : Tableau critères/indicateur pour le problèmes des Nombres 01.2020

Tableau IV

Problème des Nombres - variante pb des billets - janvier 2020 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION					
Séance 1 / temps de l'enregistrement : 9:04					
Présentation des solutions trouvées par les élèves telles que la somme des chiffres est égale à 4					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves		
	Résultats : démarche et nombre de solutions R1 : 4 R2 : 7 R3 : 8	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation en fonction du nombre croissant de solutions	R1 : oui par P R2 : oui par P R3 : oui par P		
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation		
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)	P avec la classe ??
	X				
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant		
			X		
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves		
			Ceux qui présentent + Quelques élèves interviennent spontanément		
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas	
	Reformule à l'oral en respectant les arguments des élèves			Oui pour accrocher ou écrire les solutions	
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons		

Problème des Nombres - variante pb des billets - janvier 2020 (A2)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION					
Séance 2 / temps de l'enregistrement : 9:38					
Présentation des solutions trouvées par les élèves telles que la somme des chiffres est égale à 6					
Temps 1 : présentation de l'élève 5:33					
Temps 2 : basculement sur une recherche collective 5:33 - 9:38					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves		
Temps 1	Résultat : démarche de recherche et nombre de solutions : 27	Oui P présente une solution pour mettre en avant l'organisation de la démarche	Oui par P et les élèves		
Temps 2	Nouvelle conjecture : peut-on trouver d'autres solutions ?		Non : juste une solution à 32 mais qui ne semble pas partagée par tous les élèves		
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation		
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)	
Temps 1	X				
Temps 2	X				
Temps accordés aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant		
Temps 1			X		
Temps 2		X			
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves		
Temps 1			Quelques élèves interviennent spontanément		
Temps 2	X				
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau	
Temps 1	Relit les solutions de l'élève qu'il écrit au tableau.		Oui	Oui	
Temps 2	Non				
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons		
Temps 2	Non, pourtant sur la fin de séance, il semble que la recherche stagne et soit dans un huit clos entre P et quelques élèves	Non	Oui : atteinte de 32 solutions		

ANNEXE 10 :

Tableau critères/indicateur pour le problèmes des Albums photos 01.2021

Tableau V

Pb des albums photos - variante du pb des Billets - janvier 2021 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Séance 1 / temps de l'enregistrement : 13:46 exposition des solutions : 9:53					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves		
	Résultats de 3 groupes d'élèves : les différentes solutions pour faire 112	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation : selon le nombre de solutions	Oui, P et les élèves		
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation		
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/ en difficulté)	
	X				
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant		
			X		
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves		
		X	Les rapporteurs qui viennent au tableau : 3 + quelques élèves qui participent spontanément		
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau	
		Oui : les solutions validées		Oui	
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons		

Pb des albums photos - variante du pb des Billets - janvier 2021 (B)

CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION Séance 1 / temps de l'enregistrement : 9:53 - 13:46					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée
Pas complète	Non	Oui : un problème peut avoir plusieurs solutions Il manque l'organisation comme moyen de preuve.	Oui 1 élève trouve la cinquième solution	Oui	5:00

ANNEXE 11 : Tableau critères/indicateur pour le problèmes des Gommettes 2021

Tableau VI

Problème des Gommettes - 2021 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Séance 1 / durée : 20:00 environ				
Temps 1 : présentation de 3 solutions / 3 épisodes : 1:20 ; 1:16 ; 40 s				
Temps 2 : validation de la conjecture à 19- recherche d'une preuve de manière empirique /1 épisode : 4 : 51				
Temps 3 : étude de petits cas : 2, 3, 4, 5, 6 gommettes / 2 épisodes : 1:16 ; 37 s ;				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
Temps 1 :	Résultats d'élèves : 3	Oui, P a anticipé l'ordre de présentation en fonction du nombre croissant de carreaux	élève avec P, puis élèves	
Temps 2 :	1 conjecture	Oui	P	
Temps 3 :	Nouveaux questionnements	Oui	P + élève qui s'appuie sur un dessin au tableau (jusqu'à 3,4,5,6 gommettes)	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)
Temps 1 :	X			Elève très à l'aise
Temps 2 :	X	X		Temps 2 : Elève qui « a des façons de raisonner un peu surprenantes »
Temps 3 :	X	1 : une élève explique à un autre élève		
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
Temps 1 :		X		
Temps 2 :			X	
Temps 3 :			X	
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
Temps 1 :	1		Ceux qui présentent : 3	
Temps 2 :			1	
Temps 3 :		X		
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves.	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau
Temps 1 :	Non	Non	Non	Oui : P accroche les productions des élèves
Temps 2 :	Non P ne procède pas vraiment comme l'élève			Oui : essai de reproduire la démarche de l'élève
Temps 3 :			dessins des élèves pour 2, 3, 4, 5, 6 gommettes	Oui
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées.	P stoppe le débat pour le recadrer.	P a clôt le débat pour diverses raisons.	
Temps 1 :				
Temps 2 :				
Temps 3 :		P se perd en essayant d'amener les élèves à un raisonnement sur les petits cas, puis se reprend avec l'aide des chercheurs.		

Problème des Gommettes - 2021 (B)

CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION dernier épisode de la séance : 44 s ;					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P du contenu	Durée
	Non : formulation orale par les élèves	Oui : Les élèves donnent le résultat du problème : « on ne peut pas faire plus que 19, car quand on rajoute ça fait toujours + 3. » les élèves évoquent certaines des connaissances d'ordre II visées : « on a fait des essais, on a cherché, on a réfléchi, on a trouvé des réponses, on a vérifié ».	Oui	Oui	44 s

ANNEXE 12 :

Tableau critères/indicateur pour le problèmes du Carrelage de la Salle de Bain 2021 Tableau VII

Problème du Carrelage de la SDB - 2021 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION					
Episode 1 : 12:00 Temps 1 : P relève les conjectures des élèves C1,C2,C3,C4 Temps 2 : nouveau questionnement : nouvelles conjectures C4,C5 Episode de 10:00 Temps 3 : validation de la conjecture C3					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves		
Temps 1 :	conjectures : C1, C2, C3, C4	P relève les conjectures des élèves	Non pas validées		
Temps 2 :	C5 et C6	Nouvelles conjectures émergentes	Validées par les élèves		
Temps 3 :	C3	Oui, P la soumet aux élèves	Validées par P qui sollicite les élèves + 1 élève		
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation		
Temps 1 :					
Temps 2 :	X				
Temps 3 :					
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/header/en difficulté)	
Temps 1 :					
Temps 2 :	X	X			
Temps 3 :	X			1 élève à l'aise	

Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant		
Temps 1 + 2 :			X		
Temps 3 :		X			
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves		
Temps 1 :		X			
Temps 2 :			Ceux qui viennent valider au tableau : 3		
Temps 3 :		Presque toute la classe			
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves.	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas	
Temps 1 :	Oui		Non		
Temps 2 :			Oui : réalise le pavage sur la grille au tableau	Oui	
Temps 3 :	Oui		Non		
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées.	P stoppe le débat pour le recadrer.	P a clôt le débat pour diverses raisons.		

Temps de la vidéo : 4:56

*

C1 : « Il faut un nombre impair de carreaux pour y arriver »
 C2 : « Si un côté de la SDB a un nombre impair ça marche »
 C3 : « Si un côté de la SDB carré a un nombre pair, ça ne marche pas »
 C4 : « Tout dépend de l'emplacement du lavabo même pour un carré de côté impair. Exemple 5x5.
 C5 : « Avec le 3x3 ça ne marche pas »
 C6 : « Avec le 3x3 ça marche »

Problème du Carrelage de la SDB - 2021 (B)

CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Conclusion partielle numéro 1	Oui	C4 et C5 validées	Par les élèves	Oui	2:00
Conclusion partielle numéro 2	Oui	C3 validée : «si un côté de la salle de bain carré a un nombre pair ça ne marche pas»	Par P qui sollicite les élèves + 1 élève	Oui	3:00
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	En sollicitant ou pas les élèves	Validation par P	Durée

ANNEXE 13 : Tableau critères/indicateur pour le problèmes de al Grille 05.2022

Tableau VIII

Pb de la Grille - mai 2022 - séance 1 (A)

PHASE COLLECTIVE / DEBAT-VALIDATION Communication à la classe du problème de la grille Séance 1 / temps de la vidéo : 28:52				
Temps 1 : résumé de la recherche précédente (cf. Tableau B) Temps 2 : présentation des grilles validées ou non validées 7:15 à 16:22. Transition de 16:22 à 17:35—amorçage de la conclusion du pb Temps 3 : conclusion 17:35 - 28:52 (cf. Tableau B)				
CRITÈRES	INDICATEURS			
Organisation de la présentation des productions	Statut des productions : conjectures / résultats d'élèves / argument	Les productions des élèves sont présentées d'un coup, dans un ordre non anticipé par P, ou d'un coup mais l'ordre de présentation peut être argumenté par P	Les productions sont validées par P ou par les élèves ou, parfois par P, parfois par les élèves	
Temps 2 :	Résultats d'élèves (5 grilles) + arguments	P choisit des productions selon le nombre de points maximal (9 et 10) et la validité de la grille (valide et pas valide)	Par les élèves	
Engagement dans la validation	P procède à un vote (oui/non) à main levée sur la conjecture	P procède à un vote (oui/non/autre) à main levée sur la conjecture	P utilise une fiche pour engager les élèves dans la validation	
Interactions	P/élève	Elève/élève	Elève/Elèves	Elève particulier (à l'aise/leader/en difficulté)
Temps 2 :		X	X	1
Temps accordé aux élèves pour valider une conjecture	Aucun	Trop court	Suffisant	
			X	
Nombre d'élèves impliqués	Quelques élèves et toujours les mêmes	L'ensemble de la classe	Quelques élèves	
Temps 2 :			Ceux qui présentent : 5 + il y a aussi d'autres élèves non interrogés qui participent	
Respect des idées des élèves (vraies ou fausses)	P reformule par écrit les arguments proposés oralement par les élèves en leur demandant si c'est ce qu'ils veulent dire ou pas	P relève par écrit les arguments des élèves	Elève écrit ses arguments	P utilise le tableau ou pas
Temps 2 :	Reformule à l'oral en respectant les propos des élèves	Non	Non	Oui : P projette les grilles
Recadrage du débat en cas de glissement dans une impasse	P fait des remises au point appropriées	P stoppe le débat pour le recadrer	P a clôt le débat pour diverses raisons	
Temps 2 :	Oui, 1 fois : elle relance le débat en essayant d'amener les élèves vers la conclusion du débat			

Pb de la Grille - mai 2022 - séance 1 (B)

CONCLUSION SUR LE PROBLÈME - INSTITUTIONNALISATION					
Temps 1 : résumé de la recherche précédente Temps 3 : conclusion 17:35 - 28:52					
CRITÈRES	INDICATEURS				
Organisation de la conclusion du problème	Présence ou pas d'une trace écrite organisée du résultat sur le problème (conjectures et preuves)	Récapitulation des résultats sur le problème (conjectures et preuves) à l'oral.	Par les élèves ou par P, ou, par P qui sollicite les élèves	Validation par P des résultats du problème	Durée
Temps 1 : Conclusion intermédiaire numéro 1 sur le processus de résolution du problème	P s'appuie sur la trace écrite d'un résultat partiel : encadrement du nombre maximum de points : 1-M<10 (strict)	Oui : récapitulation des étapes du processus de validation : Recherche Hypothèses Débat. Vérifier la validité des grilles Valider	Par P qui sollicite les élèves	Oui	
Temps 3 : Conclusion sur les moyens de preuves	Les élèves s'appuient sur les traces de la recherche précédente pour formuler à l'oral : preuve 1 : décrite par l'élève, raisonnement 2x5=10. Preuve 2 : elle cherche à minorer le majorant : M qui doit être dans la table de 5. Maximum 25, puis 15, pas possible puis 10.	Oui, deux moyens de preuve	Par les élèves	Oui, lors de la séance précédente.	11:00
Organisation de l'institutionnalisation locale	Présence de trace écrite	Adéquation avec les connaissances visées	P sollicite les élèves ou pas	Validation par P	Durée

ANNEXE 14 :

Premier entretien individuel de Caroline sur le problème des Gommettes mai 2022

Premier entretien individuel sur le problème des Gommettes, le 2 mai 2022

Question 1 sur épisode 1 : avais-tu prévu de présenter le problème ainsi ? Pourrais-tu expliquer ton objectif et en quoi cela est pertinent pour toi ? Le choix du matériel a-t-il été anticipé ? Pourquoi as-tu choisi les feuilles à petits carreaux ?

Caroline : j'avais prévu ainsi. Je présente d'abord le matériel : gommettes et carrés puis la consigne. J'ai fait ainsi car en général il y a beaucoup de questions si on ne donne que la consigne et pas le matériel. C'est cela mon objectif : pour ne pas que les élèves se dispersent.
Au moment où j'ai donné la consigne : j'ai entendu « ah », c'est-à-dire que les élèves avaient compris, donc cela a pas trop mal fonctionné.
Les feuilles à petits carreaux c pour construire les carrés facilement et avoir une trace des recherches.

Question 1-2 : tu expliques le déroulement de la séance : recherche individuelle puis en groupe. Est-ce une modalité usuelle pour la résolution de ce type de problèmes ? Quels sont tes objectifs ?

Caroline : pour ce type de problème IREM, je prévois une phase de recherche individuelle puis en groupe. C'est très bien pour permettre aux élèves de se lancer dans la recherche, de s'approprier le problème, de les faire reformuler pour amorcer la recherche...

Question 1-3 : on ne voit pas la phase de recherche. Pourrais-tu commenter tes actions lors des phases de recherche individuelle et en groupe des élèves ?

Caroline : pour la recherche en groupe, je ne prépare pas la composition des groupes, c'est parfois hétérogène, selon affinités, selon le placement aux tables. Pendant la phase de recherche, je passe d'un groupe à l'autre, j'observe....pas de discussions'il y a une question j'y vais sinon je les laisse.

Question 2 sur les épisodes 2 et 3 : comment as-tu choisi les solutions intermédiaires à 14 et 18 carreaux ? Y en avait-il d'autres ?

Caroline : j'ai choisi l'ordre des solutions de la plus petite à la plus grande pendant le travail de groupe. Concernant la formulation, il n'y a pas beaucoup d'explications. Lorsque je pose la question : « est-ce le maximum », c'est pour aller vers les solutions des autres groupes et enchaîner dans la recherche.

Pour la solution à 14 : les élèves qui présentent leur solution au tableau ne donnent que le nombre de gommettes. Ce sont les autres élèves du groupe classe qui ont validé : en disant que les contraintes étaient respectées : une élève dit qu'il y a le bon nombre de gommettes.

La deuxième contrainte, c'est moi, ah oui, quand on déplace l'assemblage, tout vient ensemble.

La solution à 18 est présentée par deux élèves mais c'est Justin, un élève du groupe classe qui valide par le nombre de gommettes et le fait qu'ils sont tous attachés.

Question 4 sur épisode 4 (solution de Maximus) : pourrais-tu commenter cet épisode 4 sur le plan de la formulation ?

Caroline : Maximus présente sa solution et la valide au tableau. Il est clair, précis. Cela fait aussi la troisième solution qu'on présente. Pas de participation du groupe classe.

Question 5 sur l'épisode 5 (solution de Jules) : pourrais-tu commenter cet épisode 5 sur le plan de la formulation ?

Caroline : c'est une catastrophe....il aurait dû prendre en main le tableau numérique avec le stylet mais je le fais moi-même. J'ai pris la main car Jules est dans son monde rêveur, et je voulais l'aider. Personne ne comprend comment Jules procède. Il se perd.... puis à la fin il reprend la main et parvient à expliquer son raisonnement.
Il a eu seul cette idée !

Question 5-2 : qu'est-ce que c'est pour toi une solution ? Quels aspects ressortent lors des échanges avec le groupe classe ? Comment se passe la validation ?

Caroline : je pense que la classe a compris la démarche de Jules car il l'a bien expliqué à la fin. La validation de la solution de Jules n'est réalisée ni par Jules ni par la classe car c'est le nombre maximal de carreaux trouvés? Mais on aurait dû, car je sais mais pas les élèves.

Question 6 sur épisode 6 : tu poses la question : « est-il possible de faire plus ? » Quel est ton objectif à ce moment de la séance ?

Caroline : c'est la première fois que je faisais ce problème avec les élèves et le fait que je pose la question avec 50 carreaux c'est spontané. J'ai pensé au problème de la grille. Mais je ne l'avais pas envisagé et donc je suis perdue.

Questions 7 sur épisode 7 + épisode 7bis : tu poses la question « et si vous essayez avec deux gommettes, dans la logique de Jules, on pourrait assembler combien de gommettes ? » Les élèves proposent 8, puis 7. Quelle analyse peux-tu faire sur la validité des raisonnements proposés par les élèves ?

Caroline : je pars avec 2 gommettes, c'est une idée suggérée par Michèle : combien peut-on assembler de carreaux ? Une élève répond 7 et vient représenter les 7 gommettes au tableau, mais personne ne valide.
Un autre élève n'est pas d'accord et vient dessiner 8 carreaux pour les 2 gommettes, mais une autre élève intervient et lui explique que tout ne bouge pas ensemble.
Puis les élèves semblent valider les 7 carreaux pour 2 gommettes. Mais j'ai oublié le « pas plus que ».

Question 8 sur épisode 8 : peux-tu commenter la conclusion du problème ?

Caroline : ils ont bien compris : faire des essais, chercher. On a trouvé une solution à 19, mais pour moi on n'a pas fini car elle n'est pas validée.

ANNEXE 15 : Deuxième entretien individuel de Caroline au mois de mai 2022

Deuxième entretien individuel de l'enseignante le 5 mai 2022

Question 1 : que t'apporte la progression de problèmes ?

Caroline : on connaît mieux les objectifs travaillés par problème et c'est plus facile de mener l'institutionnalisation. Avant tu suivais la fiche, mais je comprenais pas vraiment pourquoi. Je voyais que c'était une nouvelle façon de travailler, mais ça m'a demandé beaucoup de temps. La progression elle aide pour évoluer. Par exemple pour le problème des Billets, on attend des solutions mais pour le problème de la Grille on est plutôt dans des compétences transversales : raisonner, verbaliser : mettre des mots, savoir expliquer.

Question 2 : que peux-tu dire sur le débat ?

Caroline : ça a changé ma façon de travailler. On fait des mathématiques et c'est riche au niveau des échanges. Je les utilise aussi dans d'autres domaines. Je travaille beaucoup plus en groupe car c'est eux qui s'expriment, ils sont plus attentifs aux autres copains.

Le débat avec le groupe classe, c'est difficile sauf pour ceux qui sont investis. Ils ont l'attitude de chercher, trouver des hypothèses, argumenter. Ce sont souvent de très bons élèves. Les élèves en difficulté sont portés par les autres, ils essaient plus.

Dans le débat, je suis parfois pas assez en retrait, je parle trop, je dois essayer de plus solliciter les élèves.

Question 3 : concernant la façon dont on travaille le débat cette année, comment le vis-tu ? Quel est l'impact sur ta classe ?

Caroline : meilleure ambiance et cohésion de classe, beaucoup plus de respect de la parole de l'autre, de l'écoute et l'acceptation d'idées différentes de la sienne, développement de l'argumentation, de l'expression orale, de l'esprit critique.

Concernant les élèves qui ne participent pas, ils sont quand même dans l'écoute des échanges et peuvent se forger une opinion et participer au vote. Cette année, quand nous avons fait un débat mathématiques avec les problèmes, j'ai constaté qu'il y a les élèves qui participent (ce n'est pas du tout la majorité), ceux qui écoutent (une bonne majorité) et il y a ceux qui écoutent et qui essaient de rentrer dans l'échange mais restent timides.

Le débat devient de plus en plus intéressant au fur et à mesure que l'année avance. En début d'année, c'est très timide, les élèves n'osent pas prendre la parole, il faut souvent les relancer.

Alors qu'à la fin de l'année, c'est difficile de l'arrêter et l'argumentation est beaucoup plus développée.

Question 4 : tu évoques beaucoup le travail de groupe et son intérêt pour tes élèves... Comment le situes-tu par rapport au débat ?

Caroline : le travail de groupe permet plus d'entraide lors de la recherche. Parfois, il permet aux élèves plus faibles de rentrer dans le problème, une meilleure compréhension grâce à la recherche et aux échanges en petits groupes. De cela, en découle une meilleure écoute/attention lors du débat. Je pense que s'il n'y avait pas cette phase, les élèves faibles décrocheraient complètement lors du débat.

Question 5 : quels sont les impacts de cette pratique sur les élèves ?

Caroline : pour les bons élèves, ça les nourrit vraiment. Les élèves en difficulté, ça les motive aussi. Ils essaient plus, ils se lancent car il y a moins de pression par rapport à l'attente d'une solution. Ils peuvent se lancer dans de petits essais, être plus actifs. Ils aiment rejouer les mêmes problèmes !

Question 6 : pourrais-tu décrire l'apport personnel de ce travail avec l'IREM ?

Caroline : avec l'IREM, j'adore car je sais ce que je dois travailler au niveau de moi-même, dans le sens de ce que je peux apporter à mes élèves. MHM, je me lasse, je m'ennuie car la démarche est trop répétitive, il y a trop de rituels. [L'enseignante a choisi de tester cette méthode il y a deux ans]

ANNEXE 16 : Troisième entretien individuel de Caroline au mois de juin 2022

Troisième entretien individuel de Caroline juin 21 2022

Question 1 : pour le problème ds billets en 2019, te rappelles-tu si tu avais poursuivi le problème avec tes élèves ?

Caroline : non, je n'avais pas fait d'autres séances sur ce problème.

Pourquoi ? Tout simplement parce que c'était la première année de travail avec l'IREM et que je ne savais pas comment continuer. Je n'avais pas assez d'expérience / d'outils pour bien terminer et conclure le problème. C'était un peu flou pour moi.

Question 2 : Pour le problème des billets 2019, tu avais posé la question « Est-ce qu'on est sûr qu'il n'y a que ces quatre possibilités? » pour que les élèves apportent la preuve qu'il n'y a pas d'autres solutions ?

Caroline : je ne pense pas l'avoir fait, à cause de mon manque d'expérience comme pour le problème de la grille, je n'ai pas dû finaliser correctement ces problèmes.

En fait, pour les problèmes faits en 2019, mon manque d'expérience fait que j'avais beaucoup de difficultés à finaliser les problèmes. Je ne voyais même pas moi-même où je devais aller et ce qu'il fallait conclure. Je ne pensais pas encore aux conjectures, preuve, débat, De plus, en 2019, je ne faisais qu'une ou deux séances pour chaque problème donc pas d'aboutissement. Cette année, j'ai fait au moins 4 séances par problème.

Question 3 : pour le problème des albums photos (2021), as tu fait une autre séance pour aborder l'organisation des solutions afin d'amener les élèves à être sûrs qu'il n'y avait pas plus que cinq solutions ?

Caroline : là, c'est différent : pour les billets et l'album photo, après l'expérience de la première fois en 2019, je sais où aller donc oui, j'ai abordé l'organisation des solutions qui permet d'arriver à la preuve qu'il ne peut pas y avoir d'autres solutions possibles. Par contre, je ne me souviens plus du nombre de séances. Nous étions toujours dans la même démarche : recherche des solutions, organisation des différentes solutions trouvées, recherche d'autres solutions, preuve que toutes les solutions ont été trouvées.

Année universitaire 2021-2022

Master MEEF Pratique et Ingénierie de la Formation

Titre du mémoire :

« Enseigner la preuve à des élèves d'école primaire au sein d'un projet LéA »

Auteure : Laurence MOSSUZ

Résumé : est-il possible de faire évoluer les conceptions des enseignants par rapport à la pratique de la recherche et de la preuve en classe ? C'est l'objet de notre étude qui s'inscrit dans un projet au long cours qui, a émergé de la volonté d'un groupe d'enseignants d'améliorer leurs pratiques dans le domaine de la résolution de problèmes. Pour répondre aux besoins des élèves, nous nous focalisons sur les pratiques enseignantes. Il s'agit de rechercher des leviers susceptibles de soutenir les enseignants dans la mise en œuvre d'une pratique de la preuve, en tant que processus donnant toute sa place à la recherche et au débat scientifique dans la classe, les élèves exerçant une responsabilité scientifique. Nous avons investigué particulièrement deux dimensions de la pratique d'une enseignante : d'une part la dévolution de la responsabilité scientifique à la classe sur le plan de la démarche de recherche et de la validation des résultats, d'autre part, l'institutionnalisation des connaissances en jeu. Notre méthode consiste à observer sa pratique, notamment la gestion du débat scientifique et l'institutionnalisation, et, affiner nos observations grâce aux entretiens individuels. Nos résultats mettent en évidence des changements dans la pratique de l'enseignante dans ces deux dimensions, particulièrement dans la gestion du débat scientifique. Nous constatons également que les élèves progressent dans l'apprentissage de la preuve, les pratiques langagières et le vivre ensemble.

Mots clés : conception – preuve – débat scientifique – connaissances d'ordre II – chercher – conjectures – validation – progression de problèmes – processus – responsabilité scientifique – contrat didactique.

Abstract : is it possible to change teachers' conceptions of research and evidence practice in the classroom ? This is the purpose of our study, which is part of a long-term project, which emerged from the desire of a group of teachers to improve their practices in the area problem solving. To address the needs of students, we focus on the practices of teachers. We are looking for levers than can support teachers in the implementation of a practice of evidence, as a process that gives full place to research and scientific debate in the classroom with students exercising a scientific responsibility. We particularly investigated two dimensions of one teacher's practice : on the one hand, the devolution of scientific responsibility to the class in terms of the research process and the validation of the results, on the other hand, the institutionalization of the targeted knowledge. Our method is to observe her practice, namely the conduct of scientific debate and institutionalization, and refine our observations through the individual interviews. Our results highlight changes in the teacher's practice on both dimensions, especially the conduct of scientific debate. Moreover we note that students are progressing in the learning of evidence, language practices and living together.

Key words : conception – proof – scientific debate – knowledge of order II – research – conjectures – validation – progression of problems – process – scientific responsibility – didactic contract.