Mathématiques, mythe ou réalité,

un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique

Marc Legrand
Enseignant-chercheur
Institut J. Fourier Grenoble

Enseigner les mathématiques : ouvrir à une façon de penser le monde ou instruire sur un monde déjà pensé ?

Introduction : dans cet article, je développe essentiellement deux thèses qui s'articulent l'une autour de l'autre.

Thèse 1 *L'enseignement scientifique en général, et l'enseignement mathématique en particulier, ne peuvent à mon sens participer pleinement à une construction humanisante de la société que si les professeurs placent au cœur de leurs préoccupations l'initiation de leurs élèves à cette forme de sagesse qui consiste à retenir l'action immédiate pour préserver le temps de l'analyse, mettre à distance les schémas préétablis, refuser la force des évidences faciles, afin de se placer dans une position où l'on peut donner - ou redonner - du sens à ce qu'on entreprend.*

Or, contrairement à ce que laissent entendre les petites phrases du type : "en posant x = …, en considérant l'énoncé T …, il devient clair…, il est évident…, on montrera trivialement que… " etc., locutions fréquentes chez les mathématiciens, il me semble que la plupart des démarches adoptées en mathématiques ne sont ni faciles à inventer, ni évidentes à comprendre sur le champ dans ce qu'elles ont de profond; souvent, derrière une forme très dépouillée, se cache une construction élaborée qui n'a rien à voir avec une mise en symbole immédiate de la pensée naturelle.

Thèse 2 *C'est précisément lorsque les mathématiques ne prétendent plus être le modèle naturel et parfait de l'organisation du monde, lorsqu'elles cessent d'être le symbole même de "la vérité", de la rigueur absolue, mais se présentent davantage comme une construction erratique pour comprendre, un moyen parmi d'autres de donner du sens à "la réalité", qu'elles acquièrent le plus de consistance : c'est alors une façon de poser les problèmes dans laquelle il est plus facile qu'ailleurs de déceler ses erreurs.*

Ces mathématiques-là sont pour le chercheur un moyen irremplaçable d'intelligibilité du monde; je suis convaincu que par un enseignement ad hoc, elles peuvent également le devenir pour la plupart de nos concitoyens : eux aussi peuvent se familiariser avec ces objets de pensée qui seront alors des outils très concrets d'investigation et de compréhension des situations.

On peut se demander pourquoi mettre en exergue de telles thèses qui, si elles étaient présentées de façon un peu moins pompeuse, pourraient être assimilées à des vérités de La Palice?

En effet, tout le monde admet, après réflexion, qu'au delà de quelques opérations de base, la plupart des résultats et techniques mathématiques appris à l'école ou à l'université sont en fait tellement sophistiqués et peu assimilés que (hormis pour quelques chercheurs, professeurs et ingénieurs) ils demeurent totalement inutilisables et inutilisés dans la vie sociale et professionnelle.

Pour la très grande majorité des personnes, "l'utilité" (lorsqu'elle existe) des mathématiques apprises à l'école se situe donc ailleurs que dans les résultats de cette discipline.

En fait, la plupart de ceux qui reconnaissent avoir réellement tiré profit de cet enseignement disent que, pour eux, faire des mathématiques a essentiellement consisté à apprendre à raisonner; or, qu'est-ce qu'apprendre à raisonner si ce n'est d'abord s'initier à prendre une certaine distance par rapport aux "évidences" les plus immédiates, afin d'éviter de se jeter tête baissée dans les absurdités, contradictions et impasses qui résultent des préjugés et du caractère faussement simpliste des situations concrètes ?

Si je mets néanmoins ces thèses en exergue et de cette façon, c'est parce que je constate qu'à l'intérieur même de l'école, au delà d'un discours d'intention en faveur d'un apprentissage en profondeur, elles demeurent le plus souvent en décalage profond avec les pratiques dominantes (les contraintes internes de l'école paraissent s'imposer avec plus de force), et qu'à l'extérieur de l'école elles ne sont que très rarement soutenues par une société dans laquelle de nombreuses personnalités s'expriment en faveur d'un apprentissage des mathématiques qui se réduirait pour l'essentiel à la seule maîtrise des techniques opératoires.

Je pense que ces thèses doivent faire l'objet d'un débat aussi large que possible car, personnellement, je les découvre chaque jour plus déterminantes dans la conduite de mon métier de professeur, tant au niveau de mes choix pédagogiques que dans ma façon d'exercer ma citoyenneté dans un pays qui se veut démocratique.

Je fais par suite l'hypothèse que si majoritairement tout cela a tant de mal à se concrétiser dans l'enseignement, ce n'est pas forcément par une volonté délibérée des acteurs du système éducatif, mais bien davantage parce que la mise en cohérence entre ce que l'on souhaiterait faire avec ses élèves ou ses étudiants et ce que l'on parvient à réaliser effectivement est si difficile et nous éloigne tellement des routines de l'institution que cela réclame de notre part un changement radical de point de vue sur le rôle du savoir dans la société, et finalement sur notre propre rôle de professeur dans la "transmission" de ces savoirs.

L'approfondissement de telles thèses me semble donc indispensable, car devant les difficultés croissantes que nous éprouvons tous (ou presque) pour exercer convenablement notre métier de professeur et en particulier de professeur de mathématiques, nous avons besoin (j'ai besoin) pour ne pas nous laisser prendre par la désillusion, le désarroi ou l'enfermement qui tuent notre profession, de raisons fortes et de valeurs assurées qui donnent sens aux actions complexes que nous devons entreprendre (que je pense devoir entreprendre) pour pouvoir enseigner des mathématiques qui aient plus de chances de prendre véritablement sens chez nos interlocuteurs.

Pour ces raisons, je perçois chaque jour davantage l'importance de mieux comprendre ce que m'apporte de façon irremplaçable une certaine culture scientifique, de savoir en quoi cette culture peut servir une forme d'humanisme, en quoi l'exercice d'une certaine rationalité scientifique est indispensable au fonctionnement d'une démocratie effective (démocratie fragile dont nous réalisons mieux l'importance et la fonction à chaque fois que l'actualité nous donne à voir ce que deviennent les communautés humaines qui ne se fondent pas sur des valeurs démocratiques ou qui n'arrivent pas à les mettre en œuvre).

Comme je suis intimement convaincu que notre métier de "maître" consiste pour l'essentiel à rendre accessibles à nos élèves ou à nos étudiants les valeurs intellectuelles et humaines que nous apporte notre culture (valeurs qui, lorsqu'elles ne sont pas médiées par l'environnement familial, ont très peu de chances d'être transmises par d'autres canaux que ceux de l'enseignement), les thèses précédentes deviennent essentielles si, dans leur part de vérité, elles nous éclairent sur des choix professionnels où il vaut la peine de ne pas compter son temps et ses énergies.

A observer ce qui se passe dans la plupart des amphis ou des classes où j'ai l'occasion d'aller, à écouter le discours des professeurs et des élèves que je rencontre, à travailler les analyses des didacticiens que je côtoie, je suis amené à faire l'hypothèse que si trop souvent nous baissons les bras et n'enseignons plus que la partie superficielle des mathématiques et de la science en général (les résultats et les algorithmes de résolution), c'est parce que précisément nous n'avons pas de raisons fondamentales assez fortes pour nous libérer de l'enfermement scolaire qui nous oppresse et nous "interdit" de faire autrement.

Enfermement scolaire qui nous pousse à l'école, au collège, au lycée comme à l'université, à n'enseigner prioritairement que ce qui se dit bien et s'évalue mieux encore (mais qui, à terme, n'éclaire qu'assez peu nos élèves ou nos étudiants sur le fonctionnement du monde des hommes), et à taire en partie ce qui est franchement problématique et pratiquement inévaluable à court terme (alors que nous soupçonnons bien que ce serait le partage de ces savoirs fondamentaux qui permettrait à chacun de mieux comprendre le monde qui l'entoure et la place d'homme qu'il peut y occuper avec dignité et sérénité).

Cet enfermement scolaire, je le vois tellement régner en maître absolu sur nos représentations vis-à-vis de l'enseignement, sur nos choix de parents, de professeurs ou de chercheurs, qu'il vaut la peine à mon sens d'essayer de partager les raisons, les savoirs et les techniques qui pourraient nous permettre, au moins dans certaines situations, de nous en libérer : c'est pour une bonne part à cette tâche que la suite de ce texte est destinée.

Les interlocuteurs directs de ce texte, la légitimité du propos.

Puisqu'il s'agit ici de mathématiques et d'enseignement, je vais dans la suite de ce texte m'adresser directement à "nous" professeurs de mathématiques (et ce même si pour une bonne part mon propos dépasse largement le cadre de ces seuls professeurs); cela me permettra peut-être de ne pas trop tomber dans la fameuse langue de bois, cela m'évitera aussi, je l'espère, de me placer en censeur jugeant de l'extérieur nos pratiques professionnelles.

Je vais donc nous mettre en question, nous professionnels de l'enseignement scientifique, nous interpeller sur un plan éthique, nous inviter à reconsidérer la déontologie de notre métier; je vais donc en un certain sens nous agresser ou pour le moins nous agacer.

Se pose alors la question de la légitimité d'une telle interpellation car, en tant que scientifique par exemple, il est clair que chacun de nous s'est forgé une épistémologie personnelle et possède à juste titre une certaine vision des mathématiques, chacun "sait" ce qu'il aime dans cette activité, ce qu'il vient y chercher, ce qu'il y trouve parfois et aussi ce qu'il n'aime pas, ce à quoi les mathématiques lui ont permis d'échapper, finalement ce qu'il ne voudrait surtout pas voir réapparaître par le truchement de l'enseignement. (C'est une des raisons pour lesquelles les didacticiens "font peur"!)

Reconnaissant cette diversité (que je crois indispensable en démocratie), je vais néanmoins avoir l'air d'exiger de nous une certaine unité de vue (paradoxe de la démocratie); quelle peut donc être la cohérence d'une telle démarche ?

La cohérence et la légitimité de cette démarche tiennent, à mon sens, au moins en partie à un fait brûlant d'actualité : nos hauts responsables ne semblent plus se sentir responsables des valeurs fondamentales qui légitiment leur position hiérarchique.

Il suffit de voir comment se sont organisées, puis rétractées, puis réinstillées les différentes réformes de l'enseignement ces vingt dernières années pour constater que les préoccupations de partage d'une certaine culture et de fondement d'une rationalité commune en vue du respect de l'individu et du bon fonctionnement des pratiques démocratiques essentielles ne sont pas celles qui ont prioritairement guidé les actions ou les refus d'action de nos responsables en matière d'enseignement.

Les indices de réussite externe, la chasse aux échecs trop voyants tant au collège qu'au lycée ou à l'université, échecs externes qui risquent toujours de finir par faire du bruit électoralement parlant, les "impératifs économiques" qui poussent à exiger des professeurs le maximum d'heures de présence devant leurs élèves, à lésiner sur le temps de la formation et de la recherche, à refuser de payer le juste prix des situations difficiles et des prises de responsabilité, tous ces facteurs ont souvent poussé nos décideurs non pas à s'attaquer de front à une sélection et à un encyclopédisme qui dénaturent le sens de la science, ni au problème très angoissant de l'absence de compréhension sur le fond pour une majorité d'élèves, mais plutôt à prôner la suppression des savoirs les plus consistants puisque par nature ce sont ceux qui sont les plus difficiles à enseigner pour le professeur et qui opposent le plus de résistance à être rapidement appris et récités par les élèves.

On perçoit même de plus en plus souvent, dans le discours politique, un relent de mépris pour le savoir, une sorte de défiance vis-à-vis de toute pensée théorique; pour faire proche des gens, pour prétendre s'intéresser à leur bonheur, on va se dire pragmatique et sans visions théoriques, laissant ces préoccupations aux intellectuels irresponsables.

Il me semble donc assez clair qu'aujourd'hui nos grands responsables ont pour la plupart perdu le sens de leurs responsabilités fondamentales (qui ne sont pas de faire le bonheur des gens à leur place, mais de créer les conditions pour que le plus grand nombre de citoyens puissent se tracer eux-mêmes un chemin vers le bonheur), et je ne vois pas par quel miracle l'ambition personnelle et la pugnacité pour prendre et garder le pouvoir, qui semblent maintenant de rigueur pour accéder aux hautes fonctions, conduiraient demain ces "responsables" sur un terrain franchement épistémologique, social ou éthique.

Il nous faut donc (à moins de démissionner de notre responsabilité de solidarité humaine) nous prendre en main et réfléchir en tant qu'intellectuel et en tant qu'homme pour savoir quelles valeurs, quelle culture, "nous nous faisons devoir" de porter au cœur de nos enseignements.

Au nom d'une certaine éthique que j'explicite au fil de mes prises de position, je tente donc dans cet article de mettre en évidence dans ce que je crois être bon, important, voire indispensable pour l'homme d'aujourd'hui, ce qui à mon sens passe de façon non exclusive, mais néanmoins en partie nécessaire, par le biais de l'enseignement de ma discipline.

Je vous invite alors à regarder ces valeurs et ces raisons qui m'amènent à considérer mon métier de professeur de mathématiques sous un angle un peu différent, me semble-t-il, de celui qu'adoptent bon nombre de collègues autour de moi.

J'argumente pour justifier ces choix, non pour prouver que j'ai raison (nul ne le sait!), mais pour nous permettre de voir si, au delà des agacements de personnes, des préjugés de forme ou de fond, nous ne sommes pas nombreux à tenir comme très précieuses certaines valeurs épistémologiques, humanistes et démocratiques, et si nous n'aspirons pas à faire entrevoir, sinon partager ces valeurs à nos élèves ou à nos étudiants en enseignant notre discipline dans ce qu'elle a de beau, mais aussi d'astreignant et de difficile.

C'est dans le partage discuté de ces valeurs et de ces aspirations fondamentales que nous, professeurs, pourrions retrouver une certaine unité de vue qui nous fait actuellement défaut, unité en un sens indispensable pour qu'un enseignement scientifique de masse transmette une culture scientifique, unité qui n'aurait surtout pas pour fonction d'effacer nos singularités si nécessaires à l'épanouissement de nos élèves et à la vie démocratique, mais qui leur permettrait au contraire de s'exprimer comme des choix envisageables ou des complémentarités.

Mon propos sera - je crois - utile s'il nous incite demain à prendre ou à reprendre la plume pour partager par le texte nos choix de professeurs, choix basés sur des positions épistémologiques, sociales et éthiques* que nous aurons mieux identifiées pour nous-mêmes et pour nos élèves.

---

* Cet article a pour origine une conférence faite à Aussois au XXème Colloque Inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. J'ai été amené à remanier très profondément le texte initial (qui figure aux Actes de ce colloque) à la suite des remarques que Rudolf Bkouche a bien voulu me faire parvenir sur ce premier texte; ces remarques ont en particulier attiré mon attention sur le fait que mes propositions de changement reposent moins sur des nécessités d'ordre scientifique que sur des considérations d'ordre éthique. Je le remercie vivement de cet apport, car je crois que ce nouveau texte, fruit de cette coopération critique, bien que plus fragile et plus facilement contestable que le premier, a gagné en sincérité dans la mesure où il nous invite davantage à cheminer dans nos quêtes de vérité en prenant explicitement en compte les convictions qui nous font vivre.

Première partie

Les rapports entre mathématiques et réalité dans l'enseignement

Actuellement, dans l'enseignement, les rapports entre mathématiques et réalité relèvent le plus souvent, quand on passe d'un maître à l'autre, d'un thème à l'autre et parfois même d'une partie d'un chapitre à l'autre, de deux attitudes extrêmes qui s'ignorent totalement, mais parviennent néanmoins à coexister dans un contexte scolaire où ce qui compte prioritairement est de passer dans la classe suivante, réussir aux examens et aux concours : l'attitude naturaliste et utilitariste d'une part et l'attitude axiomatique et puriste de l'autre.

* **L'attitude naturaliste et utilitariste**, officiellement majoritaire, correspond à deux mouvements de pensée :

- le premier consiste à imaginer que l'homme pourrait se servir de mathématiques qu'il ne comprendrait que très peu sur le fond; l'enseignement de masse n'aurait alors pour l'essentiel qu'à livrer des techniques mathématiques, voire à enseigner le maniement de puissants logiciels de mathématiques capables d'exécuter tous les calculs formels qu'un étudiant de licence ou de maîtrise est censé savoir effectuer.

Cette vision de la formation scientifique, qui avait peut-être une certaine efficience il y a une dizaine d'années encore, me semble un pari de plus en plus risqué pour les générations à venir, vu précisément les progrès fulgurants de l'informatique "intelligente".

En effet, dans ce schéma, on se propose soit d'instruire en masse des personnes à des savoir-faire qui relèvent déjà maintenant et relèveront chaque jour de façon de plus en plus parfaite de la machine "intelligente", soit on les initie à manipuler des techniques extrêmement sophistiquées avec lesquelles elles ne pourront absolument rien faire d'autre de leur propre initiative que résoudre des exercices d'école. On propose donc à ces futurs citoyens d'acquérir une compétence qu'ils n'arriveront jamais à valoriser sur un marché du travail concurrentiel.

- le second mouvement de pensée correspond à une vision très spécieuse de la démocratisation par le savoir : on dit oui à une ouverture de l'école au plus grand nombre, mais on dit non à l'accès aux fondements du savoir pour la majorité de ces nouveaux venus.

En fait dans cette vision, au delà de déclarations de bienveillance à l'égard de tous, on ne croit pas (on ne veut pas croire) à l'intelligence de la très grande majorité des hommes. Tous peuvent apprendre à appliquer des résultats certes, mais seule une petite minorité peut les penser; tous peuvent utiliser les conséquences de la pensée mathématique, une élite très spécifique "est autorisée" à comprendre et à s'intéresser à une mathématique vue comme une structuration de la pensée.

Pour cette grande majorité d'élèves ou d'étudiants sur lesquels on se refuse à parier intellectuellement, mais qui remplissent néanmoins nos classes et nos amphis, majorité de personnes qu'on sous-estime ou méprise sans trop se l'avouer, mais dont on déclare néanmoins qu'elles ne doivent pas échouer (à l'école), il faut donc faire des mathématiques "concrètes", il faut que ce qu'on enseigne soit la traduction "naturelle" de la pensée naturelle et des réalités de la vie quotidienne.

Par suite, on n'insistera pas sur les définitions, le vocabulaire, la symbolique et les principes de base qui ne sont pas dans le champ de préoccupations normal d'un homme non cultivé scientifiquement; après étude de quelques cas particuliers (et particulièrement simples), on inférera les règles générales dont on ne spécifiera pas trop les conditions limites, l'important étant que ces élèves "sachent les appliquer dans les cas usuels". On s'interdira donc de mettre à mal ces généralités non maîtrisées en proposant des situations où elles pourraient ne pas "marcher".

On s'oblige ainsi, dans une vision démocratique spécieuse où tout le monde ne pourrait avoir accès à l'intelligence du savoir, mais où tous devraient néanmoins pouvoir apprendre, à proposer une mathématique qui ne transmet plus l'héritage culturel de la pensée mathématique.

Je pense qu'en faisant cela on ne respecte ni la science, ni la dignité d'homme de nos interlocuteurs élèves ou étudiants, ni le projet républicain d'une école lieu de démocratisation par le savoir, puisqu'on propose au plus grand nombre d'acquérir au cours de leurs études scientifiques (qui accaparent une grande partie de leurs énergies et leur demandent un certain effacement de personnalité) des non-savoirs scientifiques.

Non-savoirs scientifiques ne voulant pas dire que ce que nous enseignons soit inexact ou non scientifiquement attesté, mais signifiant que ce que l'élève ou l'étudiant apprend ainsi ne peut lui servir qu'à réussir les examens et concours qui ont été bâtis sur cette conception.

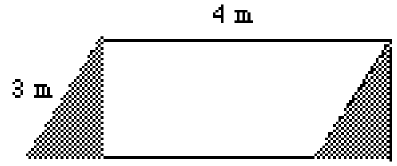
Étude d'un exemple.

Plusieurs années de suite nous avons proposé à des étudiants entrant en DEUG A , i.e. à une population essentiellement titulaire du bac C la question impertinente suivante :

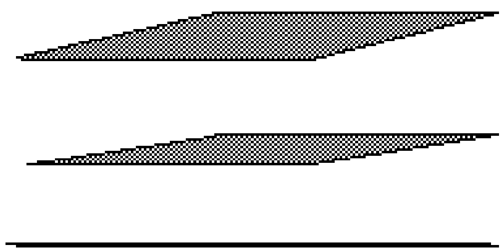
Quelle est l'aire A de ce parallélogramme de côtés 3 et 4 mètres ?

La majorité de ces étudiants répondent alors : A = 12 m^2 !!!

Et comme ils sont "bien élevés", certains donnent "spontanément" une preuve.



Devant le manque de "réalisme" de ce savoir mathématique qui ne permet pas d'envisager les situations suivantes :



où la réponse A = 12 m^2 devient totalement absurde, la question que l'on est en droit de se poser est : comment l'école peut-elle admettre de produire cela ?

La réponse que je suggère est la suivante : l'école n'a pas l'occasion de se poser cette question, car elle a appris à ne pas poser aux élèves les questions qui produisent ce type de réponses.

En effet, à l'école, on pose ce problème de la façon suivante :

Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 et 4 mètres ?

Nous avons pu constater que cette nouvelle formulation du problème de l'aire du parallélogramme fait disparaître la "pathologie" que la formulation précédente avait fait surgir; avec un "même" public de bacheliers, la réponse majoritaire devient alors : $A = 3 * 4 * \sin(\theta)$, réponse majoritaire correcte qui montre maintenant que ces élèves ont appris des mathématiques et savent les utiliser sur des problèmes pratiques <u>lorsque les questions sont "bien posées</u>".

Pour moi, cet exemple, que l'on pourrait considérer comme un avatar de début d'année universitaire s'il ne se reproduisait dans pratiquement toutes les situations analogues en mathématiques comme en sciences physiques, introduit directement aux questions majeures de la fonction sociale de l'école et du but de nos enseignements scientifiques et mathématiques auprès du plus grand nombre.

On oppose bien souvent à l'apprentissage de la réflexion le fait qu'on ne peut matériellement y consacrer un temps suffisant, vu la quantité de connaissances à enseigner; comme il est manifeste que toute initiation à la réflexion demande un temps considérable, il est certain qu'on ne pourra jamais tenir de front dans un enseignement non totalement spécialisé la maîtrise technicienne des techniques enseignées et la compréhension des raisons de ces techniques.

Un choix d'enseignement s'impose donc à nous; et je prétends alors que lorsqu'on présente comme un postulat, comme une règle déontologique, de donner une priorité à la maîtrise technicienne des techniques, on ne peut, dans la mesure où l'on effectue ainsi un choix à la place de l'élève et dans son intérêt, éluder le problème de l'utilité de ce pari pour l'élève : quelles situations professionnelles réclameront demain d'avoir recours à la culture scientifique que l'homme acquiert actuellement à l'école ?

Ces situations qui nécessiteront un savoir scientifique seront-elles celles où il faudra détenir beaucoup de connaissances types et de techniques permettant de résoudre des problèmes bien ciblés (comme ceux que nous posons quasi exclusivement à l'école), ou plutôt celles où les problèmes à résoudre seront "mal posés" (celles que nous apprenons avec l'expérience à ne plus proposer à nos élèves) ?

Je prétends que nous - les professeurs de mathématiques - sommes bien placés pour envisager avec pertinence cette question, car d'une part notre culture mathématicienne nous a appris que, lorsqu'un problème est bien posé, il est en général à moitié résolu, et d'autre part notre initiation même tardive à l'informatique nous montre que ce n'est le plus souvent que dans la phase de clarification d'un problème que l'homme est irremplaçable, car une fois les questions bien cernées, les variables et paramètres pertinents bien identifiés, le travail de résolution peut devenir suffisamment mécanique pour être en grande partie confié à la machine.

L'héritage de la culture scientifique (ce que nous avons mission à transmettre prioritairement par les voies de l'enseignement) me semble donc être fondamentalement ces méthodes de pensée qui aident à mieux poser certains problèmes.

Dans cette optique, l'héritage mathématique ne serait-il pas alors essentiellement cette méthode de travail qui nous pousse d'abord à complexifier les choses en faisant varier tous les paramètres libres pour arriver, par cet artifice, à distinguer ce qui est nécessaire de ce qui est contingent, puis à simplifier, à dichotomiser pour éviter de rester trop vague et pour ne pas prendre nos désirs pour des réalités.

Celui qui dispose d'une telle méthode peut, dans bien des cas, remplacer les questions initiales le plus souvent trop ambitieuses malgré leur apparence simpliste par une série de questions plus pointues, donc plus abordables par d'autres canaux que ceux de l'opinion. Il peut alors séparer ce qu'il sait déjà faire, ce qu'il ignore actuellement et qu'il devrait connaître après travail, et ce à quoi il ne pourra jamais répondre tant qu'il ne disposera pas de moyens d'investigation ou d'informations supplémentaires.

Ici, par exemple, pour ce problème d'aire, la connaissance que les mathématiques devraient apporter à notre bachelier sur cette réalité du parallélogramme, ce n'est pas d'abord la formule précise $A = a * b * \sin(\theta)$ (qui, il est vrai, condense en quelques symboles - pour qui connaît la fonction sinus - tous les commentaires que je vais faire maintenant), c'est essentiellement de pressentir tout de suite qu'il manque des informations pour répondre à la question dans la forme où elle est posée.

Ma culture mathématique me dit ici qu'à défaut de posséder une information sur la valeur de l'angle ou sur la "hauteur" du parallélogramme, je dois m'interdire de chercher une réponse simple et catégorique du genre 6 m^2 ou 12 m^2, et ce bien que la question ait été formulée d'une façon qui m'invite à ce type de réponse (quelle est l'aire de la simple figure parallélogramme - dont je vous montre une représentation - dont les dimensions sont données par de simples nombres entiers 3 et 4 ?)

Le réalisme mathématique que j'aimerais partager avec mes interlocuteurs élèves ou étudiants devrait nous amener à considérer comme une réponse noble l'affirmation "je ne peux pas répondre", affirmation qui dans la vie scolaire, comme dans la vie ordinaire, a le plus souvent une connotation négative puisqu'elle est prise pour un aveu d'ignorance ou de faiblesse.

Notre culture scientifique nous permettrait alors de ne pas décevoir celui qui nous aurait posé cette question de bonne foi, car nous pourrions lui expliquer pourquoi sa question n'admet pas de réponse sous la forme où il l'attendait.

Nous pourrions alors lui dire par exemple :

"Je ne peux pas répondre à votre question par un nombre précis, car "votre aire" peut être donnée ici par un nombre quelconque compris entre 0 et 12 , il suffit d'aplatir suffisamment votre parallélogramme pour que son aire se rapproche de 0 (cas des porte-partitions de musique lorsqu'ils sont repliés); si au contraire vous voulez vous rapprocher de 12 , il vous faudra vous approcher d'une configuration rectangulaire qui réalise ici l'aire maximum.

Entre ces deux extrêmes, la formule mathématique qui suivant l'angle marque le lien entre l'aire d'un parallélogramme et celle d'un rectangle de mêmes côtés est :

Aire du parallélogramme d'angle θ = Aire du rectangle $*$ sin (θ)."

Tout cela est élémentaire, me direz-vous, pour des bacheliers accédant à des études supérieures; en réalité, on constate que c'est "tellement peu naïf" que la plupart de nos étudiants sont actuellement incapables de réagir ainsi sur des problèmes analogues.

Personnellement je ne peux plus prendre ce type de manque de recul à la légère, car chaque jour qui passe me montre mieux à quel point, dans la vie ordinaire, les personnes les plus efficientes sont celles qui adjoignent au sens de l'action le réflexe de la mise à distance intellectuelle (réflexe qu'elles ont le plus souvent acquis davantage en s'obligeant à philosopher sur les techniques qu'en se contentant de les appliquer mécaniquement).

Ces personnes-là sont réellement efficaces dans une économie humaniste puisqu'en permettant à leur entourage d'éviter des erreurs grossières, elles peuvent à terme proposer des solutions qui tiennent davantage compte des difficultés de fond que de surface; elles facilitent en outre le travail en équipe car tout en agissant, elles sont en mesure d'expliquer le pourquoi et le comment de leur action.

Pour conclure sur cet exemple

J'ai tendance à considérer que le comportement observé sur plusieurs cohortes d'étudiants, face à ce problème, est un fait didactique qui devrait nous interroger sur notre fonctionnement de professeurs!

Que la réponse scientifiquement pertinente "$3 * 4 * \sin(\theta)$" devienne majoritaire lorsque l'angle du parallélogramme est désignée par la présence d'un code, et que par contre cette variable angle soit totalement ignorée par la majorité de nos étudiants quand on n'attire pas leur attention sur sa pertinence, n'est-il pas symptomatique d'un fonctionnement très, trop, beaucoup trop irréaliste et non scientifique de nos enseignements scientifiques ?

Ce fait nous montre aussi comment nous évitons d'avoir à nous interroger sur ce que nos élèves apprennent véritablement : en vieillissant dans notre métier, nous apprenons (consciemment ou non) à poser les "bons problèmes", ceux qui permettent d'obtenir un taux correct de réponses satisfaisantes sans avoir à prendre le risque de devoir constater en corrigeant les copies que l'essentiel n'est pas assimilé par ceux-là mêmes qui savent bien traiter les cas standard.

Par un système de codes avertisseurs qui deviennent une coutume totalement transparente pour les élèves participant d'une certaine culture, ne risquons-nous pas à notre insu de creuser ainsi des écarts énormes entre ces élèves qui savent répondre (car ils savent observer les codes) et ceux qui ne savent pas (en partie parce qu'ils n'ont pas compris ce jeu scolaire ou qu'ils ne veulent ou ne peuvent, par leur culture, le pratiquer) ?

Je pense que cette réussite forcée de certains de nos élèves est doublement pernicieuse, car d'une part elle leur fait croire qu'ils savent, alors qu'ils ignorent en grande partie mais ne peuvent plus apprendre (puisqu'ils sont censés savoir), et d'autre part elle nous empêche, nous professeurs, de sentir le besoin de nous transformer : "en toute bonne foi" nous pouvons nous dédouaner du fait que certains de nos élèves ou étudiants n'y comprennent rien si une partie suffisante des autres arrivent bon an mal an, avec quelques indications, à résoudre les problèmes que nous leur soumettons.

Si, dans une certaine éthique, nous ne souhaitons pas être dupes de nos agissements inconscients quand nous "dirigeons" le groupe de nos élèves ou de nos étudiants, et finalement si nous souhaitons leurrer le moins possible la société sur la valeur de certaines réussites scolaires obtenues un peu trop facilement, il nous faudra aller regarder dans les outils élaborés par les recherches en didactique pour voir s'il ne s'en trouve pas certains qui pourraient nous aider à mieux identifier le véritable jeu cognitif de nos élèves ou de nos étudiants : qui fait quoi au juste dans la classe ou dans l'amphi ? quel est le vrai travail scientifique de l'élève, de l'étudiant ? quelles connaissances peuvent-ils utiliser de leur propre chef sans qu'on les tienne totalement par la main ? (Je pense en particulier ici aux notions de contrat didactique, de jeu de l'élève et du professeur, d'effets Topaze développés par G. Brousseau).

Je dis bien dans une certaine éthique, puisque personne ne nous demande actuellement d'aller au delà des réussites de surface (personne n'est prêt non plus à dégager les moyens indispensables), mais peut-être sommes-nous à ce niveau, nous les enseignants, grandement coupables de ne pas avoir montré à la société l'importance d'une formation permanente et la nécessité de moyens matériels et humains beaucoup plus conséquents pour aller vers une école de qualité.

L'éthique (l'idée qu'on se fait de notre dignité de professeur, de celle de nos interlocuteurs élèves ou étudiants, de l'importance du respect de cette dignité dans nos échanges didactiques, de la responsabilité de l'école dans l'initiation à une vie démocratique) m'apparaît en fait aujourd'hui comme la seule raison qui peut nous pousser véritablement, nous professeurs, à effectuer une transformation sur nous-mêmes qui, sans pouvoir prétendre nous procurer le moindre avantage matériel, se traduira fatalement à terme, nous le pressentons aisément, par une plus grande exigence professionnelle.

Il me semble clair que nous ne donnerons pas plus à nos interlocuteurs élèves ou étudiants si nous ne prenons pas davantage sur nous-mêmes, et les savoirs issus de la recherche en didactique ne doivent absolument pas faire illusion, ils ne nous permettront pas malheureusement de faire "mieux pour moins cher !" Je constate seulement qu'ils peuvent nous aider très efficacement à ne pas donner "plus"… inutilement ! et c'est déjà beaucoup en matière d'enseignement.

Mais cela dit, il s'avère en pratique que si la recherche théorique a ses exigences propres qu'il ne faut surtout pas sous-estimer, il faut néanmoins aller chercher bien au delà de la science pour trouver les raisons de placer son propre travail sous un éclairage scientifique, informant certes, mais aussi décapant : il est très douloureux de découvrir avec stupeur "qu'il passe beaucoup moins de sens" dans ses propres enseignements que ce que certains indices externes pouvaient (un peu trop facilement) nous laisser espérer, ou, ce qui revient au même, de découvrir que pour préserver le sens qu'on peut si facilement partager avec quelques élus, il va falloir, pour élargir le cercle, avoir recours à des procédés d'enseignement beaucoup plus coûteux et plus risqués que ceux avec lesquels on obtient (avec quelque hypocrisie) un équilibre de surface "satisfaisant".

Il y a donc en filigrane de tout cela une certaine vision de la dignité de l'homme, celle de nos élèves certes, mais aussi la nôtre, l'acceptation d'un prix à payer pour accéder à un minimum de cohérence globale si nécessaire pour conserver sa liberté d'esprit, pour accéder à une forme de bonheur; et cela relève bien évidemment du choix personnel de chacun, mais… même si la décision finale est une affaire essentiellement intime que l'on prend et reprend ou non chaque jour, on peut néanmoins - je pense - en partager durablement les raisons.

* L'attitude axiomatique et puriste

A l'opposé de ces mathématiques utilitaristes assez peu mathématiciennes, on voit arriver (parfois dans le même cours, mais sans interaction) les mathématiques du mathématicien pur et dur. C'est-à-dire des mathématiques (déclarées pures ou appliquées, peu importe) dont les finalités et les objets de cohérence sont exclusivement internes à la discipline.

Cette coupure brutale avec les autres domaines de réalité, effectuée (souvent sans aucune explication sur ses raisons) avec des élèves ou étudiants qui ne sont pas encore des mathématiciens professionnels, semble faire fi de leur besoin de cohérence globale.

En effet, chacun sait que les mathématiques interviennent dans de nombreux domaines de réalité externes et leur donnent sens; en retour, ces domaines externes sont très souvent sources d'inspiration mathématique.

Ces réalisations externes (je pense en particulier aux rapports privilégiés qu'entretiennent les mathématiques et la physique), souvent plus tangibles et spectaculaires que les résultats mathématiques sur lesquels elles reposent en partie, sont - ne nous y trompons pas - la raison essentielle pour laquelle nos sociétés attribuent un fort crédit aux mathématiques, et indépendamment des questions de survie de la communauté mathématicienne, nous aurions bien tort à mon avis de sous-estimer la valeur épistémologique de ces validations externes.

Nul n'ignore cependant que les mathématiques, comme la poésie, peuvent, pour qui les comprend bien, se pratiquer avec beaucoup de profondeur de façon totalement internaliste, en se souciant fort peu d'une forme de réalisme ou de cohérence externe.

Comme beaucoup de scientifiques, je pense même que pour comprendre les mathématiques (y compris à des fins d'utilisation externe), il faut pouvoir les travailler à certains moments sans les confronter à d'autres domaines de réalité. C'est probablement en partie pour cette sorte d'indépendance des mathématiques par rapport aux contingences de la vie matérielle, que beaucoup d'entre nous avons choisi cette discipline, l'aimons tant et aimons l'enseigner (en un sens, enseigner cette mathématique-là est sûrement beaucoup plus facile, ou en tous cas, beaucoup moins aventureux et problématique que d'enseigner la physique, les lettres ou la philosophie).

Cette présentation des mathématiques, souvent assez bourbakiste (même lorsqu'il s'agit de mathématiques appliquées ou d'informatique), qui a fait fureur à l'époque de la réforme des maths modernes, a provoqué (et continue de provoquer) de véritables désastres mathématiques et humains à chaque fois qu'elle a été pratiquée dans des classes ou des amphis non culturellement adaptés (ce qui, à de rares exceptions près, est le cas de presque tous les enseignements généraux jusqu'en maîtrise de mathématiques).

Cette vision très internaliste des mathématiques, qui n'est jamais parvenue à provoquer dans nos classes ou nos amphis les attitudes scientifiques qu'on s'attendait (un peu naïvement) à voir apparaître spontanément chez nos élèves ou nos étudiants, a été officiellement bannie dans les commentaires de programmes depuis les années 80 avec le même type de précipitation idéologique que celui qui avait conduit à la considérer comme une panacée dans les années 70 .

Dans les deux cas, à mon avis, on ne s'est pas suffisamment posé avant, pendant et après les "réformes" les questions cruciales : Quelles richesses humaines et sociales ces mathématiques-là contiennent-elles virtuellement ? Peut-on dans un projet démocratique "priver" la majorité des citoyens d'une telle culture, et sinon, comment faire partager la réalité de ces richesses, et non leurs apparences, à ceux qui n'y sont pas culturellement préparés ?

Une prise de position cruciale

Si proposer des mathématiques essentiellement utilitaristes dans les enseignements de masse (pour préserver à un faible coût l'égalité des chances) est une position * difficilement compatible avec une éthique de dignité de l'homme-élève ou de l'homme-étudiant et ne correspond pas à un choix franchement démocratique, il est plus délicat de réaliser pourquoi cette même vision éthique de l'homme et de la société nous "interdit" aussi d'opter pour un enseignement scientifique pur et dur dans lequel le professeur de mathématiques se donnerait le droit d'enseigner directement sa discipline telle qu'il la vit dans toute sa beauté et sa rigueur.

Ce que je veux dire là est très paradoxal en ce sens que:

- d'un côté je suis convaincu que c'est bien cette science réelle, cette mathématique profonde avec ses joies, son esthétisme et ses exigences internes telles que les vivent les chercheurs qu'il faut enseigner.

En tant qu'homme s'adressant à d'autres hommes, il me semble même que la seule légitimité du scientifique en général et du mathématicien en particulier à vouloir enseigner à tous sa science, ses mathématiques, repose sur un pari fondamental : celui de pouvoir montrer authentiquement à ses interlocuteurs ce qu'il croit avoir compris lui-même avec cette science là, car c'est seulement le partage de cette façon de voir et de comprendre le monde qui leur sera effectivement "utile".

Cette authenticité du maître, si elle se renouvelait d'année en année, permettrait aux élèves et aux étudiants de découvrir peu à peu, avec la diversité de leurs enseignants, comment ils peuvent eux aussi se frayer un chemin de compréhension du monde avec cet éclairage scientifique des problèmes; elle leur permettrait de décider s'ils veulent eux aussi baser leur métier sur un pari scientifique, sachant quelles exigences et quel bonheur ils peuvent attendre de ce choix, ou si, au contraire, ils ne souhaitent pas poursuivre professionnellement dans cette voie parce que cela ne correspond pas à leurs aspirations et/ou aptitudes principales.

Dans ce cas, un choix de non engagement scientifique personnel ne signifierait pas nécessairement dépit ou dégoût de la science ou des mathématiques, et surtout n'interdirait pas une compréhension assez claire de la façon dont des professionnels de la science peuvent aborder les problèmes de la vie.

Ainsi une présentation plus authentique de la science, tout en dégageant plus sûrement de réelles "vocations" scientifiques chez certains, permettrait à d'autres de faire le moment venu le choix (positif pour eux) de ne pas s'embarquer dans des études scientifiques où ils n'ont que très peu de chances de pouvoir s'épanouir; toutefois ce choix, apparemment négatif à l'encontre de la science, ne les empêcherait pas d'en avoir une vision objective et positive. (A mon avis, une culture de base authentiquement scientifique, i.e. qui marque bien la puissance et les limites de toute démarche scientifique, est nécessaire dans un pays démocratique pour que scientifiques professionnels et non-scientifiques professionnels cessent de se faire peur, de se jalouser ou de se mépriser, et finalement parviennent à collaborer efficacement dans un réel respect mutuel parce qu'ils comprennent les limites et la complémentarité de leurs choix respectifs.)

- d'un autre côté, précisément, c'est à cause de tout cela qu'il me semble illégitime que le scientifique dur (le mathématicien pur et imbu de la facilité avec laquelle il traite la complexité, mathématicien inaccessible que nous devenons si facilement dans nos classes ou nos amphis quand nous enseignons ce que nous avons compris depuis fort longtemps) continue à se donner le droit d'enseigner directement sa science, ses mathématiques, telles qu'il les comprend aujourd'hui, en les accompagnant des seules motivations, images et supports métaphoriques qui lui suffisent maintenant pour en faire pour lui-même une activité intéressante, épanouissante, créative et éclairante.

---

* Ce qui ne veut pas dire que cette position ne tiendra pas pendant longtemps encore, tant elle correspond aux exigences d'une société dirigée par des élites qui sont dominées soit par les valeurs économiques, soit par des préjugés qui les rendent imbues d'une culture qu'elles attribuent principalement à leurs mérites; ces dirigeants voient donc la société comme l'association d'hommes dont une majorité n'a que de très faibles capacités conceptuelles et de rares aspirations intellectuelles.

En effet, lorsqu'il adopte une telle attitude, le professeur s'adresse en principe dignement et démocratiquement à tous, mais en fait, son vrai discours, sa science réelle et réaliste n'atteignent que ceux de ses interlocuteurs qui sont déjà arrivés à un degré d'intimité avec la discipline assez voisin du sien; les autres élèves ou étudiants, c'est-à-dire la grande majorité de ceux qui ne sont pas encore culturellement adaptés, devront se contenter, s'ils arrivent à rester dans le train de l'école, de ne récupérer que les apparences, les grimaces, les mythes de la science, et me semble-t-il, leur retard culturel, loin de se combler au fil des années d'études (comme l'école semble majoritairement en faire le pari), ne fera au contraire que se creuser plus profondément, plus irréversiblement.

Une première tentative d'unification de point de vue

Pour ceux qui s'inscrivent peu ou prou dans le point de vue d'un enseignement des mathématiques essentiellement utilitaires, accessibles à tous et au service des techniques, ou au contraire, pour ceux qui prônent un enseignement plus puriste des mathématiques vues comme une discipline en soi qu'on pourrait sans inconvénients majeurs dégager de ses liens plus ou moins encombrants avec les autres disciplines et avec les réalités matérielles, je conçois bien à quel point mon propos peut être ressenti comme choquant, voire en grande partie erroné, pour deux raisons au moins :

- d'une part, en péjorant les mathématiques utilitaristes, je semble ne pas vouloir regarder en face la triste réalité culturelle de nos classes et de nos amphis d'aujourd'hui et ne pas prendre en compte les pratiques sociales dominantes où l'on attend de la majorité des personnes davantage de docilité pour mettre en œuvre des pratiques établies que d'imagination pour les transformer de façon réfléchie,
- d'autre part, en "interdisant" au professeur de mathématiques de vivre ses mathématiques au premier degré dans sa classe ou son amphi, de "s'amuser un peu", je semble vouloir brimer la liberté du professeur, je parais oublier l'intérêt qu'ont les élèves eux-mêmes à ce que leur maître ne s'ennuie pas lui aussi dans son propre cours, j'ai l'air de nier la possibilité de faire partager par la monstration une forme d'esthétisme, de gratuité de la pensée mathématique.

Or, par exemple, parmi ceux qui sont devenus chercheurs ou professeurs de mathématiques, nous sommes nombreux à pouvoir attester que c'est en grande partie comme cela que nous avons appris ou que nous avons choisi de faire des mathématiques. En effet, nous-mêmes lorsque nous avons été élèves ou étudiants, nous avons éventuellement apprécié, voire "adoré" tel ou tel cours parce que le professeur y faisait enfin de "vraies" mathématiques, parce qu'il avait l'air de redécouvrir, de penser, de comprendre réellement, de jubiler devant nous (c'est peut-être même en grande partie cet enthousiasme naïf et spontané qui nous a fait aimer cette matière).

Ayant moi-même oscillé autour de ces différentes positions pendant des années et ne voyant se dessiner clairement la position que je soutiens ici que depuis dix ou douze ans, depuis que nos recherches en didactique des mathématiques m'ont permis d'envisager d'autres façons d'enseigner les mathématiques, d'autres façons d'être un professeur heureux en permettant à une majorité de mes élèves ou étudiants de faire eux-mêmes des mathématiques en cours plutôt que de me regarder leur en faire, je devine bien à quel point on peut, avec raison, soit être profondément hostile aux propos que je viens de tenir, soit de façon plus insidieuse, être idéologiquement "pour", mais en pratique "contre".

Idéologiquement "pour" et en pratique "contre" signifie par exemple que séduit(e) par mon propos, mais n'y croyant qu'à moitié en pratique, vous pourrez être tenté(e) demain (pour voir comment ça marche!) de donner en devoir à la maison la situation du cycliste que je vous propose à la fin de cet article, ou bien de vouloir la traiter rapidement dans votre cours.

Si vous ne jouez pas le grand jeu, i.e. si vous ne faites pas tous les sacrifices nécessaires au niveau du temps, au niveau de votre neutralité pour ne pas indiquer subrepticement "ce qu'il faut penser", au niveau du respect des prises de parole même maladroites afin que cette situation devienne franchement paradoxale, vous n'en tirerez pratiquement rien; en tout cas, pas ce que je vous en "promets" un peu imprudemment !

En effet, excepté la connaissance didactique que vous apporteront éventuellement quelques réactions surprenantes de certains de vos élèves, une telle situation peut n'être qu'une forme "d'activisme pédagogique" amusant ou non, mais non scientifiquement utilisable, si dans un certain contrat, les "bons élèves" font tous les calculs et répondent "juste" tout en ayant totalement échappé aux raisonnements paradoxaux qui leur auraient permis de voir plus loin.

Si le déroulement de cette activité perd son caractère problématique (parce qu'il faut aller rapidement vers la bonne réponse, ou parce que le professeur n'arrive pas viscéralement à "supporter le faux", à laisser se développer les raisonnements maladroits de ses étudiants), cette situation perd aussi sa capacité à faire évoluer les épistémologies des élèves qui sont loin d'une démarche scientifique; non problématique, une telle organisation pédagogique risque en outre d'amener le professeur à introduire de façon tout à fait artificielle et forcée le concept d'intégrale.

En fait, pour qu'une telle situation "séduisante sur le papier" permette d'aborder dans une classe ou un amphi les obstacles épistémologiques pour lesquels elle est construite, il faut lui donner beaucoup de temps et l'insérer dans un "avant" qui permet son déroulement scientifique et dans un "après" qui en exploite le sens pour approfondir les notions de découpage, d'encadrement et de passage à la limite qui fondent le concept d'intégrale.

Or, de par notre formation initiale dans laquelle la rigueur nous a été présentée davantage comme une donnée que comme une construction, et à cause de l'enfermement scolaire qui nous met toujours très mal à l'aise dès que les définitions, les théorèmes et formules ne défilent plus dans nos enseignements à une cadence suffisante, nous sommes en pratique fondamentalement contre le fait de donner à la classe ou à l'amphi ce temps nécessaire pour que s'installe une problématique; nous sommes en pratique contre une véritable dialectique outil-objet, c'est-à-dire contre l'enchevêtrement des situations et des concepts qui fait qu'aucun chapitre ne peut jamais être considéré comme totalement fermé, puisqu'à chaque instant, pour que l'élève puisse construire du sens, il faut qu'il ait le droit de faire intervenir ici ce qu'il a compris (ou non) ailleurs!

Si vous voulez approfondir les raisons de cet "idéologiquement pour et en pratique contre", je vous suggère de vous procurer, après avoir fait une tentative en classe, la cassette vidéo enregistrée dans un amphi de DEUG A par l'IREM de Lyon sur cette situation du cycliste. Vous pourrez y voir à quel point les vérités mathématiques ne s'imposent pas comme des évidences dès qu'elles ne sont plus proposées ou indirectement soutenues par le professeur, à quel prix l'amphi parvient à travailler les concepts en jeu, à quel effacement momentané le professeur est contraint pour que ce soit la mathématique qui emporte le morceau.

Conscient donc de ces tiraillements qui nous amènent souvent à faire au quotidien le contraire de ce qu'on souhaiterait idéalement pouvoir réaliser, il me semble utile à ce point de l'analyse de vous soumettre quelques-unes des questions cruciales qui ont, je crois, déterminé mes propres choix professionnels; questions d'ordre social, dont les réponses reposent en grande partie sur des options d'ordre éthique, questions et considérations qui m'ont aidé à "sauter le pas" : oser exploiter dans une triple perspective épistémologique, humaniste et sociale les possibilités énormes que nous offrent les savoirs didactiques élucidés par la recherche.

Il est probable que si ces questions ne vous paraissent pas pertinentes pour aborder la réalité de notre métier, la suite de cet article sera sans véritable objet pour vous; si par contre, sans pouvoir répondre à toutes ces questions dans le sens que j'ai l'air d'indiquer, vous les considérez comme centrales vis-à-vis des choix que vous devez faire pour exercer votre métier de professeur, alors peut-être auront-elles momentanément la capacité de débloquer quelques verrous, de faire vaciller quelques-uns des préjugés qui nous empêchent en matière d'enseignement d'envisager d'autres voies que celles dans lesquelles nous fonctionnons spontanément, et qui le plus souvent sont celles dans lesquelles nous avons nous-mêmes été majoritairement instruits.

Peut-être pourrons-nous alors poursuivre, sans esprit polémique et de bonne foi, un morceau de chemin sur les thèmes :

- pourquoi est-il normal que la majorité de nos élèves ou de nos étudiants réagissent de façon si décevante sur le plan épistémologique (ne donnent de réalité à nos mathématiques que scolaire, i.e. ne leur donnent que le statut d'objets de savoirs à apprendre pour être récités afin de réussir aux examens et concours) ?

- d'autres comportements, attribuant une réalité plus scientifique aux mathématiques que nous enseignons, sont-ils envisageables en classe, en amphi ?

- pour que cela devienne une réalité dans le quotidien de nos enseignements, quels obstacles nos élèves et nous-mêmes devons-nous surmonter ?

Quelques questions socio-éthiques fondamentales

Levons un interdit en acceptant de nous (re)poser la question cruciale qui paraissait à beaucoup tout à fait naturelle en 1968 et que nous avons progressivement appris à étouffer depuis : quel est, à notre époque, le rôle d'un professeur de sciences dans un pays démocratique évolué comme le nôtre ?

Cette question, nous (les intellectuels), l'avons progressivement refoulée comme si c'était une mauvaise question, comme si elle devenait impudique face à une crise économique durable et à la montée vertigineuse du chômage (chômage d'autant plus insupportable à regarder en face pour nous, professeurs scientifiques, que d'un côté nous en sommes protégés par notre statut de fonctionnaires, et que de l'autre, il se présente en partie comme une conséquence de ce qui nous servait jusqu'ici de paravent éthique : "le progrès scientifique"!)

De façon plus précise, cette question recouvre les interrogations suivantes :

- sommes-nous là pour enseigner une démarche scientifique avec tout ce que cela comporte d'exigences au niveau de la recherche de la vérité, ou sommes-nous là pour adapter nos élèves à une organisation sociale où la référence scientifique domine, mais où les pratiques scientifiques elles-mêmes, quand il s'agit de prendre des décisions, en particulier les méthodes de travail pour tenter de démêler le vrai du faux, sont le plus souvent ignorées, voire bafouées ?

- sommes-nous là (spécialement en mathématiques) pour sélectionner une "élite" jugée suffisamment indispensable à l'intérêt du pays pour qu'on lui sacrifie la transmission d'une culture mieux adaptée à la grande majorité (majorité qui, par ce choix, se définit de façon négative comme constituée de ceux qui ne peuvent comprendre, apprendre et réciter à la vitesse des premiers) ?

Devons-nous, pour réaliser ces deux objectifs, accepter de prendre le risque que la pensée scientifique soit dans son essence même dévoyée auprès de tous ?

- dévoyée auprès des sélectionnés, car dans une optique de classement, bon nombre d'entre eux ne voient la science que comme un faire-valoir scolaire et s'en désintéressent tout naturellement dès qu'elle ne joue plus ce rôle (c'est l'exemple que donnent à voir une grande partie des Polytechniciens sélectionnés ces dernières années);

- dévoyée auprès de la "masse", qui toujours contrainte à "penser" plus vite qu'elle ne le peut raisonnablement, se trouve condamnée à n'attraper de la science que ses techniques les plus stéréotypées (inutilisables en dehors des cas d'école) et non ses concepts et ses modes de pensée (qui, eux, ont vocation à "donner des idées" en dehors précisément de ces cas d'école).

Est-il normal que l'école qui a toujours eu et aura toujours par nature une certaine fonction de sélection fasse émerger les "très bons" des "moyens" et des "mauvais", en laissant jouer à plein les mécanismes socio-culturels et psychologiques suivants :

- les "très bons" sont majoritairement ceux qui disposent initialement d'un environnement culturel qui leur donne des habitudes intellectuelles dont les autres ne disposent pas; ce sont aussi ceux qui ont une forme de docilité, de désir intense d'être en accord avec le maître, désir qui les aide à rester presque tout le temps en phase avec le professeur : ils entendent ce que ce maître dit, décodent ce qu'il laisse entendre, croient qu'ils peuvent tirer parti de ses conseils.

L'école demande à ces élèves des efforts importants qu'ils consentent à effectuer et à renouveler, car ils en sont largement gratifiés.

- à l'inverse, la culture, le système de codes, les formes de pensée, la personnalité même des autres élèves les mettent spontanément sur une longueur d'onde assez différente de celle qu'adopte naturellement un professeur.

S'il est bien compréhensible que lorsqu'ils s'autorisent à penser par eux-mêmes, la majorité de nos élèves ou de nos étudiants se trouvent assez naturellement sur une autre planète que la nôtre, est-il normal par contre que pour rester en phase avec nous, pour ne pas devenir très "mauvais", pour ne pas être exclus, ces élèves soient (consciemment ou non) amenés dans nos cours à s'interdire de penser à la première personne, se disent que pour s'en sortir il faut qu'ils s'accrochent "bêtement" au mot à mot de notre discours, puisque son sens global leur échappera probablement comme il leur a toujours échappé ?

- en dernier lieu, sachant que nos efforts pédagogiques trouvent toujours leurs limites (nous échouons toujours en partie auprès de certains élèves), est-il normal que nous ayons de plus en plus tendance à nous considérer comme des éléments "infinitésimaux" d'un système très complexe où trop de paramètres sont hors de notre pouvoir pour que nous puissions échapper à un certain déterminisme de la médiocrité ou de l'échec scolaire ?

Quand nous constatons sur nos proches, quand nous nous rappelons sur nous-mêmes et sur nos camarades de classe les effets fantastiques dans un sens ou dans un autre du comportement de tel ou tel professeur de mathématiques qui par son attitude a permis à tel élève de comprendre "qu'il pouvait comprendre", ou au contraire lui a fait perdre tout espoir dans ses capacités intellectuelles, comment pouvons-nous oublier à ce point, sous prétexte que beaucoup de paramètres nous échappent, le pouvoir de transformation de l'individu qu'ont nos actes d'enseignement ?

La finalité éducative de nos actes d'enseignement n'est-elle pas un paramètre fondamental de notre métier ? Dans le respect des lois et des règlements, ce paramètre ne nous appartient-il pas en propre pour l'essentiel ? N'est-ce pas celui-là même qui peut redonner constamment sens à notre métier ? qui peut nous permettre de casser la barrière de nos habitudes, de lutter contre le découragement qui nous guette devant l'ampleur de la tâche que représente toute réelle démocratisation du savoir ? qui peut nous éviter de nous scléroser en vieillissant dans le métier ?

Deuxième partie

Un enseignement des mathématiques qui ait une réalité scientifique

1) Pourquoi les mathématiques enseignées à l'école n'ont le plus souvent de réalité que scolaire.

Il me semble que les mathématiques du mathématicien sont pour lui de véritables réalités d'idées, car elles sont réponses à des questions qu'il se pose ou qu'il aurait pu se poser; elles émergent le plus souvent erratiquement comme un élément d'ordre, de clarté et de certitude là où il n'y avait au départ aucun questionnement possible, et où, après réarrangement, apparaissent simultanément des possibilités de régularité et d'ordre et aussi un doute profond sur le degré de généralité de ces régularités. Nos théorèmes ne naissent pas théorèmes, ils sont le plus souvent l'aboutissement d'une suite de conjectures erronées, rectifiées au fur et à mesure que sont levés les doutes sur leur part de fausseté.

Dans nos recherches sur le "débat scientifique en cours de mathématiques", nous sommes partis de l'hypothèse que ce qui "coupe" les mathématiques que nous enseignons classiquement de toute réalité scientifique, c'est qu'elles ne sont le plus souvent l'aboutissement d'aucun projet de l'élève ou de l'étudiant, qu'elles ne sont l'issue rationnelle d'aucune contradiction ressentie comme telle par eux; les vérités qu'on établit en cours, les théorèmes, ne sont en général pour eux réponses à aucune question qu'ils se posent véritablement ou pourraient se poser.

Dans un contrat didactique classique, où les mathématiques se donnent à voir en suivant la logique interne de l'exposition de cette discipline, logique qui ne correspond le plus souvent ni à une logique de la découverte de résultats nouveaux, ni à une logique de découverte du sens de ce qui a déjà été découvert, ces mathématiques que nous proposons frontalement (y compris en grande partie par les exercices et problèmes que nous donnons à résoudre aux élèves sous la forme "démontrez que ...") introduisent un ordre et des certitudes là où il n'y avait du point de vue de l'élève rien à ranger et pas le moindre doute.

Le point le plus caricatural de cet aspect de nos enseignements mathématiques concerne à mon sens le point capital, celui de la démonstration.

En effet, que faisons-nous pour donner sens à la preuve particulière du mathématicien : la démonstration ?

* Nous énonçons un théorème dans un temps et un environnement problématique tels que l'élève n'en voit véritablement ni la nécessité ni la portée (ce théorème n'annonce a priori rien de bien extraordinaire quand l'élève est immergé dans une mathématique naturaliste qui n'est là que pour numériser ses convictions les plus évidentes; de façon analogue, ce théorème risque de n'avoir que très peu de signification en termes de résultat et sa consistance mathématique risque d'échapper totalement à un élève immergé malgré lui dans une construction axiomatique et hypothético-déductive dont il ne maîtrise ni les enjeux ni les règles de fonctionnement).

** Ce théorème étant énoncé en tant que tel, i.e. en tant que résultat vrai de la théorie mathématique, nous nous engageons dans sa démonstration.

Je prétends alors que (malgré nos efforts de clarté et bien que certains de nos élèves "grattent" tout ce que nous leur disons) cette démonstration qui se déroule à une vitesse et en s'appuyant sur des arguments qui ne sont pas ceux de l'intelligibilité "normale" d'un non professionnel, a d'entrée de jeu perdu pour la quasi totalité de nos interlocuteurs l'essentiel de sa fonction scientifique (il y a très peu de chances pour que ce que nous faisons soit lu par nos élèves ou nos étudiants comme un acte proprement scientifique).

Pourquoi notre démonstration a-t-elle peu de chances d'être lue par nos interlocuteurs comme un acte scientifique ?

* tout d'abord, comme par définition un théorème de la théorie mathématique ne peut être faux, et que la logique de l'exposition nous a contraints à nommer l'énoncé que nous allons démontrer théorème, il devient alors "absurde", dans la logique de quelqu'un qui n'est pas entré dans une culture scientifique, de chercher à prouver qu'il est vrai, i.e. chercher à se persuader qu'il n'est pas faux!

Dans la logique de nos apprentis scientifiques, la démonstration que nous effectuons ne peut donc avoir la fonction scientifique de débusquer l'erreur, puisque ce que nous prouvons est institutionnellement déclaré vrai dès le départ !

** ensuite, on pourrait donner à cette démonstration la fonction scientifique de nous éclairer sur la raison des choses, mais pour cela encore :

- il faudrait d'abord qu'il y ait quelque chose à éclairer; or, dans une mathématique naturaliste, il risque de ne rien y avoir à éclairer puisque l'énoncé est déjà considéré comme évident dans son énonciation, et à l'inverse dans un cours très "mathématique", trop dense et trop rapide pour notre interlocuteur, il ne servira le plus souvent à rien de chercher à donner des éclaircissements sur les raisons des choses, car les "choses" elles-mêmes ne seront pas suffisamment visibles pour lui. (Opacité du sens des résultats très peu problématisés et/ou présentés dans un langage formel, directement pensés pour la généralité)

- il faudrait ensuite pour que notre démonstration puisse éclairer et /ou convaincre, que les chaînons démonstratifs et la logique de leur agencement ne soient pas eux-mêmes partiellement ou totalement plus opaques pour notre interlocuteur que le résultat lui-même.

Si trop souvent la démonstration que nous effectuons ne peut, pour les raisons précédentes, remplir auprès de nos interlocuteurs les fonctions scientifiques de les éclairer sur les raisons de résultats qui ont déjà du sens et de les convaincre rationnellement de la vérité non évidente de ces résultats, alors cette démonstration n'a pour nos interlocuteurs élèves ou étudiants de réalité que scolaire.

En effet pour la plupart d'entre eux cette démonstration devient principalement un exercice de style réservé au professeur, exercice qui dans son brio leur permet de "jauger" la valeur scientifique de leur maître ("celui-là, il est fort ! il démontre tout sans se servir de ses notes !", "celui-là, par contre, il se plante régulièrement !") mais qui, pour ce qui les concerne en propre, est essentiellement une grimace qu'ils doivent être capables de faire dans certaines circonstances en respectant des canons : une démonstration doit comporter des hypothèses, des formules, des théorèmes, des équivalences et une conclusion, etc..

2) Principes et fondement d'un changement de regard sur la réalité de l'enseignement scientifique

Principe de base : nécessité de la communauté scientifique classe ou amphi

Si l'on veut que les mathématiques que nous enseignons à l'école prennent une réalité scientifique auprès de nos interlocuteurs élèves ou étudiants, il faut que nous réinstaurions en classe les raisons de la pensée scientifique : les questionnements, le doute, la volonté de réduire ce doute et d'arriver à des communautés de points de vue, non par l'autorité, la force ou les trucages, mais par les éléments de la raison raisonnable, i.e. parce que les arguments produits nous éclairent, nous convainquent, emportent notre adhésion sans chercher à nous tromper en masquant les difficultés; en clair, il faut que le groupe classe ou amphi puisse, au moins à certains moments, fonctionner comme une communauté scientifique.

Se pose immédiatement la question du réalisme de ce principe didactiquement paradoxal.

Tenant compte de la culture dominante de nos interlocuteurs (i.e. l'absence quasi générale d'une réelle culture scientifique), ce premier principe nous conduit à en poser un second.

Principe de nécessité de confrontation entre différents domaines de réalité

Tout enseignement des mathématiques qui ne s'adresse pas à des professionnels purs et durs de cette discipline (pratiquement tous les enseignements jusqu'en maîtrise ou DEA de mathématiques) nécessite, pour garder une réalité scientifique auprès des élèves ou des étudiants, une part importante de confrontations entre les raisons de la théorie et les questions que pose la pratique de cette théorie dans d'autres domaines de réalité.

En d'autres termes, si une conjecture mathématique apparaît aux élèves comme vraie, elle ne doit pas pouvoir se transformer en une aberration, conduire à un raisonnement absurde susceptible de provoquer des catastrophes, lors de son utilisation dans d'autres domaines de réalité; et si un développement théorique demande pour être maîtrisé un gros investissement intellectuel, cela doit simultanément pouvoir se traduire en termes de nouvel éclairage particulièrement précieux apporté sur d'autres domaines de réalité.

Et si dans certains cas il s'avère impossible, même à un niveau métaphorique, de trouver des correspondances convenables entre objets ou faits mathématiques et objets ou faits pris dans d'autres domaines de réalité, cela doit donner lieu à une discussion spécifique qui permettra de préciser la nature particulière de certains objets théoriques, la valeur particulière qu'il faut attribuer à certaines affirmations (notamment celles du type "il existe ……").

On fait ici le pari que par cette confrontation (et non confusion) entre vérité mathématique et utilité de l'éclairage théorique sur des problèmes pratiques, nos interlocuteurs initialement très éloignés d'une culture scientifique pourront se rapprocher de nos problématiques parce qu'ils y trouveront enfin un moyen de satisfaire leur besoin de cohérence globale (besoin qui s'exprime souvent par les questions du type "à quoi ça sert ?", questions souvent jugées "impertinentes" par nous, professeurs, parce que nous ne pouvons y répondre localement, mais qui, dans des dispositifs didactiques où le besoin de cohérence globale de l'individu est explicitement pris en compte, peuvent s'interpréter comme des appels à un approfondissement théorique).

Mais pour cela, il faut que ces "personnes globales" que sont nos élèves et nos étudiants puissent se faire régulièrement la preuve que la théorie développée en cours (dont leur culture initiale nie l'efficacité) n'est pas une fuite en avant devant la difficulté des réalisations concrètes, mais au contraire un moyen de mise à l'écart momentanée des réalités pragmatiques trop prégnantes, afin de pouvoir mieux comprendre de quelle réalité il s'agit exactement.

Il faut donc que, dans certains cas au moins (expérience cruciale), nos interlocuteurs puissent sentir l'exigence théorique naître de l'étude objective de situations très familières pour eux au niveau de leurs effets externes, mais dont ils ne connaissent pas les raisons ou pour lesquelles ils possèdent de mauvaises explications.

Pour un grand nombre de concepts mathématiques, il est possible (cf. l'exemple proposé en troisième partie) de trouver des situations où l'élève peut s'engager dans une construction franchement mathématicienne si on ne le dirige pas tout de suite vers les formules et résultats ad hoc qui lui éviteront de se poser les questions : "comment expliquer, maîtriser, vérifier, écrire, calculer ce que je pense intuitivement et qui ne correspond à aucun savoir précis qui m'ait été enseigné auparavant ?".

Il faut alors que par ces expériences cruciales, les élèves ou les étudiants découvrent à la fois les aptitudes de l'homme à s'engager dans un mouvement théorique pour résoudre les problèmes qui se présentent à lui souvent de façon très pratique et le bonheur qu'il éprouve lorsqu'il devient capable en partie par lui-même de se construire les outils théoriques de la compréhension et de l'explication; à terme, ces expériences doivent leur permettre de "palper" l'efficacité de cette prise de distance, de cette mise à l'écart des évidences concrètes, en constatant que ce détour théorique les aide effectivement à mieux penser, comprendre, maîtriser des réalités de vie qui les intéressent, bien que leur principe de fonctionnement leur ait échappé jusqu'à ce jour. (A un moment, il doit se produire une sorte d'inversion des rôles : le jeu théorique de la compréhension et de l'explication doit devenir pour nos interlocuteurs plus captivant, plus épanouissant, que l'obtention de la solution dont la recherche avait initié le jeu.)

En clair, on fait l'hypothèse que le besoin de construction théorique et de validation interne de la théorie - qui caractérise la pensée mathématicienne - n'étant pas pour la plupart des personnes un besoin inné (alors que nos exclamations : "soyez rigoureux!" ont implicitement l'air d'affirmer que cette attitude devrait être naturelle), il ne peut devenir une nécessité chez bon nombre de nos élèves ou de nos étudiants que si, au moins à certains moments cruciaux, la théorie mathématique émerge et fait ses preuves dans des domaines externes aux mathématiques.

Par exemple, pour beaucoup d'étudiants, je constate que ce n'est que lorsque la compréhension plus profonde de l'intégrale se traduit par un meilleur éclairage sur des problèmes de physique, leur permet de mieux comprendre les difficultés qu'ils rencontrent dans la mise en équation infinitésimale de certains problèmes pratiques, qu'il devient normal, légitime, nécessaire pour eux aussi d'aller regarder "comment cette intégrale-là est construite", pourquoi il faut pour l'obtenir, majorer, minorer, découper, passer à la limite et pourquoi il ne suffit pas de se contenter d'apprendre à calculer des primitives.

Cette hypothèse ne doit donc pas être confondue avec celle qui préside au choix utilitariste et "naturaliste", puisqu'ici la théorie n'est pas présentée comme évidente et sans aucun risque d'erreurs; elle doit au contraire être mise en question à chaque fois qu'elle a l'air de fournir des indications absurdes sur d'autres domaines de réalité, et ici l'on ne cherche ni à cacher, ni à réduire artificiellement la complexité de la théorie pour l'enseigner, mais - pour que l'effort de rigueur demandé soit acceptable par ceux qui n'en éprouvent pas spontanément le besoin - on cherche à montrer à chaque étape que la complexité de la théorie est proportionnée à l'ampleur des problèmes externes qu'elle permet d'"éclairer" utilement.

Métaphore sur "le sentiment d'absurdité" des exigences théoriques

Métaphoriquement parlant, on pourrait dire qu'une telle hypothèse de nécessité de confrontation entre les raisons d'une construction théorique et les éclairages possibles que cette théorie donne sur des réalités pratiques permet d'expliquer en partie le comportement souvent assez paradoxal des professeurs de mathématiques vis-à-vis des recherches en didactique des mathématiques.

En effet, bon nombre de mathématiciens qui n'ont pas peur, de par leur culture, d'affronter en mathématiques un vocabulaire et une syntaxe très précis, qui acceptent pour eux les exigences d'une théorie qui doit avancer souvent de façon totalement aveugle par rapport aux autres domaines de réalité et qui n'ont pas peur non plus d'exiger ce type de rigueur intellectuelle de la part de leurs élèves ou étudiants, poussent néanmoins de grands cris d'horreur devant l'herméticité des textes didactiques; ils dénoncent très rapidement une mystification théoriciste dès qu'ils voient certains de leurs collègues s'obliger à prendre de la distance par rapport au réel de l'enseignement pour se doter d'outils théoriques et d'un vocabulaire un peu plus précis pour parler de ce domaine de réalité.

Ces "praticiens de l'enseignement mathématique", bien qu'ils puissent facilement imaginer en quoi un effort théorique sur le didactique pourrait leur apporter un nouvel éclairage sur la réalité de leur enseignement, se refusent alors pour une grande part à faire l'effort intellectuel qui les amènerait à étudier dans un esprit scientifique (comme ils le font si naturellement malgré le travail, voire la souffrance, qu'impose la lecture critique de tout article mathématique un peu consistant) ce qu'il y a derrière tout cela. Ils pourraient le cas échéant en critiquer les éventuels manques de fondement ou l'aspect trop vague; ils pourraient peut-être aussi y trouver des ébauches de réponses à des questions qu'ils se sont posées et qu'ils continuent à se poser sans trouver pragmatiquement de cheminements satisfaisants pour avancer dans la résolution de ces problèmes.

Ce rejet assez général d'une didactique théorique ne peut donc pas être mis a priori chez les mathématiciens sur le compte de la paresse intellectuelle ou d'un manque de confiance dans la validité des détours théoriques; je pense que ce rejet repose d'abord sur l'impossibilité dans laquelle se trouve le mathématicien d'effectuer seul une confrontation naturaliste entre les méthodes de travail du chercheur en didactique et une réalité d'enseignement.

Tout comme ces élèves de mathématiques qui, ne parvenant pas à effectuer seuls une confrontation entre les raisons des raisonnements mathématiques et l'éclairage scientifique que la compréhension de ces raisonnements pourrait leur apporter sur d'autres domaines de réalité, se refusent à s'intéresser aux mathématiques en elles-mêmes et par suite se font chaque jour davantage la preuve que la théorie mathématique ne sert à rien d'autre qu'à faire plaisir aux mathématiciens, de même le professeur de mathématiques, ne pouvant découvrir spontanément en quoi le jeu didactique théorique le renseigne utilement sur sa réalité d'enseignement, se refuse à entrer dans cette problématique et se fait ainsi, par impossibilité d'une réelle confrontation entre raisons théoriques et éclairage pratique, la preuve que la didactique n'a aucune réalité scientifique (ne peut être un outil pertinent de compréhension de certains aspects du monde, un moyen d'anticipation et de contrôle sur les réalités de l'enseignement, réalités pédagogiques qui pourraient, si le professeur reconnaissait une réalité scientifique à la théorie didactique, se penser plus rationnellement).

Heureusement peut-on dire, la didactique n'est pas un enseignement obligatoire pour tous, car il me semble que les didacticiens ne savent pas encore organiser dans un dispositif scolaire ce type de confrontation entre raisons de la théorie didactique et raisons pédagogiques.

Il me semble clair par contre que plus on ira vers un enseignement largement institutionnalisé de cette discipline, plus il sera fondamental de réfléchir aux moyens didactiques qui permettent, qui forcent une confrontation permanente entre raisons des choix théoriques et éclairages qu'ils donnent sur la pratique; sinon, à mon sens, on verra fleurir en pire encore dans ces enseignements-là tous les effets pervers des enseignements scientifiques dont la majorité des "élèves" ne perçoivent pas la consistance épistémologique.

En résumé

Revenant aux enseignements des mathématiques proprement dites, je défends donc la thèse que l'étude objective de domaines de réalité extérieurs aux mathématiques, la construction théorique d'éléments ou de concepts mathématiques ad hoc pour tenter de résoudre les problèmes qui se posent dans ces domaines externes, et le retour à ces domaines de réalité pour voir les nouveaux éclairages que cette construction mathématicienne y projette (confrontation qui n'a lieu ni dans une présentation utilitariste des mathématiques, ni dans une présentation purement mathématicienne) sont des préalables nécessaires pour que les mathématiques que nous enseignons puissent prendre une réalité scientifique chez nos interlocuteurs élèves ou étudiants culturellement éloignés, pour qu'elles deviennent pour eux aussi un objet de pensée valide et intéressant en soi, et finalement pour qu'il soit "bon" éthiquement parlant (car respectueux de la dignité des personnes) de proposer à tous les citoyens de s'initier par l'enseignement à cette forme de culture.

A partir de ces hypothèses, quels obstacles aux changements de pratique ?

Se posent maintenant les questions : Quels obstacles vont s'opposer à notre projet d'enseignement ? Comment faire pour que le mythe d'une classe ou d'un amphi de mathématiques débattant scientifiquement pour valider ses conjectures devienne réalité ?

<u>Deux concepts fondamentaux : l'épistémologie d'une personne, les obstacles épistémologiques.</u>

Le modèle cognitif le plus couramment utilisé dans tout système éducatif repose sur une sorte d'évidence cognitive; apparemment, c'est la simple mise en application du fameux précepte de Boileau : "Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément".

Une question s'impose : cet adage, qui peut être regardé comme un bon critère pour tester si l'on a bien compris ce que l'on a étudié, est-il adéquat pour envisager la façon dont on va présenter ce qu'on va enseigner ou la façon dont il faut apprendre ce que l'on veut savoir ?

En effet, le but de l'enseignement n'est pas, nous en conviendrons aisément, de permettre au professeur de montrer qu'il a bien compris (même si c'est assez nécessaire), il n'est pas davantage que l'élève sache montrer le plus vite possible qu'il "sait", alors qu'il ne sait pas encore.

Dans ces conditions, il se peut que la très grande clarté du discours magistral, le bel ordonnancement des rédactions des élèves, lorsqu'ils s'érigent en philosophie de l'enseignement afin d'atténuer les difficultés d'apprentissage et de souscrire aux exigences de l'évaluation, ne deviennent, à l'insu de tous, les pires ennemis de ces élèves vus comme des personnes capables de comprendre et de prolonger la pensée de ceux qui ont déjà pensé avant eux.

Cette clarté, cette concision, cette logique qui caractérisent le discours scolaire, ces atouts qui, en vertu du modèle cognitif précédent, se veulent structurants, qui se présentent comme des sortes de glissières conduisant plus sûrement la pensée des élèves vers le savoir enseigné, glissières empiriquement disposées par l'institution pour éviter aux classes ou aux amphis de tomber dans le gouffre de l'ignorance collective, ne risquent-ils pas simultanément de s'ériger comme d'énormes barrières aux questionnements personnels, interdisant par là l'accès au sens de ce qui est enseigné ?

Les limites de l'empirisme volontariste : la nécessité théorique

Ce qui psychanalytiquement parlant m'a poussé depuis plus de trente ans, depuis bien avant mon entrée dans le métier d'enseignant-chercheur, à imaginer d'autres voies d'enseignement que celles qui correspondent aux canons de la clarté, c'est que, contrairement à la majorité des professeurs de mathématiques, je n'ai pas toujours été un bon élève à l'école et en particulier en mathématiques : jusqu'en classe de seconde, à part de courts moments comme celui, par exemple, de l'introduction à la géométrie de la démonstration où le maître avait fait explicitement un peu d'épistémologie, je n'ai jamais trop compris le jeu qu'on pratiquait en cours de mathématiques, lieu où - me semblait-il - on appliquait des règles très claires, mais sans lien entre elles et sans lien avec le monde extérieur, lieu où l'on demandait d'effectuer des calculs sans fondements pour moi et sans buts apparents.

J'ai alors ressenti, au fil de ces heures de passivité scolaire, quel lieu d'enfermement, de honte, de rejet et de mépris représente le cours de sciences, et de mathématiques en particulier, pour celui qui ne boit pas les paroles du maître.

J'ai vu de près quel danger d'anéantissement psychique ou de marginalisation par la révolte, et finalement quel risque d'exclusion sociale court celui qui ne comprend pas le monde comme le professeur et qui le fait savoir, celui qui ne se résout pas facilement à la docilité scolaire.

Mais si cette expérience cruciale m'a depuis constamment aiguillonné dans la pratique de mon métier, d'étudiant d'abord, puis d'enseignant, dans nos recherches en didactique et jusque dans l'écriture de ces lignes (où il est toujours très difficile, pour aider à la compréhension du propos, de livrer un bout de soi-même à un lecteur qu'on ne connaît pas, à qui on ne pourra jamais expliquer une deuxième fois le sens de ce qu'on n'a pas su lui faire directement comprendre ou qu'il n'était pas prêt à entendre), cela ne m'a absolument pas suffi pour trouver des solutions pédagogiques fondamentalement différentes et applicables dans l'enseignement avec mes étudiants (i.e. des procédés didactiques ouvrant à mes interlocuteurs de nouvelles portes d'accès au sens).

Il est "impressionnant" de constater que devenu par privilège professeur de mathématiques (privilège en ce sens que fils de professeur, j'ai bénéficié d'un environnement socio-culturel sans lequel j'aurais été définitivement "évacué" à l'adolescence du système des études longues), je me suis néanmoins empressé, malgré mon désir de faire autrement, de reproduire en tant que professeur le modèle d'enseignement qui m'avait tant fait souffrir, que j'avais tant critiqué en tant qu'élève ou étudiant, et contre lequel j'avais finalement trouvé la possibilité de me révolter sans être marginalisé.

En effet, très tôt, pour moi-même, j'avais trouvé un cheminement didactique radicalement différent : prenant conscience au milieu de la classe de seconde que j'avais une compréhension des mathématiques quasiment nulle, pour apprendre, je me suis progressivement interdit de continuer à faire la grimace (i.e. résoudre un exercice ou un problème, répondre à une question de professeur, rédiger un résumé de cours sans avoir véritablement compris l'essentiel, sans au moins avoir établi suffisamment de ponts avec d'autres domaines de réalité pour que le savoir proposé en cours ne soit plus pour moi une suite de mots ou de signes sans significations intrinsèques ou métaphoriques cohérentes).

Je me suis donc progressivement interdit de répondre artificiellement, i.e. d'exploiter les possibilités de décodage des questions des professeurs et des problèmes qu'ils nous posaient, décodage qui permet à tout élève qui participe d'une certaine culture scolaire de donner des réponses satisfaisantes sans avoir résolu les réels problèmes scientifiques que ces questions abordent en substance; cette exigence a parfois été si dure à tenir en milieu scolaire et universitaire que j'ai failli plusieurs fois encore abandonner au cours de mes études supérieures.

Eh bien ! ayant trouvé une méthode de travail qui me réussissait si bien (les études étaient ainsi devenues absolument passionnantes, même lorsque le professeur ne l'était pas du tout; on pouvait de surcroît très bien réussir aux examens en continuant jusqu'au bout à travailler sans s'astreindre à "bachoter"), je n'ai pas pu montrer l'efficacité d'une telle méthode à mes étudiants autrement que sous forme d'un discours, de conseils et d'exhortations -

discours, conseils et exhortations qui bien évidemment n'étaient positivement reçus que par ceux qui étaient déjà prêts à les entendre et à les mettre en œuvre!

Tout en ayant maintes fois constaté (comme élève ou comme professeur) que, quelle que soit la bonne volonté des partenaires de la relation didactique, "l'explication lumineuse du prof" n'est pas comprise par l'élève si ce dernier n'est pas prêt à la recevoir (et à un certain stade la sur-explication ne fait qu'envenimer les choses), je restais néanmoins persuadé que "s'il s'y prenait bien" (utilisation de situations introductives attrayantes, d'images et de métaphores parlantes, d'applications spectaculaires, de commentaires de nature épistémologique, etc.), le professeur devait toujours pouvoir expliquer, se faire comprendre, se mettre sur la longueur d'onde de l'élève (à moins, bien sûr, que ce dernier ne refuse d'apprendre).

En tant qu'enseignant donnant beaucoup plus d'explications sur le pourquoi et sur le comment que je n'en avais reçues moi-même, j'avais donc le sentiment de ne pas reproduire les pratiques pédagogiques qui m'avaient tant rebuté en tant qu'élève, et cependant je devais constater que si je réussissais très bien avec certains élèves ou étudiants (ceux qui étaient dans une épistémologie proche de la mienne), je n'atteignais que très localement et très superficiellement les autres; par amitié, certains sentant un regard positif porté sur eux, faisaient un effort pour aller dans le sens impulsé, mais pour l'essentiel ils restaient hors des préoccupations scientifiques auxquelles je les invitais, et malgré moi, beaucoup se sentaient plus ou moins niés, péjorés, rejetés par mes enseignements.

La prise de conscience de l'existence de l'épistémologie d'une personne ou l'une des clefs de l'ouverture au sens

L'épistémologie, qui a tendance à être évacuée de l'enseignement de toute discipline qui n'a pas besoin de se justifier socialement, a disparu à un point tel dans l'enseignement des mathématiques (comme de la physique) que la plupart d'entre nous avons pu quitter nos études supérieures en ignorant jusqu'à son nom ou ce que ce nom représentait exactement.

De façon générale, l'épistémologie est définie comme une réflexion sur la science, qui ne se confond pas avec la science elle-même. Ce concept qui désigne la philosophie des sciences est essentiellement l'étude critique des principes, des hypothèses et des résultats des diverses sciences, étude destinée à déterminer leur origine logique, leur valeur et portée objective.

En fait, ce qui nous intéresse principalement en matière d'enseignement pour comprendre ce qui se passe dans une classe ou un amphi, ce sont les différentes épistémologies des personnes, maître et élèves, à propos d'un savoir.

Par épistémologie d'une personne à propos d'un savoir, on désigne alors principalement les qualités d'intérêt, d'utilité, de validité que cette personne attribue au savoir mis en jeu, qualités qui se fondent à travers l'expérience acquise au fil des années sur les méthodes et les concepts de la discipline concernée, qualités qui vont conditionner le sens que cette personne va attribuer au savoir.

Le drame qui se noue dans l'enseignement autour de l'absence du terme épistémologie et par suite de l'absence de préoccupation explicite pour nommer, pour désigner ce filtre d'accès au sens que chacun place entre lui et le Savoir, entre ce que le professeur sait savamment et ce qu'il enseigne, entre ce qui est enseigné à l'élève et ce qu'il "choisit" d'apprendre, c'est que par cette omission il n'est plus nécessaire, pour entrer dans la logique de préparation d'un cours, de prendre en compte les épistémologies des uns et des autres dans leur diversité.

Quand un professeur ne peut identifier et nommer son épistémologie propre, il ne peut être conscient de l'importance de la diversité et de la pertinence d'autres épistémologies; dans ses jugements scientifiques, il n'y a plus de place que pour une façon de voir et de comprendre: la sienne!

Dès lors, si ce professeur considère par exemple les mathématiques comme vraies en soi, comme indiscutables et indiscutablement plus pertinentes que d'autres approches, comme une sorte de réalité suprême -la réalité de la vérité absolue des idées-, il va croire et prétendre qu'il n'y a que cette façon de concevoir les mathématiques, de voir le monde, et il pensera que les autres façons de traiter les mathématiques ou les problèmes en général sont des formes plus ou moins dégénérées de la pensée; il le fera alors savoir à ses interlocuteurs en péjorant (plus ou moins consciemment) leurs positions de façon parfois très violente.

Pour caricaturer cette forme d'intégrisme* scientifique que j'ai inconsciemment pratiqué pendant mes premières années de métier, je peux dire que le mot épistémologie ne m'était absolument pas nécessaire pour désigner diverses conceptions philosophiques de la science, puisque pour moi il n'y en avait qu'une, celle que nous "partagions" implicitement dans notre groupe de recherche; les autres, je ne cherchais même pas à les comprendre (ne pouvant être nommées, elles n'étaient pas dignes d'être étudiées).

On ne réalise que longtemps après en quoi une telle conception de sa discipline conduit à son insu le professeur à une outrecuidance hégémonique et terrifiante qui risque de fermer momentanément ou durablement l'accès au sens à tous ceux de ses élèves ou étudiants qui ne partagent pas spontanément la même épistémologie.

Finalement, je dois à la communauté de recherche en didactique des mathématiques, profondément traversée par la pensée de chercheurs comme Bachelard, Piaget ou Lakatos, de m'avoir permis d'élargir mes conceptions initialement très étroites sur les mathématiques.

Je sais gré à cette communauté de m'avoir introduit à cette façon d'aborder nos disciplines scientifiques, car depuis, bon nombre d'indices m'ont montré qu'il y a là pour le professeur une véritable clef d'ouverture au sens pour lui d'abord, et aussi pour une très grande part de ses élèves ou de ses étudiants.

En particulier, et sans vouloir dans une démagogie réductrice mettre toutes les interventions de mes étudiants sur le même pied, je ne peux plus aujourd'hui, déontologiquement parlant, me permettre de péjorer ou de dénigrer certaines épistémologies de mes étudiants ou de mes collègues comme je pouvais le faire en toute bonne conscience auparavant; je ne peux davantage présenter un savoir important en me référant à un seul cadre épistémologique.

En fait, à partir du moment où l'on reconnaît la diversité et l'importance des épistémologies individuelles, on est conduit à adopter en cours de mathématiques les principes d'obligation de mise en évidence des épistémologies naïves, de reconnaissance de leurs valeurs locales, de nécessité de confronter les savoirs formels à d'autres domaines de réalité, d'accepter comme pertinentes non seulement les validations internes aux mathématiques qui suffisent à certains élèves, mais aussi les validations externes qui sont indispensables à d'autres pour que les savoirs scientifiques prennent sens pour eux aussi.

Vers le concept d'obstacle épistémologique

J'ai rappelé précédemment que pour fuir une sorte de médiocrité scolaire, pour faire de mes études scientifiques une activité qui vaille la peine d'être travaillée, j'avais instinctivement été amené à rejeter l'attitude de docilité scolaire, à délaisser les savoirs purement scolaires que l'on peut réciter et utiliser mécaniquement, mais qu'on ne comprend pas sur le fond, parce que je ressentais bien qu'en un certain sens ils faisaient écran à l'acquisition de savoirs plus consistants (plus scientifiques).

Les théories constructivistes éclairent les différences fondamentales qu'il peut y avoir entre ces savoirs trop scolaires faits "pour la récitation" et les savoirs scientifiques faits pour résoudre des problèmes.

Chez une personne, les premiers savoirs, non problématisés pour rester simples, peuvent très bien produire de bons résultats aux examens, tout en laissant coexister des systèmes de pensée contradictoires constitués de raisonnements erronés qui "se taisent" lorsqu'ils entrent en

* Dans son livre "La pureté dangereuse", Bernard-Henri Lévy analyse de façon très pertinente à mon sens les racines de l'intégrisme; je trouve qu'une part de son analyse décrit assez fidèlement nos comportements inconscients de professeurs purs et durs.

conflit direct avec les savoirs officiels du professeur ou du livre, mais qui reprennent immédiatement le dessus dans l'action, si aucune indication scolaire explicite ne les interdit.

Contrairement à ces savoirs superficiels qui s'enseignent d'autant plus facilement qu'ils évitent les contradictions avec d'autres systèmes de pensée, les savoirs scientifiques doivent le plus souvent, eux, lutter pour prendre leur place, pour acquérir non seulement le statut officiel d'un savoir scientifique, mais aussi l'opérationnalité qui les caractérise; lorsqu'ils sont appris en étant associés à des problématiques consistantes, ces savoirs-là finissent par changer le regard de la personne sur le monde, car ils interagissent sur l'ensemble de son système d'appréhension des problèmes.

Apparaît à ce niveau le concept fondamental d'obstacle épistémologique

C'est probablement ce concept qui a le plus radicalement changé mon regard de professeur; je l'épinglerai par une boutade : "la bonne explication du professeur n'est toute puissante que lorsque la chose enseignée est mineure".

Ce que toutes mes années d'élève, d'étudiant et d'enseignant m'ont constamment obligé à constater se trouve en grande partie théorisé par ce concept qui néanmoins ne se laisse pas spontanément envisager, car il met en avant ce qu'un professeur ne "saurait voir en face", le paradoxe fondamental de l'enseignement :

"Lorsque le savoir est vraiment consistant,
il est impossible de l'enseigner directement".

En d'autres termes, je prétends que ce concept d'obstacle épistémologique est totalement révolutionnaire pour l'enseignement dans la mesure où il bat en brèche le postulat fondamental de la toute-puissance didactique de la parole du professeur (postulat auquel, je pense, nous tenons tous consciemment ou non assez fortement, bien que nos expériences d'élève et de professeur le mettent constamment en défaut. Nous y tenons fortement, car c'est apparemment lui qui légitime notre position de maître dans la classe, c'est en tout cas lui qui justifie la position dominante de notre parole dans le cours).

Si on reconnaît l'existence d'obstacles épistémologiques, i.e. l'existence d'entraves à la compréhension d'un savoir qui ne seraient pas dues au seul fait que l'élève n'est pas doué ou ne travaille pas, ou qu'on lui a mal présenté les choses ou qu'il est difficile d'apprendre du nouveau, mais d'entraves qui sont liées au fait que ce qu'on veut enseigner est "énorme", représente un changement très important de regard sur le monde, va contre tout un système de pensée qui avait une pertinence locale et qui avait fait ses preuves dans des cas assez simples, on est conduit à faire l'hypothèse que l'explication directe de tout savoir réellement consistant ne sera probablement entendue que par ceux qui ont déjà une problématique idoine, et que par contre, nos explications si lumineuses soient-elles, ne pourront produire que contresens ou savoir assez superficiel chez ceux qui seront demeurés à l'extérieur de telles problématiques, qui les interpréteront dans une épistémologie encore trop éloignée de la nôtre.

Si on "lit" un programme d'enseignement en termes d'obstacles épistémologiques et si on analyse les difficultés que l'on rencontre classiquement pour enseigner à un niveau donné, on prend alors assez vite conscience que l'apprentissage des connaissances les plus fondamentales de ce programme est lié au dépassement de quelques obstacles épistémologiques bien repérables, mais qui ne se laissent pas pour autant circonscrire facilement puisqu'il s'agit plus d'attitude d'esprit, de comportement global, d'entrée dans une problématique que de capacité à restituer un savoir donné ou à exécuter une tâche précise.

Par exemple, comprendre qu'un système de majorations et de minorations peut aboutir à des résultats exacts et comprendre cette philosophie jusqu'à accepter de "perdre de l'information" en remplaçant de son propre chef dans une résolution de problème un calcul exact par une majoration ou une minoration suffisante, est un obstacle épistémologique qui devient crucial dès la classe de seconde, car son non dépassement verrouille l'accès au sens de l'analyse. (Tant qu'on n'a pas franchi cet obstacle, on ne comprend que l'aspect algébrique des résultats de l'analyse, mais cette compréhension ne donne aucune autonomie supplémentaire pour résoudre un problème mathématique non scolaire; de plus cette analyse totalement algébrisée n'est pas idoine, à mon sens, pour aborder les "vrais" problèmes de physique.)

Le changement de regard sur l'enseignement consiste alors, si nous voulons que nos élèves "sachent vraiment", à ne plus considérer ces obstacles comme des ennuis, des gênes, des "erreurs" qu'il faudrait à tout prix éviter, contourner, adoucir par des acrobaties pédagogiques (par exemple en découpant les difficultés en "fines rondelles"), mais au contraire à penser les obstacles épistémologiques comme une cristallisation des connaissances essentielles du programme, à voir leur dépassement comme les moments cruciaux de l'apprentissage, puisque ce sont les moments où l'élève modifie de façon décisive son système de pensée sur un aspect du savoir.

Il faut donc, dans cette modélisation du savoir, que l'élève, l'étudiant affronte ces obstacles, bute durablement dessus, ne comprenne pas tout de suite, réalise lui aussi qu'il y a là quelque chose de très important, comprenne qu'il est normal, voire nécessaire, qu'il éprouve à cet endroit de véritables difficultés.

Il nous "faut" donc, dans cette vision de l'enseignement, arrêter de tant miser sur les vertus de la bonne explication préalable et des applications immédiates consécutives à l'énonciation de la théorie (pratiques qui rassurent l'élève, lui donnent même l'impression de tout comprendre, alors que l'essentiel lui échappe souvent, ce qui est alors dramatique, car l'élève qui a ce sentiment ne peut plus affronter l'obstacle), et il nous "faut" par contre, nous professeurs, "travailler" beaucoup plus l'entrée de nos interlocuteurs élèves ou étudiants dans des problématiques scientifiques consistantes.

Se pose alors le problème de la viabilité dans la classe ou dans l'amphi de situations erratiques et conflictuelles (sur un plan cognitif) susceptibles de provoquer à terme un changement de regard de l'élève sur la situation (changement de l'élève ou plus exactement des élèves, et là se situe un problème didactique majeur, car tous ne vont pas changer au même moment et pour les mêmes raisons), une mini-révolution épistémologique du groupe classe ou amphi, fruit le plus souvent de la traversée collective d'une période d'incertitude et de doute scientifique.

Apparaît simultanément la nécessité de ne pas combattre de façon frontale et péjorante les épistémologies trop naïves de nos élèves ou de nos étudiants, puisque ce sont elles qui vont permettre de faire émerger les conflits cognitifs indispensables au dépassement des obstacles.

Le professeur "doit" donc maintenant utiliser comme un matériau vivant de son cours ces épistémologies trop naïves, il doit pouvoir les faire travailler explicitement dans la classe ou l'amphi pour que ses élèves ou ses étudiants, tout en continuant à penser à la première personne, évoluent peu à peu vers des conceptions compatibles avec la complexité des savoirs qu'il souhaite leur enseigner.

3) Le concept d'obstacle épistémologique crée la nécessité d'opérer une révolution dans la façon de concevoir l'enseignement scientifique.

Quand, dans le principe fondateur du débat scientifique en cours de mathématiques, j'affirme la nécessité que la classe ou l'amphi se comporte au moins à certains moments cruciaux comme une communauté scientifique, j'évoque une pratique pédagogique totalement déraisonnable dans une certaine vision du savoir.

En effet, si on nie la pertinence du concept d'obstacle épistémologique, i.e. si on pense que l'essentiel des savoirs d'un programme peut, après quelques situations introductives, être enseigné sur le mode frontal de l'exposition de la théorie et de la mise en application par les élèves dans des exercices et problèmes assez guidés, et finalement produire des significations scientifiquement acceptables auprès d'une proportion importante d'élèves ou d'étudiants, tout dispositif de type débat scientifique amenant la classe ou l'amphi à exercer une véritable responsabilité scientifique sur ce qui se dit ou se fait dans un cours de mathématiques restera toujours infiniment trop coûteux et risqué pour le professeur, ses élèves et leurs parents, pour les étudiants, pour l'institution et la société en général.

Dans une conception transparente des savoirs scientifiques, quelles que soient les valeurs éthiques qu'on adopte, aucun dispositif "révolutionnaire" du type débat scientifique ne trouvera les conditions écologiques de sa survie au delà de quelques phases d'essais (phases d'essais plus ou moins réussis suivant le moment choisi pour les faire, le degré de conviction et de professionnalisme du professeur).

En clair, si on nie la pertinence scientifique du concept d'obstacle épistémologique, en dehors d'un caractère purement expérimental à des fins de recherche, les modes d'enseignement très coûteux ne peuvent être considérés autrement que comme des utopies pures.

Ces sortes de "folies pédagogiques" ne deviennent envisageables, voire très raisonnables, et n'apparaissent finalement comme des nécessités que lorsqu'on réalise à partir de ce concept d'obstacle épistémologique que ce qui est une folie, ce qui à terme confine à l'absurdité, c'est de vouloir enseigner à tous par les procédés pédagogiques classiques, des concepts scientifiques ayant une certaine épaisseur sémantique.

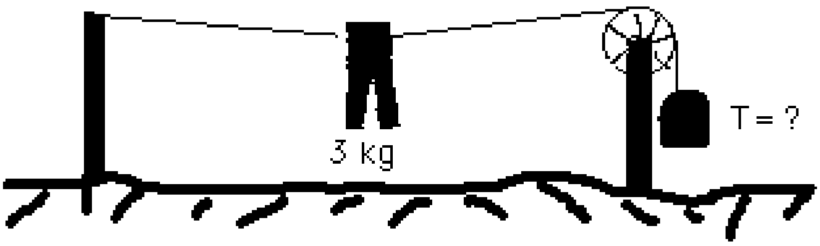
Troisième partie

Étude d'un exemple

Pour ne pas en rester aux généralités, je vous propose l'analyse très succincte d'une situation d'enseignement qui nous permet de mettre en œuvre les considérations précédentes avec des élèves d'une quinzaine d'années.

Le blue-jean

Ce blue-jean mouillé suspendu sur ce fil à linge pèse environ 3 kg.



Question :

La tension T du fil (c'est-à-dire la valeur en kg du contrepoids C qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir le blue-jean dans cette position) est-elle à votre avis plutôt de :

1,5 kg   3 kg   6 kg   20 kg   45 kg   100 kg   ?

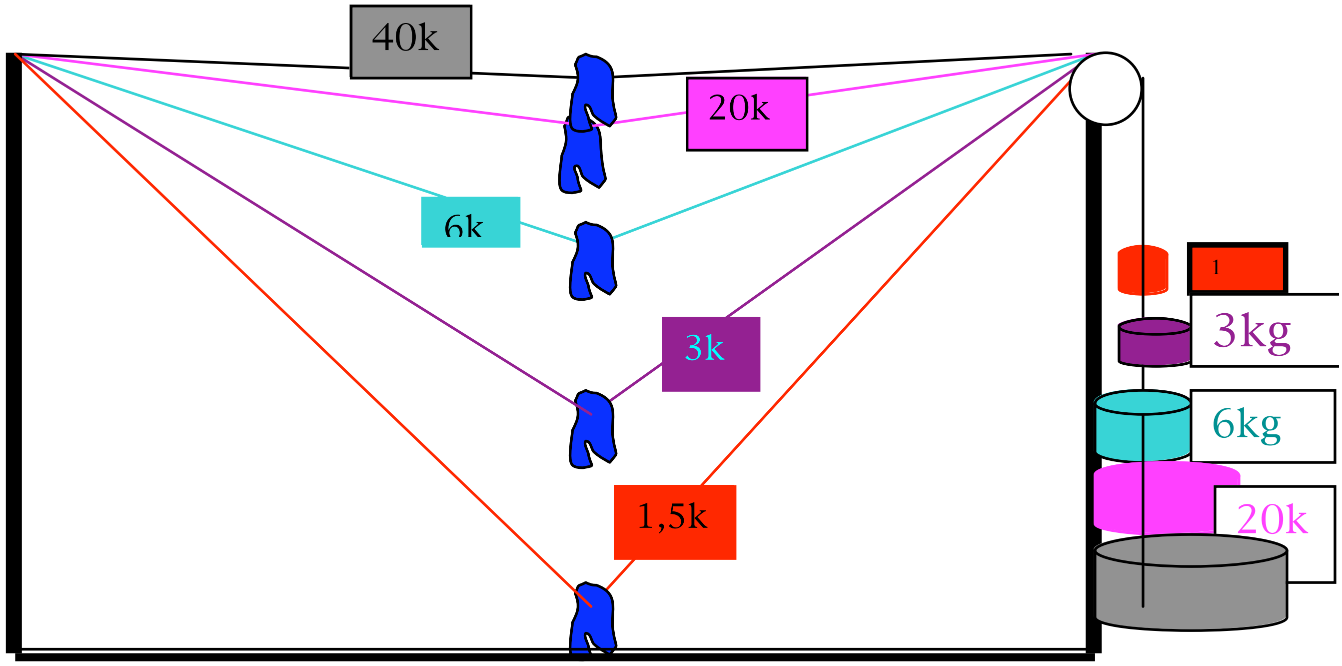
Vous pouvez travailler seul ou avec vos proches voisins afin de déterminer la réponse qui vous semble la plus satisfaisante. //

Au cours d'une conférence que j'effectuais sur le thème "Mathématiques, mythe ou réalité", conférence qui est à l'origine de ce texte, j'ai posé ce problème au groupe de professeurs de mathématiques réunis à cette occasion; après les quelques instants de silence nécessaires pour se remettre à penser à la première personne, l'assistance qui semblait proche de l'état de sommeil s'est brutalement enflammée, et au bout de cinq minutes la salle était dans un état quasi volcanique !

Les réponses ont été les suivantes :

1,5 kg	3 kg	6 kg	20 kg	45 kg	100 kg	refus de vote
25	40	13	20	0	0	2

(Depuis ce jour j'amène à chaque fois que je le peux un jean une poulie et des contrepoids pour réaliser l'expérience en vraie grandeur à la fin du débat car voilà ce que l'on peut voir si la hauteur des poteaux ≈ 2 m , et si la distance des poteaux ≈ 4 m :



J'ai eu le "tort" de ne pas proposer à ces professeurs, comme cela se pratique dans nos cours, d'entrer dans un débat où chacun peut expliquer sa position ou contrer les explications des autres lorsqu'elles lui paraissent erronées.

Je ne l'ai pas proposé, car l'objet de la conférence n'était pas de présenter en détail le "débat scientifique" en cours de mathématiques qui nous permet de "faire des mathématiques" avec nos élèves ou nos étudiants, mais plutôt d'illustrer par des exemples les possibilités de confrontation des mathématiques aux autres domaines de réalité. Je ne l'ai pas proposé donc parce qu'il aurait fallu, pour que nous puissions débattre scientifiquement sur ce problème, que nous consacrions un certain temps non seulement au débat, mais aussi à son organisation.

En effet, pour qu'un débat initié par une situation problématique comme celle du blue-jean puisse se structurer scientifiquement dans un groupe important, il est apparu progressivement nécessaire au cours de nos recherches de respecter des règles strictes peu coutumières à l'école et dans la société, règles "incontournables" pour gérer la situation paradoxale suivante : l'enseignant doit garder le contrôle de la situation sans la dominer, il doit organiser le débat sans l'arbitrer sur un plan épistémologique; les participants, eux, doivent être spontanés et simultanément se sentir responsables de la vérité de ce qui est dit, se plier aux lois du scientifique et respecter la prise de parole en groupe.

Pour cela donc, l'enseignant "doit" distribuer la parole à ceux qui en font la demande et résumer aussi fidèlement que possible au tableau ce que chacun propose en prenant garde de ne pas sélectionner ce (ou ceux) qui lui plaît (plaisent), de ne pas arranger ce qui est dit, et surtout de ne pas laisser le moins du monde transparaître son avis, afin que pour chaque participant "élève" le jeu ne soit pas scolaire : "qu'est-ce que le maître en pense ? qu'est-ce qu'il attend de moi ?" mais scientifique : "qu'est-ce qui est vrai ici ? cet argument est-il crédible ? qu'est-ce qui est certainement faux ? comment le montrer ? etc.".

La nécessité d'un contrat didactique explicitement négocié

Je n'ai donc pas lancé ce débat dans cette conférence parce que n'ayant négocié aucun contrat didactique avec mes interlocuteurs, il m'est apparu dangereux, malgré la tournure joviale que prenaient les débats en petits groupes, de pousser des personnes à s'exposer dans un débat public, dans une prise de parole sincère où probablement une grande partie de ce qu'elles avanceraient, s'avérerait progressivement faux, sachant que cette mise en évidence se ferait d'une certaine façon sans douceur et sans pudeur par la dureté du jeu mathématique dans lequel des nombres comme 3 ou 6 ne peuvent être considérés comme des nuances ou des lapsus des nombres 45 ou 100.

En effet, ce jeu socio-mathématique, dans lequel on ne peut adoucir la fausseté des arguments pour tenir compte des données psychologiques, ne peut respecter l'individu "élève" que dans une coutume didactique explicitement convenue, où les personnes acceptent une position d'apprenti scientifique et où l'erreur n'est plus connotée négativement, mais au contraire est explicitement reconnue comme un passage obligé vers une compréhension plus profonde.

Ce jeu n'est donc jouable que si dans un premier temps on convient (et à terme on prouve dans l'action) que celui qui défend une position erronée n'est pas un âne qui fait perdre son temps à la classe, mais plutôt un scientifique en vraie grandeur qui contribue par son intervention à faire avancer une des parties essentielles du travail scientifique : déterminer la réalité du problème que l'on cherche à traiter.

Dans ce contrat didactique-là, il est clair que l'élève, s'il souhaite apprendre, n'a plus intérêt à chercher à deviner "les pièges" que le maître lui aurait tendus, ou à se gloser du pair qui ne proposerait pas tout de suite la "bonne réponse", puisque (si on admet que les obstacles épistémologiques existent et par suite que les raisonnements erronés sont très résistants) il n'existe plus de "mauvaises réponses" sur le plan cognitif en classe (i.e. de réponses dont on puisse dire a priori que leur discussion ne nous apprendra rien d'intéressant).

Pour apprendre plus, l'élève doit donc mettre en débat tout raisonnement spontané qui lui paraît valide après réflexion personnelle et /ou discussion avec ses proches voisins, afin d'en tester la solidité et la pertinence.

On "gagne" à ce jeu didactico-scientifique aussi bien si l'on a trouvé le pourquoi des réponses exactes que celui des réponses erronées; et pour que le jeu puisse perdurer tout au long de l'année, il faut que chacun garde à l'esprit la nécessité qu'il y ait des élèves pour proposer des réponses de toute nature et des élèves pour les contredire. (Il faut donc en particulier qu'à l'issue de chaque débat, personne ne sorte blessé de s'être exposé à dire sincèrement ce qu'il pensait.)

Le réalisme des mathématiques ou l'objectif d'une situation comme celle du blue-jean

Ici l'objectif est triple :

- il s'agit d'une part d'expérimenter avec les élèves un aspect important de la méthodologie scientifique : la nécessité de construire de nouveaux objets intellectuels quand ceux que l'on possède ne sont plus adaptés (ici il faut réaliser que les nombres ne suffisent plus),
- il s'agit ensuite d'introduire ces nouveaux objets (ici les vecteurs),
- il s'agit enfin de montrer d'entrée de jeu que ces nouveaux objets (les vecteurs), s'ils ressemblent aux précédents (les nombres) puisque comme eux ils s'ajoutent, sont néanmoins très différents dans la mesure où ils ne s'ajoutent pas de la même façon (et que c'est cette différence, cette complexité supplémentaire, qui les rend performants ici pour nous aider à mieux penser la réalité matérielle du fil à linge; réalité qui est beaucoup plus complexe que celle de la suspension d'un poids à la verticale de son point de sustentation).

De façon plus précise, observons qu'ici le problème est présenté en termes de nombres : le blue-jean pèse 3 kg et il est maintenu par l'action conjuguée des deux brins d'un même fil.

Bien que cette action soit fondamentalement vectorielle, elle est dans ce problème ramenée à un nombre puisque la question posée est : "quelle est la tension T qui s'exerce sur chaque brin ?". L'introduction de la poulie et du tableau des valeurs possibles permet, s'il subsistait un doute, de matérialiser cette tension par un nombre : la valeur en kg du contrepoids qui tend la corde.

Rien donc, dans la position du problème, ne permet à l'élève habitué à décoder les énoncés scolaires pour y trouver les variables pertinentes, de soupçonner que les nombres ne sont pas bien adaptés ici pour mathématiser cette situation.

Le problème orientant notre réflexion sur des nombres et l'action des deux brins du fil tendant à se conjuguer pour contrer le poids du pantalon, notre bon sens nous pousse tout naturellement à ajouter ces tensions, d'où la réponse $T = 1{,}5$ kg car $1{,}5 + 1{,}5 = 3$ (réponse qui serait pertinente si le blue-jean était suspendu par deux fils verticaux accrochés au plafond).

Les explications que les élèves donnent habituellement pour justifier les réponses : 3 kg et 6 kg sont le plus souvent des variantes de cette vision fondamentalement numérique.

La réponse 3 kg correspond au cas où on ne fait intervenir qu'un brin pour soutenir le pantalon, par exemple le brin actif relié au contrepoids; 6 kg est le résultat d'une opération plus complexe, mais fréquente en situation scolaire : puisqu'il faut fournir une réponse et que la réponse obtenue par un premier raisonnement est trop contraire à l'expérience, on rééquilibre le résultat en prenant l'opération inverse.

Ici le raisonnement spontané est "la moitié du poids sur chaque brin" qui donne une tension plus faible que le poids; comme cette réponse ne correspond pas à l'expérience de ceux qui ont bricolé des suspensions "horizontales", ils transforment cette moitié en son double pour obtenir une réponse "rationnelle" et plus vraisemblable.

Une vingtaine de professeurs de sciences ont choisi ici $T = 20$ kg (ce qui est très différent de ce qui se produit dans une classe où cette valeur n'est choisie au plus que par un ou deux individus, qui par leur singularité provoquent en général dans un premier temps l'hilarité de la classe); il est remarquable de voir néanmoins que la majorité des professeurs qui se sont exprimés ont choisi des tensions très inférieures et que les valeurs 45 kg et 100 kg n'ont été choisies par personne, bien que, lorsque l'étendage ne fléchit pas de trop, ce soient les réponses les mieux adaptées à la situation.

Devant ce résultat, j'aurais tendance à dire que cette situation est idoine et robuste pour provoquer un changement de regard.

En effet, le problème didactique majeur pour introduire significativement le concept de vecteur auprès d'élèves peu attirés par les mathématiques est que ces élèves sont toujours réticents lorsqu'il s'agit d'élargir, de compléter, de remplacer des objets devenus simples pour eux à force de s'en servir par des objets nouveaux et plus complexes (passage des entiers aux décimaux, des chiffres aux lettres, des nombres aux vecteurs, des formules aux fonctions, etc.).

Souvent, pour ces élèves, la complexité des nouveaux objets mathématiques apparaît comme artificiellement entretenue par le professeur pour faire monter les enchères de la course d'obstacles que représente pour eux le cours de mathématiques ("pourquoi faire si compliqué, alors que jusqu'ici on pouvait faire beaucoup plus simplement").

Ici il me semble que la difficulté vectorielle est adaptée à la complexité du problème qu'on cherche à étudier; si on veut échapper à cette complexité, on ne pourra comprendre pourquoi la réalité est aussi éloignée de notre intuition, de notre bon sens.

C'est donc là (nous l'espérons) que l'élève réservé sur l'intérêt du jeu mathématique va peut-être commencer à apercevoir qu'en "faisant compliqué" dans un premier temps, les mathématiques peuvent aussi beaucoup nous simplifier la vie en nous apportant un éclairage pertinent et des outils de calcul pour quantifier nos intuitions.

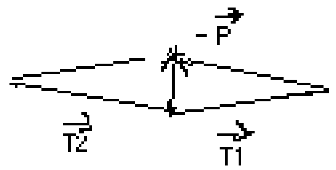
En réalité, il me semble que tant qu'on veut voir uniquement les nombres poids et tension pour résoudre le problème, tant qu'on ne veut pas faire intervenir l'angle des deux brins de la corde, i.e. tant qu'on n'accède pas à une vision vectorielle, nos raisonnements ne font que nous éloigner d'une réponse adaptée.

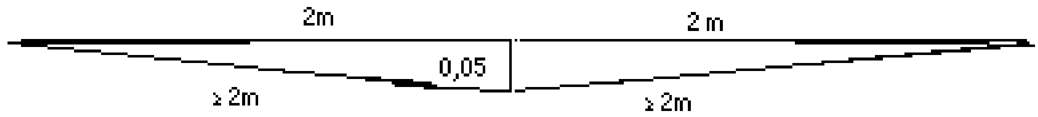
En particulier, contrairement aux nombres qui, lorsqu'ils "coopèrent à la même action", sont automatiquement de même signe (i.e. sont tels que le module de leur somme est la somme des modules), les vecteurs, eux, peuvent bien coopérer à la même action (c'est le cas des vecteurs $\overrightarrow{T1}$ et $\overrightarrow{T2}$ qui participent chacun pour moitié à compenser le poids $\vec{P}$ du pantalon) sans que pour autant leurs modules s'ajoutent.

(Ici ce n'est pas parce que : $\vec{P} = \overrightarrow{T1} + \overrightarrow{T2}$ que l'on a aussi : $\| \vec{P} \| = \| \overrightarrow{T1} \| + \| \overrightarrow{T2} \|$.)

De façon a priori paradoxale (à force de ne considérer que des repères orthonormés, on se fabrique le faux théorème : "Le module des composantes d'un vecteur est toujours inférieur à la norme du vecteur lui-même"), la norme du vecteur somme (ici le poids du pantalon) peut devenir dérisoire par rapport à chacune des normes des vecteurs composants (ici la tension T que l'on demande d'évaluer), et plus on veut ignorer la nécessité que ces vecteurs équilibrateurs $\overrightarrow{T1}$ et $\overrightarrow{T2}$ "fassent un angle" pour contrer le poids (plus on veut faire en sorte que l'étendage ne fléchisse pas) et plus le rapport T/P devient fou (tellement fou que tout étendage finit par casser si on refuse de lui donner une "flèche" suffisante).

Si par suite on prend pour définition de la somme de deux vecteurs la diagonale du parallélogramme (il n'est pas question d'attendre que ce soient les élèves qui fassent cette proposition; la situation n'a pas pour objet de permettre aux élèves de "réinventer les mathématiques"! - ce qui serait une utopie totalement irréaliste ou une manipulation grossière du professeur - elle n'est là que pour permettre aux élèves de découvrir la pertinence des constructions scientifiques), et si l'on se propose de modéliser les forces par des vecteurs et non plus par de simples nombres, le principe de Thalès appliqué à un étendage dont par exemple l'écartement des poteaux est de 4 mètres et sur lequel on accepte une "flèche" au centre de 5 cm (étendage "normal") nous conduit à prévoir un facteur d'ordre 20 pour le rapport T/P .





C'est bien l'absence de cette intuition vectorielle "la tension du fil doit être de 10 à 20 fois supérieure au poids à soulever si l'on veut que la flèche de l'étendage soit raisonnable" qui nous interdit de choisir spontanément les réponses adéquates 20 kg, 45 kg ou même 100 kg, mais excepté pour celui qui travaillerait régulièrement de façon empirique sur des ruptures d'étendages, cette intuition-là n'est pas évidente, ne résulte pas du simple "bon sens", c'est du bon sens théoriquement construit, mathématiquement construit ! C'est la concrétisation de la connaissance mathématique : "si deux vecteurs font entre eux un angle quasiment plat, le module de leur somme peut être dix, vingt, cent, mille fois plus petit que le module de chacun d'entre eux !".

Je prétends donc que ce concept de vecteur mathématique, s'il est couplé avec une situation telle que celle du blue-jean, peut changer notre regard sur le monde et que ce changement de regard est aussi important pour l'intellectuel pur qui renâcle à se salir les mains dans une réalité trop contingente et incertaine, que pour l'esprit concret qui se déclare irréductiblement pragmatique, et qui (pour cela ou en se protégeant par cela) renâcle a priori à tout effort de théorisation, en particulier celui que lui réclame le cours de mathématiques ou de physique.

Qui, par exemple, de l'un ou de l'autre de ces deux personnages pense avec son pragmatisme ou avec ses théories pures pouvoir sortir sa voiture tombée dans le fossé, alors qu'il est seul avec un enfant et ne dispose que d'une corde et d'un solide point fixe ?

Le bon sens seul et le manque d'entraînement physique les pousseront l'un et l'autre à se dire qu'ils n'ont pas la force de tirer seul leur voiture.

Si ce père "connaît" les vecteurs en tant que concept frotté à la réalité du monde sensible, il se dira que ce qu'il ne peut obtenir en tirant directement sa voiture avec une force de 50 kg, il peut y accéder en reliant solidement avec sa corde la voiture au point fixe, puis en tirant la corde par son travers.

Tout comme le blue-jean avec ses 3 kg …, le père avec ses maigres forces de 50 kg arrivera à exercer une tension sur la voiture dix à vingt fois supérieure; cette force de près d'une tonne finira bien par "décoller" la voiture de son ornière (elle avancera jusqu'à ce que les deux brins de la corde fassent à nouveau un angle trop marqué pour que le facteur multiplicatif soit appréciable). L'enfant n'aura alors qu'à glisser des pierres sous les roues pour que la voiture ne recule pas lorsque la corde sera relâchée pour être retendue (pour ramener l'angle à zéro) et ils n'auront plus qu'à recommencer la manœuvre autant de fois qu'il le faudra pour que la voiture soit à nouveau sur la route.

C'est un peu long, me direz-vous! Bien sûr… et tout le monde ne dispose pas d'une corde assez solide et raide en prévision de ses sorties de route à portée d'un arbre judicieusement placé !!!

Mais, si vous le voulez bien et si nous ne souhaitons pas polémiquer pour le plaisir, je pense que vous avez parfaitement compris le sens de mon propos; après une telle expérience on n'est pas prêt à écrire : $\|\overrightarrow{V + W}\| = \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|$, même si tout un contexte numérique positif nous y pousse.

En définitive, si les mathématiques ne prétendent prouver aucune vérité concernant le monde matériel, elles peuvent néanmoins nous aider à appréhender avec pertinence bon nombre de situations concrètes; inversement, si la confrontation d'une théorie formelle (comme par exemple, ici, la théorie des espaces vectoriels normés) à une quelconque réalité de la vie matérielle ne peut en aucun cas servir à établir les vérités de ce modèle, elle peut cependant nous montrer très clairement ce que ne doivent pas être les mathématiques que nous construisons, et nous alerter à bon escient quand par mégarde nous prenons pour vraies des formules qui ne peuvent tenir!

En guise de conclusion

Partant de l'observation du caractère souvent peu scientifique des connaissances que nous transmettons traditionnellement dans nos cours de sciences et de l'intime conviction que ces savoirs de surface (plus "faciles" à enseigner) sont très peu adaptés à la complexité du monde moderne, j'ai peu à peu été amené à envisager mon métier d'enseignant de mathématiques de façon très différente de celle que la société semble en apparence me confier.

Ce métier, je le vois aujourd'hui essentiellement comme celui d'un citoyen à qui la société a accordé le privilège d'avoir accès à une part importante de l'héritage culturel et qui se doit donc en retour de transmettre au plus grand nombre de ses membres et dans un certain cadre (celui de l'école et de ses programmes) ce qui lui apparaît chaque jour comme le plus essentiel dans cet héritage, ce qui lui semble avoir le plus vocation à servir et à resservir au delà des examens et des concours.

Je me dis donc que prioritairement je me dois d'ouvrir mes interlocuteurs à des problématiques scientifiques, je dois arriver à provoquer chez eux un véritable questionnement scientifique afin qu'eux aussi puissent tirer parti dans leur vie des modes de pensée fondamentaux qui ont été élaborés au fil des siècles par les communautés de réflexion et de recherche.

Par souci déontologique, il me semble donc que plutôt que de donner moi-même les solutions, plutôt que de répondre immédiatement aux questions que me posent mes élèves ou mes étudiants, mon devoir de professeur est de les amener à transformer leurs attentes, leurs hésitations et questions en conjectures pour qu'ils découvrent eux aussi que, dès qu'ils s'investissent dans des savoirs consistants, ils disposent en eux-mêmes de moyens rationnels suffisants pour faire avancer utilement et pour résoudre au moins en partie les problèmes qu'engendrent leurs propres interrogations; de même, je n'ai plus (en raison de l'importance souvent démesurée des programmes) à me précipiter pour leur transmettre coûte que coûte, de la façon la plus logique et transparente possible, les résultats importants (pour nous), car je sais que si dans mon empressement, mes explications arrivent trop tôt, si elles se présentent comme "des réponses" à un non questionnement scientifique, elles se présenteront aussi pour eux comme du non-sens, comme du non-savoir scientifique.

Je me dis par suite : n'hésitons donc pas, malgré les multiples pressions externes, à prendre le temps de vivre des situations où la philosophie de la science se montre particulièrement pertinente, des situations dans lesquelles l'élève ou l'étudiant est progressivement amené à sentir qu'il obtiendra difficilement de bonnes explications et des certitudes s'il veut rester à un niveau trop particulier, trop familier, donc trop implicite, des situations où pour comprendre, il va devoir s'engager personnellement dans un double mouvement à la fois généralisateur et réducteur, des situations où il lui faudra accepter de théoriser ses pratiques, définir ce dont il veut parler, dire dans quel modèle il se place, faire des hypothèses explicites dans ce modèle, accepter les facilités mais aussi la dureté qu'il y a à exprimer ses idées dans un modèle mathématique.

Et si, à ce point d'explicitation de ce qui me semble être mon devoir essentiel de Maître, quelqu'un m'interpelle pour me dire que je suis en train de réduire encore un peu plus ce qui reste de la liberté du professeur car je lui "interdis" de faire des mathématiques en classe à son propre rythme, s'il me signale qu'en demandant instamment aux enseignants de partager leurs problématiques avec leurs interlocuteurs avant de leur énoncer des résultats je bride leur spontanéité, et enfin s'il m'objecte que toutes ces contraintes supplémentaires pour se mettre à la portée de leurs élèves risquent entre autres d'avoir pour effet pervers que les professeurs s'ennuient dans leurs propres cours et n'y proposent plus rien de mathématiquement intéressant, je prétends qu'à moins de mauvaise foi il y a là un réel malentendu.

En effet, il me semble que si le professeur se dit que l'important pour lui n'est pas de se démontrer à lui-même ou de démontrer en permanence à ses élèves qu'il sait faire des mathématiques, mais plutôt de leur offrir le plus de possibilités d'en faire eux-mêmes, ce professeur-là peut se sentir très libre et être très heureux en acceptant de travailler à un rythme et sur des modes de pensée qui ne sont pas (ou ne sont plus) spontanément les siens.

Quand on a le sentiment de collaborer à la construction d'une rationalité scientifique auprès de personnes qui participent d'une culture qui nous est (devenue) étrangère, on peut éprouver plus d'enthousiasme et de bonheur à les voir "faire eux-mêmes des mathématiques imparfaites" qu'à leur "faire nous-mêmes des mathématiques plus correctes, plus poussées, voire plus esthétiques", mais sur lesquelles ils n'ont plus aucun contrôle car la majorité de nos subtilités leur échappent. (Il ne s'agit surtout pas dans ma proposition de laisser démagogiquement nos élèves faire et dire n'importe quoi, mais au contraire de tirer à chaque instant le groupe classe ou amphi aussi haut dans la rigueur et l'abstraction qu'il peut aller, tout en veillant à ce que le plus grand nombre garde sens et initiative sur ce que l'on entreprend.)

Finalement, je ne chercherai pas à vous convaincre davantage car je pense que nous sommes ici au cœur de l'obstacle épistémologique fondamental de l'entrée par la recherche dans une problématique de changement profond : celui qui ne ressent pas d'une certaine façon par lui-même les limites du pragmatisme pour aborder nos problèmes d'enseignement, qui ne ressent pas l'obligation de s'ouvrir à d'autres épistémologies que celle qu'il privilégie inconsciemment, celui-là ne va pas par enchantement, par la clarté et la transparence de mon propos, découvrir maintenant ces nécessités fondamentales de notre métier; toute sur-explication de ma part ne servirait à rien, bien au contraire.

La légitimité de ces propos, c'est donc finalement vous et vous seuls qui pouvez la leur donner :

- ou bien mes questions, mes hypothèses, mes paris et mes indignations vous interpellent et vous aident à cheminer dans une quête de vérités toujours fragiles quand il s'agit de théoriser l'humain, et dans ce cas j'ai raison de vous aiguillonner ainsi,

- ou bien tout cela vous dérange, sans pour autant vous donner des pistes intéressantes pour espérer et construire ce monde meilleur auquel nous aspirons tous, mais où il faut bien admettre que le désir ne fait pas la réalité (bien qu'il y contribue fortement), et alors je vous prie de bien vouloir excuser les jugements que vous aurez probablement reçus comme des jugements de valeur (jugements injustes pour vous si vous percevez des nécessités absolues - que je n'arrive plus à déceler - dans l'enseignement scientifique classique, enseignement auquel je reproche d'être beaucoup trop scolaire pour être une bonne préparation à la complexité du monde contemporain).

Je dirai seulement, pour conclure, que je crois très sérieusement au réalisme de cette utopie que serait une école qui, à chaque fois qu'elle se propose d'enseigner un savoir, se donnerait pour mission de le faire dans le respect du savoir et du développement personnel et social de la personne-élève ou étudiant, une école donc qui ne se donnerait plus pour but de sélectionner ceux qui courent le plus vite, mais plutôt d'apprendre à vivre humainement ensemble en ne marchant pas tous à la même vitesse.

Bibliographie

- Gaston Bachelard, 1934, *Le Nouvel Esprit scientifique* , PUF, Paris.

- Guy Brousseau, *La théorie des situations* , R.D.M, vol. 7.2., La Pensée Sauvage, 1986.

- Alan F. Chalmers, 1976, *Qu'est-ce que la science ?* Coll. La Découverte, Essais, Le livre de poche, 1987.

- Bernard Charlot et Elisabeth Bautier, 1993, *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques,* Repères IREM n°10, Topiques Editions.

- Hélène Di Martino, Daniel Pintard, Nadia Michalopoulo, 1991-1992, *La situation du pétrolier*, DEA de didactique des mathématiques à l'Université de Grenoble.

- Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, Publications inter - I.R.E.M., 1990.

- Samuel Johsua, Jean-Jacques Dupin, 1989, *Représentations et modélisations : le "débat scientifique" dans la classe et l'apprentissage de la physique,* Ed. Peter Lang.

- Imre Lakatos, 1976, *Preuves et réfutations, la logique de la découverte mathématique* (traduction N. Balacheff , J.M. Laborde) Hermann, Paris 1984.

- Marc Legrand, 1993, *Débat scientifique en cours de mathématiques*, Repères IREM n°10, Topiques Editions.

- Marc Legrand, 1989, *La crise de l'enseignement, un problème de qualité*, Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon .

- Bernard-Henri Lévy, 1994, *La pureté dangereuse,* Ed. Grasset.