Partage d’un carré en *n* carrés

Cette situation, étudiée à tous les niveaux scolaires, permet de travailler différents raisonnements mettant en œuvre des connaissances élémentaires de géométrie (carré, rectangle, pavage), d’explorer les nombres entiers (dénombrement, raisonnement inductif) et d’introduire des techniques algorithmiques de résolution.

Le problème général

> *On se donne un carré de taille quelconque. Pour quelles valeurs de n peut-on paver ce carré en n carrés ?*

Une solution consiste en un dessin montrant un pavage en carrés accompagné par la valeur du nombre *n* de carrés du pavage, ou en la description de sa construction pour les grandes valeurs de *n*.

La validation d’une solution consiste à « prouver » que les carrés construits sont bien carrés, qu’ils forment un pavage, et qu’il y en a *n*.

Gestion et matériel pour la situation

Un stylo et quelques feuilles suffisent. Il vaut mieux ne pas donner de règle et d’équerre, pour éviter que les élèves se centrent sur la construction des figures – un tracé à main levé suffit car les figures sont simples. D’autre part, il vaut mieux faire travailler sur des pages blanches, car le papier quadrillé peut bloquer la perception du pavage pour certaines valeurs de n. Le travail collaboratif en groupes (de deux ou trois élèves) assure une bonne dévolution du problème. Cette activité de recherche peut être réalisée en une séance, quel que soit le niveau de la classe, Il ne faut pas hésiter à prendre le temps nécessaire pour valider une solution. L’enseignant peut ensuite prendre un moment plus tard pour faire une synthèse des connaissances travaillées.

Une organisation didactique

L’enseignant dessine un carré au tableau, puis pose la question et la consigne suivante :

> *Pourriez-vous paver ce carré en six carrés ? Si lors de la recherche, vous trouvez des pavages avec un autre nombre de carrés, on les notera au tableau.*

Il trace aussi deux colonnes, l’une pour les valeurs de *n*, l’autre pour le dessin du pavage associé. Ainsi, dès qu’un élève a trouvé un nouveau pavage, il peut venir au tableau le proposer pour validation à toute la classe. Cette organisation didactique crée un défi entre les groupes – chercher des solutions pour les valeurs de n non encore résolues – et un investissement de tous les élèves.

Dans le cheminement expérimental usuel, la première valeur généralement donnée est $n=4$, validée sans difficulté. Proposer, dans la consigne, de résoudre le cas $n=6$ a plusieurs intérêts :

- il est facile de trouver une solution, à condition de ne pas hésiter à faire des essais et les étudier ;
- les solutions trouvées peuvent être validées (ou invalidées) facilement par les élèves eux-mêmes, les propriétés géométriques nécessaires sont connues.

Quand plusieurs solutions écrites au tableau ont été validées, l’enseignant peut poser la question générale ou sinon par exemple « Est-ce possible pour $n=17$? Et pour $n=123$? ».

La phase de synthèse consiste à faire expliciter par les élèves leurs conjectures, puis étudier si elles sont vraies ou fausses.

Au lycée, la question générale peut être posée directement.

Des preuves accessibles dès le collège

Pour les petites valeurs de n admettant une solution, la preuve est facile, basée sur des arguments géométriques et numériques élémentaires : on vérifie que tous les carrés sont bien des carrés, et qu'il y en a bien n.

Pour de grandes valeurs de n, on ne peut pas dessiner tous les n carrés du pavage, il faut donc expliquer comment on ferait pour les dessiner. Ceci met en jeu un double raisonnement inductif et algorithmique, à partir d'un pavage particulier du carré initial. Les algorithmes de construction (ou de déconstruction) sont simples à mettre en place dans l'action, mais leur explicitation demande un travail collectif avec l'enseignant.

Pour les valeurs de n pour lesquelles il n'y a pas de solution, les preuves nécessitent des raisonnements géométriques plus complexes. Des conjectures pourront se révéler fausses, si finalement il y a des solutions … comme pour $n=17$!

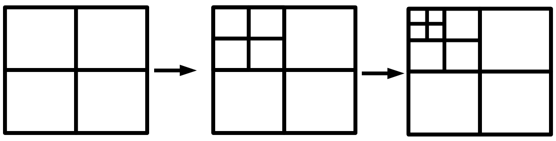
Résolution mathématique

Finalement, il s'agit de démontrer les résultats suivants.

- Il existe un pavage en n carrés pour tout entier $n \geq 6$, et bien sûr pour $n=1$ et $n=4$.
- Il n'y a pas de solution pour $n=2$, 3 et 5.

Preuves pour les cas où la construction est possible

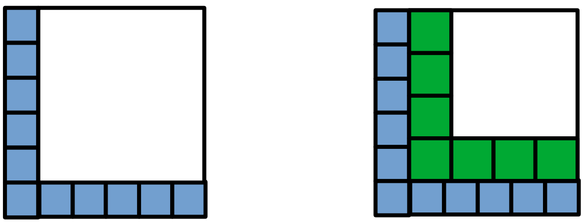
Première preuve. Notons P(n) la propriété « il existe un pavage d'un carré quelconque par n carrés ». Il est clair que P(1) est vraie. En traçant les segments reliant les milieux des sommets opposés, on voit qu'il en va de même pour P(4). Sur le carré partagé en 4, on peut repartager un des carrés en quatre carrés, on obtient ainsi un partage en 7 carrés ($4+(4-1)$). En répétant cet algorithme, on construit ainsi successivement des partages en 4, 7, 10, 13, etc.. Ceci permet d'établir qu'il existe un partage pour tous les nombres n de la forme $n=3k+1$ avec k entier.



Cette technique de construction permet de construire aussi une solution pour tous les n de la forme $n=3k+2$ ou $n=3k$, à partir d'une valeur de k pour laquelle on a trouvé une solution. Et il y a des solutions « faciles » pour $n=6$ et $n=8$. Ces trois suites de nombres couvrent toutes les valeurs de n à partir de $n=6$. Il ne reste plus qu'à étudier les cas $n=2$, 3 ou 5.

Deuxième preuve. Les partages pour $n=6$ et $n=8$ peuvent être généralisés et donnent une construction pour tous les n pairs à partir de 4, donc de la forme $n=2k$ pour $k \geq 2$. Il suffit de partager le carré initial en deux bandes de carrés de côtés de longueur k (il y en a $2k-1$) et un carré de côté de longueur $k-1$. Par exemple, pour $n=12$ (figure gauche ci-dessous).

Il reste alors à étudier tous les n impairs. Or, à partir d'un pavage en p carrés et d'un autre en q carrés, en « insérant » le second dans un carré du premier nous obtenons une solution à $p+q-1$ carrés. Ainsi, pour p et q pairs, $n=p+q-1$ est impair (construction illustrée ci-dessous). On obtient ainsi tous les pavages pour n impair à partir de 7.

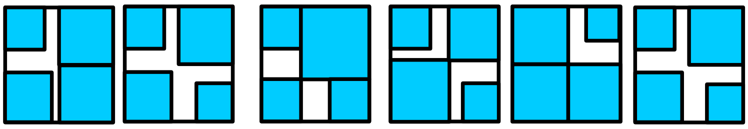


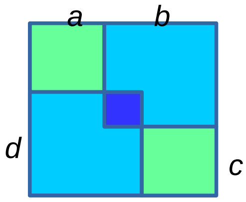
Pavage en 19 carrés, obtenu avec p=12 et q=8

Preuve de l’impossibilité d’un tel partage pour n=2, 3 ou 5

Remarquons que chaque sommet du carré initial est le sommet d’un carré pavant et qu’un carré pavant ne peut contenir deux sommets du carré initial (sauf la solution triviale n=1). Un pavage nécessite au moins quatre carrés. Il n’y a donc pas de solution pour n=2 ou 3.

Il ne nous reste plus qu’à examiner le cas n=5. Supposons donné un carré pavé par cinq carrés. Quatre de ces carrés contiennent chacun un des sommets du carré initial. La partie non couverte par ces quatre carrés est un polygone qui devrait être le cinquième carré du pavage. Si ces quatre carrés ne « remplissent pas le grand carré, alors on a les figures possibles suivantes (à des symétries près) :



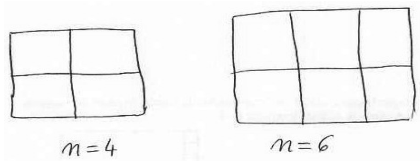


Enfin, si certains des quatre carrés se chevauchent, la seule solution pour qu’ils constituent un partage est que le carré de chevauchement soit réduit à un point, on a alors une partition en quatre carrés. En effet, si on note a (resp. b, c, d, e) les côtés des cinq carrés, la longueur du côté du grand carré est alors : $a+b=a+d=b+c=c+d$. Ceci entraîne que $a=c$ et $b=d$. L’aire du grand carré initial s’écrit : $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2$.

Le nombre de côtés touchés par le cinquième carré ne peut donc être nul (celui-ci serait réduit à un point). Il ne peut être égal à 1, car on aurait $a+b+e=c+d=a+b$, donc $e=0$. Et il ne peut toucher ni deux, ni trois, ni quatre côtés, car il ne peut toucher aucun des quatre coins. Il n’existe donc pas de pavage en cinq carrés.

Résultats expérimentaux

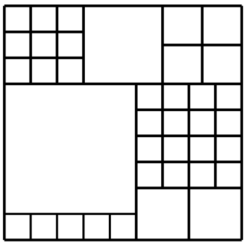
À tous les niveaux de collège et de lycée, le élèves résolvent beaucoup de valeurs de n en une heure de temps, utilisant plusieurs « algorithmes » pour construire de nouveaux pavages. Ils sont donc prêts à dire « comment faire » pour presque n’importe quelle valeur de n. L’enseignant peut consacrer éventuellement le début du cours suivant pour faire une synthèse et des preuves.



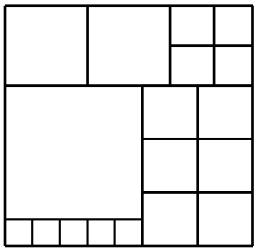
En général, les **premières solutions** qui sont proposées correspondent aux valeurs de n qui sont des carrés parfaits : 4, 16, 25, etc. La question de savoir si les carreaux du pavage doivent être tous de même taille est souvent très vite posée. Ce à quoi l’enseignant peut répondre que l’on n’a jamais fait cette hypothèse (supplémentaire). L’évidence de la solution pour n=4 induit très souvent une proposition immédiate d’un ou plusieurs élèves pour n=6, qui s’avère fausse et offre une bonne occasion de préciser la nécessité de valider les dessins à main levée par des arguments géométriques.

Les essais de tracés font émerger des **techniques de construction** différentes dans les groupes, qui conduisent à de nouveaux pavages qui se complètent ou se recoupent : par exemple, trouver pour tous les nombres pairs, ou bien pour tous les $4+3k$, etc. L’enseignant peut alors demander aux élèves de faire la liste de toutes les valeurs de n que l’on atteint par l’un ou l’autre de ces algorithmes.

Pour certains pavages en n carrés, il est possible de regrouper un certain nombres de carrés du pavage pour en faire un seul. On obtient alors un pavage en m carrés, $m<n$. Cette **technique de « déconstruction »** est apparue lors des expérimentations, pour des valeurs de n pas trop grandes. Par exemple, à partir du pavage ci-après en 38 carrés (figure à gauche), en regroupant des carrés en plus grands carrés, on peut obtenir, par exemple, un pavage en 18 carrés (figure à droite), ou encore en 30 carrés, 23 carrés, 7 carrés, etc.



Pavage en 38 carrés



Pavage en 18 carrés

$18 = 38 + 4(-4+1) + (-9+1)$

Les **preuves de non-existence** de pavage sont de complexités différentes : pour $n=2$ et $n=3$, les preuves sont accessibles dès la classe de Sixième. Pour $n=2$, on peut faire démontrer aux élèves le résultat suivant : si on partage un carré en deux parties par une droite parallèle aux bords, on obtient deux rectangles non carrés. Pour $n=3$, un raisonnement fréquent consiste à tracer l'exhaustivité des partages possibles d'un carré en trois rectangles ne s'intersectant pas et remplissant tous le grand carré. On peut aussi faire la preuve qui règle les deux cas ($n=2$ et $n=3$) en même temps, en posant la question : « est-ce qu'un coin du carré peut appartenir au même pavé carré ? Pour $n=5$, la preuve est difficile, on peut en donner l'idée au collège, la construire au lycée.

Cette situation peut être une occasion de montrer la nécessité d'un **langage commun** et de règles précises pour expliquer les raisonnements et valider les résultats. Il ne suffit pas d'avoir compris mais encore faut-il convaincre ses pairs et l'enseignant. C'est aussi une bonne occasion d'apprendre à construire et raisonner sur des figures « à main levée » approximatives mais soignées, la validation se basant sur des arguments géométriques théoriques.

En Terminale, des éléments de preuve peuvent être attendus des élèves eux-mêmes. L'enseignant peut, à l'occasion de cette activité, organiser un travail sur la preuve par récurrence, en demandant de démontrer que, pour tout $n \geq 6$, la propriété P(n) : « tout carré admet un pavage en n carrés » est vraie. L'écriture de l'hérédité est subtile, car il faut considérer les trois types de valeurs de n : pour tout entier k, $n=3k$ à partir de n=6, $n=3k+1$ à partir de $n=7$, et $n=3k+2$, à partir de $n=8$. La nécessité de vérifier l'initialisation est induite par le travail de la phase expérimentale : par exemple, un élève peut affirmer « On sait faire pour tous les $5+3k$, mais il reste à trouver le pavage pour $n=5$ », pour finalement conclure que « ça ne semble pas possible pour $n=5$, mais on peut commencer à 8 ».

Connaissances et compétences

En géométrie élémentaire, l'exploration et la construction de figures élémentaires, et les pavages. Dans le registre numérique, une approche algorithmique des nombres entiers, et le dénombrement d'une collection d'objets.

Dans le registre logique, le raisonnement inductif et la preuve par récurrence.

Bibliographie

Brochure de l'IREM de Grenoble (2017): Situations de Recherche pour la classe pp 53-68.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877

Partage d'un carré en n carrés

On se donne un carré de taille quelconque.

Est-il possible de paver ce grand carré en 6 carrés ?
En 8 carrés ? En 5 carrés ? En 123 carrés ?

Les carrés du pavage ne doivent pas se chevaucher et ils doivent remplir le grand carré sans déborder.