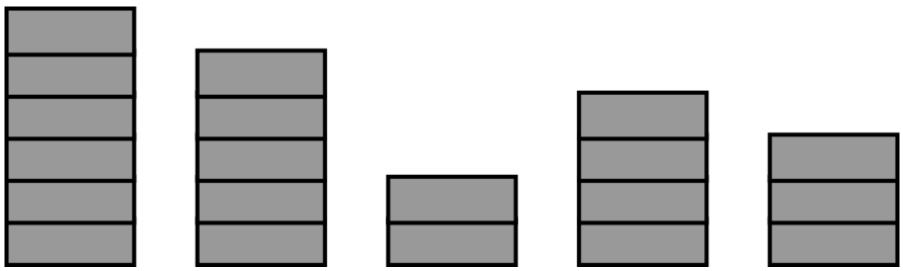
Jeu des piles

Groupe SiRC de l'IREM de Grenoble

12 février 2024



1 Introduction

Dans ce document de travail, nous présentons une situation travaillée au sein de notre groupe de l'IREM de Grenoble. Nous conseillons aux enseignants qui liraient cet article de se prêter au jeu, c'est-à-dire de passer du temps à appréhender le problème pour chercher à le résoudre avant de lire la résolution mathématique proposée ci-après et donc d'accepter de vivre l'expérience telle que pourrait la vivre un élève en classe.

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. On dispose de piles de jetons de hauteurs quelconques entières. La règle est la suivante : chaque joueur à tour de rôle enlève exactement un jeton des piles de son choix. Il doit choisir au moins une pile.

Dans la version « classique » du jeu, le joueur qui perd est celui qui ne peut plus jouer (ou, de façon équivalente, le joueur qui gagne est celui qui prend le dernier jeton). Nous proposons également une version « misère » où le joueur perdant est celui qui récupère le dernier jeton. Dans chacune de ces versions, le problème est le même : comment gagner à coup sûr ?

Ce jeu est un jeu combinatoire à *information parfaite* (tout les éléments du jeu sont connus par les deux joueurs et le hasard n'intervient pas durant le déroulement du jeu). C'est de plus un jeu à *somme nulle*, c'est-à-dire qu'il y a forcément un vainqueur à la fin du jeu. Celui-ci est à rapprocher des jeux de Nim comme le jeu de Marienbad ou le jeu des bâtonnets de Fort Boyard. Certaines définitions des jeux de Nim – dont celle donnée sur Wikipédia (octobre 2023) – englobent d'ailleurs le jeu présenté ici.

Un méthode classique pour résoudre les jeux de Nim consiste à classer l'ensemble des situations du jeu (Ici, une situation est donnée par une configuration particulière caractérisée par le nombre de piles et le nombre de jetons par piles) en deux catégories :

(G) les **situations gagnantes** à partir desquelles il existe un coup qui donne une situation perdante ;
(P) les **situations perdantes** à partir desquelles n'importe quel coup donne une situation gagnante ;

Les situations finales étant considérées comme perdantes en version classique et gagnante en version misère. Une telle partition existe toujours et cela peut se démontrer en modélisant les jeux de Nim par des graphes que l'on colorie (voir annexe). La stratégie gagnante consiste alors à jouer un coup qui donne une situation perdante lorsqu'on est face à une situation gagnante.

Une bonne stratégie de recherche est de regarder des petits cas où, à partir des situations finales du jeu, on peut déterminer les situations gagnantes et perdantes, pour espérer trouver des régularités qui permettraient de conjecturer des conditions pour avoir des situations gagnantes ou des situations perdantes. Ensuite, il faut essayer de démontrer ces conjectures. On peut alors faire appel à des raisonnements en revenant directement à la définition, ou bien à des raisonnements davantage inductifs, comme la récurrence par exemple. En général, c'est la phase de conjecture qui est la plus délicate et la plus cruciale. Elle demande bien sûr de manipuler et de jouer mais aussi et surtout de bien organiser la recherche et l'étude de petites situations du jeu.

2 Résolution mathématique

Pour la résolution mathématique, nous faisons le choix de coder les situations du jeu à l'aide de suites numériques. L'avantage de ce codage par rapport à l'utilisation de n-uplets est de laisser libre le nombre de piles pour ainsi permettre une résolution en toute généralité. Cependant, pour une présentation à des élèves, on pourra privilégier un encodage en n-uplets en fixant le nombre maximum de piles.

2.1 Situations gagnantes et situations perdantes pour la version classique

En numérotant les piles, on peut encoder une situation du jeu par une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ d'entiers positifs à support fini [1] où, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n correspond au nombre de jetons dans la pile numéro n. Les coups possibles à partir d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consistent à lui soustraire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ non nulle (car on doit enlever au moins un jeton) de 0 et de 1 (car on enlève au plus un jeton par pile) de telle sorte que pour tout n, $p_n - \varepsilon_n \geq 0$. En particulier, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à support fini inclus dans le support de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Enfin, nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les situations possibles du jeu.

Dans la proposition suivante (que nous invitons à ne pas lire avant d'avoir travaillé le problème), nous donnons les situations gagnantes et perdantes pour le jeu en version classique (c'est-à-dire où le gagnant est celui qui prend le dernier jeton).

Proposition 1. *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une situation du jeu.*

- $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une situation gagnante si et seulement s'il existe une pile impaire (c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que p_n soit impair),*
- $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une situation perdante si et seulement si toutes les piles sont paires (c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est pair).*

Preuve. Notons tout d'abord qu'il n'y a qu'une seule situation finale et qu'elle est encodée par la suite nulle. En effet, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une situation du jeu telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $p_{n_0} > 0$, alors il est possible de jouer le coup qui consiste à enlever un jeton sur la pile n_0. Ainsi, il n'y a qu'une seule situation finale qui est la suite nulle et, comme nous sommes en version classique, c'est une situation perdante.

Soient maintenant

$$\mathcal{G} = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ p_n \text{ est impair}\} \text{ et } \mathcal{P} = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid \forall\, n \in \mathbb{N}, p_n \text{ est pair}\}$$

Montrons que pour tout $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$, il existe un coup $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel qu'après celui-ci, $(p_n - \varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$. Soit donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$ et définissons $I = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n \text{ est impair}\}$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout

1. Le *support* d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $p_n \neq 0$. On pourra remarquer que le fait de travailler avec des suites à support fini n'est pas important. On pourrait donc travailler avec des suites quelconques d'entiers positifs. En effet, cela revient, en termes de piles, à s'autoriser un nombre dénombrable de piles et de pouvoir enlever un nombre fini ou dénombrable de jetons (tant qu'on n'enlève pas plus d'un jeton par pile).

$n \in \mathbb{N}$ par

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, I étant non vide par définition de $\mathcal{G}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle et encode bien un coup possible. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si p_n est pair, $p_n - \varepsilon_n = p_n$ est un entier positif pair, et si p_n est impair, on a $p_n \geq 1$ et $p_n - \varepsilon_n = p_n - 1$ est un entier positif pair. En particulier, $(p_n - \varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$. Donc $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un coup qui donne une situation de $\mathcal{P}$.

Il reste à voir que pour toute situation $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ et pour tout coup $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possible à partir de cette situation, $(p_n - \varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$. Soit donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ une situation différente de la situation finale et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un coup possible à partir de cette situation. Par définition de $\mathcal{P}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est pair. Comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_{n_0} = 1$. En particulier, $p_{n_0} - \varepsilon_{n_0} = p_{n_0} - 1$ est impair et $(p_n - \varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$. □

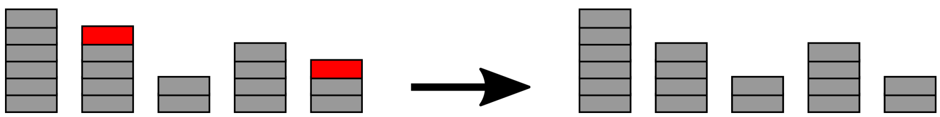


FIGURE 1 – Une situation gagnante à gauche et une situation perdante à droite. Les jetons en rouge correspondent au coup gagnant, c'est-à-dire aux jetons qu'ils faut enlever pour passer de la situation gagnante de gauche vers la situation perdante de droite.

2.2 Situations gagnantes et situations perdantes pour la version misère

Pour la version misère – celle où le joueur qui prend le dernier jeton est perdant – on peut prendre le même encodage pour les situations du jeu. Le résultat suivant détaille les situations gagnantes et les situations perdantes.

Proposition 2. *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une situation du jeu. S'il n'y a aucun jeton, la situation est gagnante. Sinon $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une situation gagnante si et seulement si on est dans l'un des cas suivants*

- *(G1) il n'y a qu'une seule pile non vide et celle-ci est paire,*
- *(G2) il y a au moins deux piles et au moins une pile est impaire.*

Elle est perdante si et seulement si on est dans l'un des cas suivants

- *(P1) il n'y a qu'une seule pile non vide et celle-ci est impaire,*
- *(P2) il y a au moins deux piles et toutes les piles sont paires.*

Preuve. Tout d'abord, la situation finale qui est gagnante en version misère est celle sans jeton.

Ensuite, si on a une situation satisfaisant (G1), il n'y a qu'un seul coup possible et celui-ci donne une situation satisfaisant (P1). De même, si on a une situation satisfaisant (P1), il n'y a qu'un seul coup possible et celui-ci donne la situation finale (qui est gagnante) ou une situation satisfaisant (G1).

Il reste donc à voir ce qui se passe avec une situation $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (G2) ou (P2). Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait (P2), alors comme toutes les piles sont paires, aucun coup ne peut permettre de prendre le dernier jeton d'une pile. Ainsi, on obtient nécessairement une situation satisfaisant (G2). Supposons enfin que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait (G2). Si on a que des piles avec un jeton, alors le joueur peut prendre tous les jetons sauf un et laisse une situation satisfaisant (P1) à l'adversaire. Si on a que des piles avec un jeton et une pile avec moins deux jetons, le joueur peut vider toutes les piles avec un jeton et, si la pile contenant au moins deux jetons est paire, en prendre un dans cette pile. Il laisse ainsi une situation satisfaisant (P1) à l'adversaire. Finalement, s'il y a au moins deux piles contenant plus d'un jeton, le joueur peut prendre un jeton dans toutes les piles impaires. Ainsi l'adversaire se retrouve avec une situation avec au moins deux piles, toutes les piles étant paires, ce qui est une situation satisfaisant (P2). □

3 Éléments d'analyse *a priori*

L'enjeu des situations reposant sur un jeu à deux joueur est double : déterminer une stratégie pour gagner et justifier, par des arguments mathématiques, que cette stratégie permet bien de gagner (et de terminer le jeu). Ici, pour la version classique, la stratégie à identifier est la suivante : s'il existe une pile impaire dans la configuration initiale, il *faut* et il *suffit* de commencer et de retirer un jeton dans les piles où le nombre de jetons est impair, sinon il *faut* et il *suffit* de laisser l'adversaire commencer puis de retirer un jeton dans les piles où le nombre de jetons est impair.

Pour les élèves la résolution mathématique du problème n'exige pas l'utilisation des suites. Il est tout à fait possible de raisonner en termes de n-uplets ou même, en fonction du niveau de la classe, de travailler sur plusieurs exemples génériques pour aborder la preuve. Les idées principales exprimées en langage naturel peuvent conduire à une argumentation convaincante.

La seule notion mathématique mobilisée est la parité sur les entiers naturels. Du point de vue des savoirs et des savoir-faire relatifs au raisonnement, les élèves sont amenés à chercher, conjecturer, à tester sur des situations avec peu de jetons, à raisonner en termes de conditions nécessaires et suffisantes. Les notions de situation perdante et de situation gagnante peuvent aussi être développées afin de favoriser les échanges entre les élèves et de faciliter les preuves.

Plusieurs éléments peuvent questionner les élèves et susciter une réflexion mathématique intéressante. Par exemple, il est à noter que la stratégie ne dépend ni du nombre total de jetons ni du nombre de piles de la situation initiale.

Notons, de plus, que la preuve ne repose pas sur l'identification de « petits cas » (en termes de nombre de piles ou de nombre de jetons) puis à la détermination d'une stratégie visant à se rabattre sur ces petits cas, comme cela peut être le cas dans d'autres situations ou dans des raisonnements par récurrence. Par exemple, une situation avec une seule pile de un jeton est perdante et constitue un cas simple, rapide à identifier. Cependant, il paraît moins évident que, par généralisation, toute situation de $n \geq 1$ piles ne contenant qu'un jeton est gagnante (dans la version classique). Ici, l'étude des « petits cas » est d'avantage utile à la formulation de conjectures qu'à la généralisation de la solution.

4 Retour d'expériences, éléments didactiques et problématiques de gestion

Cette situation a été expérimentée en diverses occasions et avec différentes variantes d'énoncé. La variante initiale avec des piles est présentée dans la première sous-section. L'énoncé a ensuite été modifié pour obtenir une variante « smarties » et une variante arithmétique avec la même résolution mathématique. L'intérêt de ce changement d'énoncé est d'élargir le champ des stratégies possibles ainsi que d'investir des notions d'arithmétique.

4.1 Versions classique et misère avec des piles

En classe, la variante avec des piles a été testée en 4$^{\text{ème}}$, 2$^{\text{de}}$, 1$^{\text{re}}$ STL, sur une séance standard de cours, à savoir pendant 55 minutes. Nous l'avons également proposée à nos collègues de l'IREM de Grenoble lors de notre rassemblement biannuel et avons pu effectuer des observations similaires à celles conduites en classe.

L'un des premiers problèmes auquel nous avons été confrontés est la formulation de l'énoncé. Dans sa version classique, la règle du jeu est présentée comme suit :

> *C'est un jeu à deux joueurs ou deux équipes. On dispose de plusieurs piles de jetons de hauteurs quelconques. Chaque joueur à tour de rôle enlève un jeton sur les piles de son choix. Il faut choisir au moins une pile. Le joueur qui perd est celui qui ne peut plus jouer. Comment gagner ?*

Nous proposons aux élèves un bref temps de lecture et de compréhension de l'énoncé avant de leur distribuer les jetons. Par une mise en commun, nous nous assurons que la règle est bien comprise par tous puis nous les laissons jouer avec les jetons que nous leur distribuons. Les élèves s'approprient bien la consigne donnée et entrent sans problème dans la phase de jeu et de premières observations.

Le nombre de jetons distribués a son importance. Nous avons observé que les élèves commencent systématiquement par jouer avec l'ensemble des jetons dont ils disposent. En leur en distribuant plus d'une quinzaine, les parties deviennent très longues et les coups possibles multiples. Après une première expérimentation où nous avons distribué 25 jetons à chaque groupe, nous avons plutôt opté pour 10 ou 15 jetons. Pour les groupes qui ne s'autoriseraient pas à mettre de côté certains jetons, il peut être utile de leur signaler que la consigne ne les contraint pas à tous les utiliser, une fois qu'ils se sont engagés dans la réflexion mathématique.

Notons tout de même que la parité du nombre de jetons distribués a une influence sur les situations initiales possibles. Si le nombre de jetons distribué n est impair alors toutes les situations initiales à n jetons comporteront au moins une pile impaire (d'ailleurs il y a un nombre impair de piles impaires). Dans ce cas, le premier joueur est toujours gagnant, à condition qu'il applique la bonne stratégie. Dans le cas où n est pair, les situations initiales peuvent ou non comporter des piles avec un nombre impair de jetons, et le premier joueur n'est pas toujours le joueur gagnant. Le problème ne se pose pas si les élèves font varier le nombre total de jetons, mais les expérimentations ont montré qu'ils ne s'approprient que très peu cette variable de recherche.

Une limite principale de cette situation est son faible nombre de stratégies de résolution possibles. Les élèves jouent, identifient quelques cas particuliers et la manière de jouer dans ces cas particuliers (par exemple pour le couple (2,1) ou pour les situations avec une seule pile même si ce cas est moins souvent traité par les élèves) mais peinent à mettre en œuvre une recherche méthodique de stratégie. Certains ont l'intuition que tout se joue sur la parité, parfois après avoir étudié le cas avec une seule pile, et la stratégie en découle relativement rapidement. Sa justification mathématique, en revanche, leur est difficile à formaliser correctement, notamment le fait qu'en prenant un jeton sur une pile au nombre impair de jetons, le joueur laisse à son adversaire une pile avec un nombre pair de jetons (il y a là quelque chose de l'ordre de l'« évidence » que les élèves n'arrivent pas facilement à exprimer et qui est pourtant au cœur de la preuve).

De plus, certains groupes peinent parfois à tirer des conclusions de leurs observations, soit parce qu'ils sont peu méthodiques, soit parce qu'au contraire ils le sont trop et cherchent une exhaustivité des coups possibles sur des situations avec un grand nombre de jetons, soit encore parce qu'ils restent dans la phase de jeu et ne saisissent pas l'enjeu mathématique associé. Pour ceux-là, l'aide de l'encadrant est primordiale (non qu'elle ne le soit pas déjà pour les autres mais, ici, le risque est plus grand que les élèves se lassent). Il peut donc jouer contre les élèves en leur proposant une situation initiale, les inciter à utiliser moins de jetons, expliciter plus clairement le problème posé etc.

Dans tous les cas, le passage à une généralisation n'est pas évident. Si la majorité des élèves, en une heure, parvient à identifier la stratégie pour gagner et à la justifier de façon suffisante pour leur niveau scolaire (ce qui est en soi déjà une réussite), il n'est pas toujours clair pour eux que cette stratégie se généralise, peu importe le nombre de piles et/ou de jetons initiaux, alors que c'est un enjeu crucial de cette situation.

Aux élèves qui déterminent la stratégie gagnante avant la fin de la séance, nous proposons de réfléchir à la version misère du jeu. Une première intuition des élèves est de considérer que les situations gagnantes et perdantes s'inversent par rapport à la version classique. Par le jeu, ils constatent assez rapidement que « ce n'est pas si simple » et c'est là, à notre sens, une première observation suffisante pour une majorité des élèves, compte tenu du temps qui leur est imparti. Les groupes les plus avancés de 1$^{\text{ère}}$ STL ont cependant réussi à déterminer complètement la stratégie gagnante pour la version misère, ce qui nous laisse penser que celle-ci est accessible dès lors qu'un temps suffisant est laissé aux élèves mais avec des phénomènes de lassitude dus au caractère « astucieux » de la solution.

Enfin, nous recommandons aux enseignants de ne pas demander aux élèves de prendre note de leurs parties dès le début de l'activité. En effet, déterminer une manière de consigner les parties jouées et les différents coups est complexe, surtout pour les niveaux qui ne seraient pas familiers avec un formalisme mathématique poussé (n-uplets, notamment) et peut leur faire perdre un temps considérable qu'ils ne passeraient pas à étudier le problème posé. Nous conseillons qu'il leur soit demandé de noter leurs observations et leurs conjectures, éventuellement quelques parties qui mettent en lumière la stratégie identifiée, ainsi que les arguments mathématiques qui justifient cette stratégie.

4.2 Une variante « smarties »

Une autre présentation possible est d'utiliser des jetons de couleurs (ou tous autres objets de différentes couleurs) à la place des piles. Voici un énoncé possible dans ce contexte.

> *Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. On dispose d'un nombre strictement positif de jetons de couleurs. Chaque joueur à tour de rôle doit enlever un ou plusieurs jetons, tous de couleurs différentes. Celui qui prend le ou les derniers jetons gagne.*

Là encore, les deux versions, classique (comme au dessus) ou misère (celui qui prend le dernier jeton a perdu) du jeu sont possibles. Nous avons expérimenté cette variante pendant une séance du club de mathématiques de l'IREM de Grenoble, pendant les journées de l'APMEP ainsi que dans une classe préparatoire à la licence pour les parcours scientifiques de l'UGA.

Au club de mathématiques, elle a été proposée à une dizaine d'élèves dont les niveaux varient du CE2 à la terminale. Les plus grands ont résolu la version classique et la version misère en moins d'une heure (rappelons tout de même que se sont des jeunes inscrits dans un club de mathématiques qui a lieu le dimanche matin !). Les collégiens et les élèves de « fin de primaire » ont réussi en à peu près une heure à comprendre la version classique. Au cours de cette expérience, nous avons aussi remarqué que la présentation en « smarties » (c'était d'ailleurs comme ça qu'était amené le jeu) permet une manipulation plus libre des jetons par rapport à la variante du jeu avec des piles. Par exemple, un élève de CM1 a organisé ses jetons en les mettant par paires de la même couleur, ce qui faisait apparaître des jetons solitaires pour les couleurs avec un nombre impair de jetons (voir Figure 2. Sa stratégie était alors d'enlever les jetons solitaires. Il a ainsi trouvé la stratégie gagnante sans mention de la parité ou de l'imparité du nombre de jetons d'une couleur.

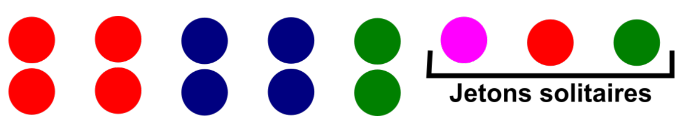


FIGURE 2 – Illustration de l'organisation des jetons par paires de la même couleur et de jetons solitaires.

Cette variante a également pu être testée en année préparatoire à la licence pour les parcours scientifiques avec un groupe de trois étudiants et un autre de deux étudiants avec la spécificité que dans ce cadre, les étudiants étaient ensuite chargés de présenter le jeu et faire jouer leurs camarades. Tout d'abord, le fait de constituer des piles de la même couleur était assez naturel. Après avoir décelé des situations perdantes particulières (2-2, puis 2-2-2, puis 2-2-2-2 et 4-4-4-4), ils conjecturent et se convainquent que les situations avec toutes les couleurs possédant 2 où 4 jetons sont perdantes. Ils trouvent alors la stratégie gagnante après environ 35 minutes de réflexion. En guise de preuve de la stratégie, un étudiant donne un argument intéressant : « je m'arrange avec la stratégie pour laisser que des piles paires à l'adversaire, donc c'est moi qui vais prendre les jetons des piles impaires, donc c'est moi qui vais prendre le dernier jeton de chaque pile ». Concernant la version misère, ils y réfléchissent quelques minutes et comprennent rapidement que la stratégie est semblable à la précédente, mais ils n'ont pas le temps d'aboutir à une conclusion dans les 45 minutes accordées. Enfin, en faisant jouer les autres dans un temps imparti (le temps de leur présentation), les étudiants prennent aussi conscience de l'importance d'utiliser des petits cas au début.

Pendant les expérimentations aux journées de l'APMEP, en distribuant 5 paquets de 5 couleurs, nous avons pu en plus observer des stratégies non concluantes comme prendre le complémentaire de ce que l'adversaire a pris (« il prend 3 couleurs, donc je prends les 2 autres qu'il n'a pas pris ») ou éliminer toutes les couleurs sauf une pour se ramener au cas avec une seule couleur qui avait été bien étudié.

4.3 Une variante arithmétique

La dernière présentation que nous avons testée est une variante arithmétique avec l'énoncé suivant :

> *C'est un jeu à deux joueurs. On commence avec un nombre entier strictement plus grand que 1. Chaque joueur à tour de rôle divise le nombre par un facteur premier ou un produit de facteurs premiers distincts. Le joueur suivant continue avec le nombre obtenu. Celui qui obtient 1 a gagné. Déterminer une stratégie pour gagner.*

En faisant correspondre les facteurs premiers de la décomposition à une couleur (ou à une pile) et leur multiplicité au nombre de jetons de cette couleur (ou au nombre de jetons de la pile), on se ramène aux jeux précédents. Les situations perdantes sont les carrés parfaits, tous les autres nombres étant des situations gagnantes. La stratégie gagnante est donc de laisser un carré parfait à l'adversaire. Bien évidemment, on n'attendra pas des élèves de faire ce rapprochement, uniquement accessible après avoir travaillé sur au moins une des variantes précédentes.

Cette variante a été testée dans une classe de $\mathrm{T^{le}}$ spé maths sur 1h10 de travail et 10 minutes d'institutionnalisation. Il s'agit ici d'un énoncé plus complexe qui met en jeu des notions d'arithmétique comme *nombre premier* et *facteur premier* ou encore *décomposition en facteurs premiers* lesquelles semblent poser des difficultés.

Une première aide sous forme d'exemple a été nécessaire pour s'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé par chaque groupe. Les élèves s'investissent ensuite dans la recherche du problème mais aucune stratégie correcte n'est formulée à la fin de la première heure. Une élève de maths expertes s'approche en énonçant « si on a un carré, on ne peut pas donner un carré à l'adversaire ».

Après la pause, il est proposé aux élèves de lister tous les nombres inférieurs à 20 et de tester si on peut gagner ou pas. Certains groupes avait déjà pensé à cette méthode de recherche mais des erreurs subsistaient dans la liste, par exemple pour le nombre 12 qui est une situation gagnante si on joue correctement.

Malgré l'intérêt montré dans la démarche de recherche, les groupes n'ont pas réussi à trouver une stratégie gagnante et se sont souvent perdus dans un formalisme excessif.

Annexe - Modélisation avec des graphes et coloriage

D'un point de vue théorique on peut ramener un jeu de Nim à un jeu sur un graphe orienté sans cycle (pour que le jeu ne puisse pas boucler) sur lequel les joueurs déplacent une pièce tour à tour d'un sommet à l'autre en suivant les arêtes orientées issues des sommets. Les sommets du graphes correspondent aux situations possibles du jeu, la position de la pièce indiquant ainsi dans quelle situation est le jeu, et les arêtes orientées aux coups possibles qui permettent de passer d'une situation à une autre. Par exemple, sur la Figure 3 on peut voir en haut à gauche le graphe pour le jeu des piles dont la position initiale serait avec deux piles, une avec trois jetons et une avec deux jetons. Les sommets du graphe desquels aucune arête ne part sont alors les positions finales du jeu. Si un joueur tombe sur l'un de ces sommets, il gagne en version classique alors qu'en version misère, il perd.

Avec cette modélisation, partitionner les situations du jeu en situations gagnantes et situations perdantes revient alors à colorier les sommets du graphe avec deux couleurs, vert et rouge disons, vérifiant les propriétés suivantes : si S est un sommet du graphe,

- (F) si S est un sommet dont aucune arête de part (donc correspondant aux situations finales du jeu), alors il est en rouge si le jeu est en version classique et en vert si le jeu est en version misère ; sinon,
- (V) si S est vert et n'est pas un sommet final, alors **il existe** une arête issue de S pointant vers un sommet rouge,
- (G) si S est rouge et n'est pas un sommet final, alors **toutes** les arêtes issues de S pointent vers un sommet vert.

La figure 3 présente un tel coloriage en version classique et en version misère pour le jeu des piles dont la position initiale serait avec deux piles, une avec trois jetons et une avec deux jetons.

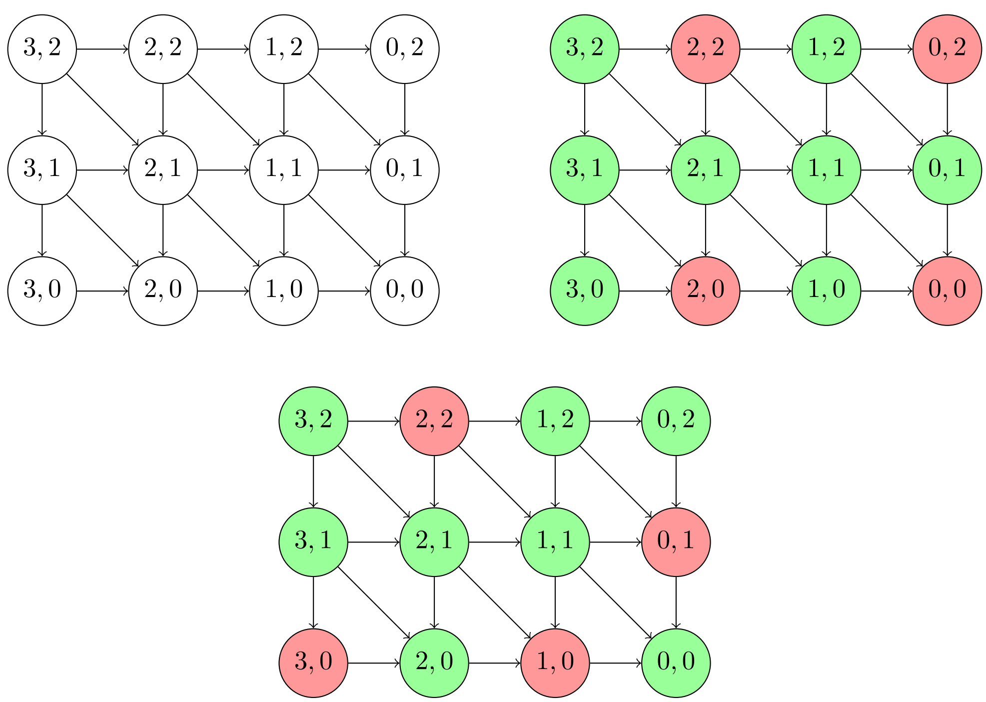


FIGURE 3 – En haut à gauche, une représentation des situations du jeu accessibles à partir de deux piles, une à 3 jetons et une à 2 jetons (les couples indiqués dans les sommets correspondent aux nombres de jetons par pile). Les deux autres graphes correspondent au même graphe après coloration en version classique (en haut à droite) et en version misère (en dessous).

Procédure de coloriage et existence En pratique, sur des graphes finis, on peut construire un tel coloriage en coloriant d'abord les situations finales (en rouge si on est en version classique ou en vert si on est en version misère). Puis on regarde, parmi les sommets qui ne sont pas encore coloriés, ceux dont les arêtes ne pointent que vers des arêtes colorées (cela existe sinon on pourrait construire un cycle ou un chemin infini d'arêtes passant par des sommets non colorés), et on colorie chacun d'eux en rouge si toutes les arêtes issues de celui-ci ne pointent que vers des sommets verts ou en vert s'il existe une arête issue de celui-ci qui pointe vers un sommet rouge. On recommence ensuite à partir de ce nouveau coloriage partiel en cherchant les nouveaux sommets non coloriés dont toutes les arêtes pointent vers des sommets déjà colorés et ainsi de suite.

On pourrait se poser la question sur des graphes infinis, ce qui arrive naturellement lorsqu'on veut considérer certains jeux, comme le jeu présenté ici, en tout généralité en faisant varier tous les paramètres du jeu (ici le nombre de piles et le nombre de jetons par piles). Étant donné l'unicité du coloriage lorsqu'il existe (grâce à la correspondance avec les situations gagnantes et perdantes car une situation ne peut être gagnante et perdante à la fois) il suffit de voir que tous les sommets du graphe peuvent être coloriés. Pour s'en convaincre, on peut considérer un sommet S du graphe et le sous-graphe G constitué de tous les sommets accessibles à partir de S. Comme il n'existe pas de chemin infini, G est forcément fini[2] et la procédure de coloriage donnée précédemment (qui peut être appliquée car les arêtes issues de sommets de G ne pointent que vers des sommets de G par construction) permet de colorier G en entier et en particulier le sommet S. Ceci étant vrai pour tout sommet S duquel on est parti, on peut colorier n'importe quel sommet du graphe initial, même si celui-ci est infini.

2. On travaille implicitement ici avec des graphes orientés où l'ensemble des arêtes issu d'un sommet donné est fini. Sous cette hypothèse, la condition de non existence de chemin infini est équivalente à la propriété pour tout sommet S, le supremum des longueurs d'un chemin issue de S est finie ce qui est alors équivalent au fait que le sous-graphe G considéré ici est fini (toujours avec l'hypothèse de finitude du nombre d'arêtes issus d'un sommet).