SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

pour le collège et le lycée… et au-delà

Cet ouvrage vous est proposé par le groupe « Logique, raisonnement et SIRC » de l'IREM de Grenoble. Il est le résultat d'un travail sur plusieurs années du groupe IREM composé des personnes ci-après.

Denise GRENIER, université Grenoble Alpes

Roland BACHER, université Grenoble-Alpes
Hervé BARBE, Institution Ohalei Mena'Hem HABAD, Genève
Emmanuel BEFFARA, université d'Aix-Marseille
Yvan BICAÏS, collège Le Massegu, Vif
Grégoire CHARLOT, université Grenoble Alpes
Monique DECAUWERT, université de Savoie Mont-Blanc
Martin DERAUX, université Grenoble Alpes
Tarkan GEZER, INSA, Lyon
Jean-Baptiste MEILHAN, université Grenoble Alpes
Frédéric MOUTON, lycée Berthollet, Annecy

avec la participation de Charlotte FABERT

Sommaire

Introduction

Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la démarche mathématique

Cet ouvrage est destiné aux enseignants de mathématiques, aux formateurs d'enseignants, aux chercheurs sur l'enseignement, et aussi à toute personne intéressée par une activité mathématique ludique.

Dans toute communauté scientifique, le savoir se construit par la résolution de problèmes, par la recherche de solutions à des questions. En mathématiques, l'activité du chercheur est constituée de tâches et de moments différents tels que l'expérimentation, la résolution de cas particuliers, l'étude de conjectures… Être bloqué, se tromper, se fourvoyer font partie du processus de construction des connaissances. Les savoir-faire associés sont constitutifs de la démarche expérimentale en sciences et ne peuvent pas être réduits à des techniques ou à des méthodes. L'apprentissage des mathématiques ne se réduit pas à apprendre une liste de définitions et de théorèmes. Au-delà des notions enseignées, il s'agit surtout de faire l'apprentissage de la démarche mathématique. Qu'entendons-nous par cela ?

– S'approprier un problème (étude des cas particuliers, définir,…)
– Conjecturer
– Essayer différents types de raisonnement
– Savoir revenir à la question/ Conjecture et modifier/généraliser
– Prouver.

En situation de recherche, il faut se permettre une certaine liberté et une part d'imprévu pour réussir. Le chercheur doit choisir lui-même le cadre de résolution, modifier éventuellement les règles ou les données pour expérimenter, définir les objets et s'autoriser à modifier la question initiale. Tous ces savoirs et savoir-faire sont aux fondements des mathématiques. I**ls figurent d'ailleurs explicitement parmi les objectifs des programmes de collège et lycée.** Certains manuels proposent des problèmes susceptibles de remplir ces objectifs, mais ils sont peu nombreux, probablement parce qu'il n'est pas facile de construire et gérer ce type d'activités dans le temps de la classe.

Nous sommes convaincus que la confrontation avec des « situations de recherche » est propice à l'apprentissage des mathématiques. Évidemment, les problèmes de recherche ne peuvent être dévolus tels quels. Il faut donc inventer des situations spécifiques, c'est-à-dire des problèmes adaptés, et trouver la meilleure mise en scène adaptée au contexte (classe, ateliers scientifiques, musées, …).

L'ouvrage comporte un ensemble de « situations de recherche pour la classe » qui ont été construites, étudiées et expérimentées de nombreuses fois par notre groupe IREM. Pour chacune de ces situations, nous donnons des éléments de résolution et une analyse didactique consistant pour l'essentiel à répondre aux questions suivantes : quelles connaissances sont nécessaires pour chercher et résoudre ces problèmes, quelles sont les solutions et les procédures de résolution accessibles aux élèves, quels apprentissages sont mis en jeu.

Ces situations sont prévues pour un travail en groupes dans la classe, sur un temps plus ou moins long selon le problème posé, avec des moments de synthèse collectifs et d'institutionnalisation par l'enseignant, celle-ci permettant de préciser avec les élèves ce qu'il faut retenir de la situation.
Ce que nous désignons par « situations de recherche » (SiRC) a été caractérisé par les chercheurs de l'équipe fédérative Maths-à-modeler, qui les étudient du point de vue théorique et pratique. Cette équipe s'attache depuis des années à l'étude de ces conditions. Nous disposons actuellement d'« analyses a priori » fiables pour quelques-unes de ces SiRC, résultats de nombreuses expérimentations que nous avons menées dans des institutions et à niveaux scolaires très différents.

Notre groupe IREM a repris quelques-unes de ces situations pour étudier leur pratique en classe, et en a construit de nouvelles.

Trois aspects fondamentaux sont présents dans les SiRC, qui sont peu présents, voire absents, dans la classe usuelle.

– *L'« enjeu de vérité »*. En classe, usuellement, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), ou évident, il n'y a pas d'enjeu de vérité.

– *L'aspect « social » de l'activité*. Dans une SiRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe d'élèves + enseignant et/ou chercheur).

– *L'aspect « recherche ».* Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est attendu et déclaré que, pour résoudre un problème et pour démontrer, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne nous semble contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique.

Qu'est-ce donc qu'une SiRC ?

La caractérisation des SiRC (Situations de Recherche pour la Classe) donnée ci-dessous s'inspire largement de la définition initiale due à Payan-Grenier (2003) :

– La question est appréhendable et éveille la curiosité. Il n'y a pas de pré-requis technique, on entre rapidement dans le problème par des stratégies initiales faciles d'accès.

– La question n'induit pas l'utilisation d'une méthode de résolution privilégiée, plusieurs stratégies peuvent amener à la résolution du problème.

– La situation se prête facilement à l'expérimentation, par exemple par des stratégies du type essai/erreur ou étude de petits cas.

– L'expérience amène naturellement à formuler des conjectures et à se faire une intuition sur la question (sans nécessairement fournir une résolution complète).

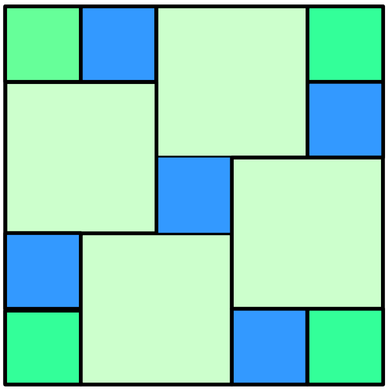
– L'expérience suggère de nouvelles questions, des variantes du problème de départ, des généralisations (y compris certaines pour lesquelles l'enseignant n'a pas de solution).

Bien entendu, ces critères sont à nuancer en fonction des objectifs, des goûts, des cultures et des intérêts des participants. La plupart des activités décrites dans cet ouvrage sont accessibles à des niveaux très divers, de 7 à 77 ans.
Ces caractéristiques et contraintes entraînent des conditions de réalisation et de gestion particulières, nous en donnons des éléments dans l'ouvrage.

Organisation des chapitres de l'ouvrage

Chaque chapitre correspond à une situation de recherche. Le lecteur y trouvera l'énoncé, des éléments d'organisation et de gestion en classe, une analyse mathématique et didactique du problème posé (avec une description de ce qui peut se passer en classe, basée sur nos expériences), et parfois des propositions de variantes « pour aller plus loin ». Nous avons joint parfois des copies de productions d'élèves. L'analyse mathématique est à destination de l'enseignant, elle n'est pas obligatoire pour la réalisation en classe.
Chaque chapitre a été écrit par un ou plusieurs membres de notre groupe (à géométrie variable selon les années). Ils ont donc leur propre « personnalité » et peuvent se présenter sous des formes un peu différentes les uns des autres. Ce qui fait l'unité de cet ouvrage est notre objectif commun de proposer aux lecteurs des problèmes de recherche pour le collège et le lycée avec des élemnts pour les faire fonctionner en classe. Chaque chapitre se termine par une fiche-élève, prête à être distribuée dans la classe.
Pour résumer, une bonne SiRC doit éveiller la curiosité de tout interlocuteur …
Nous espérons que vous serez convaincus !

Partage d'un carré en *n* carrés



Cette situation a été construite et étudiée à tous les niveaux scolaires par notre groupe IREM.

1. Le problème

> On se donne un carré de taille quelconque. Pour quelles valeurs de n peut-on paver ce carré en n carrés ?

Deux remarques

1. Vous avez probablement très vite pensé à un partage en quatre carrés (donc une solution pour n=4). Ceci peut servir de départ pour chercher d'autres valeurs de n. Nous proposons ci-après une consigne qui fonctionne très bien pour tous les niveaux du collège et le début du lycée.

2. Nos nombreuses expérimentations ont montré que cette situation de recherche est pertinente pour tous les niveaux du Secondaire (et au-delà) – c'est-à-dire qu'elle permet de travailler avec les élèves différents types de raisonnements numérico-géométriques, le raisonnement inductif et la construction algorithmique de solutions. Bien sûr, on ne fait pas tout-à-fait le même travail de preuve en Sixième ou en Terminale, encore que ...

2. Gestion et matériel pour la situation

Un stylo, quelques feuilles et éventuellement une règle suffisent. Le travail collaboratif en groupes (de deux ou trois élèves) permet à la fois d'assurer la dévolution de la question et la résolution du problème et, à l'enseignant, de repérer ce que font les élèves, lorsqu'ils échangent oralement leurs idées. Cette activité peut être réalisée en une heure, quel que soit le niveau de la classe – l'enseignant peut ensuite prendre un autre moment en classe pour faire une synthèse des connaissances travaillées.

3. Une organisation didactique qui a fait ses preuves au collège

L'enseignant trace un carré au tableau, à main levée, puis pose la question :

Pourriez-vous partager ce carré en six carrés ?

Puis il peut tracer au tableau deux colonnes, l'une contiendra les valeurs de n pour lesquelles un groupe a trouvé une solution, l'autre, le dessin correspondant, qui devra être validé par la classe entière. Ainsi, dès qu'un groupe a une solution, un de ses membres vient au tableau écrire la valeur de n et tracer le dessin correspondant. Cette organisation didactique crée un challenge entre les groupes – chercher des solutions pour les valeurs de n non encore résolues, et un investissement de tous les élèves, qui peuvent vérifier collectivement la validité des solutions proposées. La première valeur généralement donnée immédiatement par les élèves est n=4, et le dessin sert d'exemple initial.

Choix pour la gestion en classe

Proposer de commencer par le cas n=6 a plusieurs intérêts (faites-le vous-même et vous en serez convaincu) :
– il est assez facile de trouver une solution, à condition de ne pas hésiter à expérimenter, c'est-à-dire faire des essais divers et les étudier,
– les solutions trouvées peuvent être validées (ou invalidées) facilement par les élèves eux-mêmes, les propriétés géométriques en jeu sont connues.

Quand un nombre suffisant de solutions est écrit au tableau, l'enseignant peut reposer la question générale « Pour quelles valeurs de n peut-on partager un carré en n carrés ? », ou encore « Est-ce possible pour n=17 ? Et pour n=123 ? » (ou toute autre valeur de n qui n'a pas été proposée par les élèves).

La phase de synthèse consiste à faire expliciter par les élèves leurs conjectures sur les valeurs de n pour lesquelles il y a des solutions et celles pour lesquelles il n'y en a pas, puis d'étudier ces conjectures, qui peuvent être justes ou fausses.

Les preuves accessibles dès le collège

Pour les petites valeurs de n admettant une solution, la preuve est facile d'accès : il suffit de valider la solution dessinée (essentiellement que tous les carrés sont bien des carrés, et qu'il y en a bien n).

Pour de grandes valeurs de n admettant une solution ($n=19^2$ par exemple) , on ne peut pas dessiner les n carrés de la partition, mais on peut expliquer comment on ferait pour les dessiner. Ceci met en jeu un double raisonnement inductif et algorithmique basé sur un type de construction particulier du partage du carré initial. Les algorithmes de construction (voire de déconstruction) – qui permettent de résoudre le problème pour toutes les valeurs de n admettant un partage – est simple à mettre en place dans l'action, mais son explicitation demande un travail collectif avec l'enseignant.
Pour les valeurs de n pour lesquelles il n'y a pas de solution, les preuves nécessitent des raisonnements géométriques accessibles. Des conjectures pourront se révéler fausses (si finalement il y a des solutions … comme pour n=17 !)

4. Résolution mathématique

Finalement, il s'agit de démontrer les résultats suivants :

Il existe un pavage de n carrés pour tout entier n supérieur ou égal à six, et bien sûr pour n=1 et n=4.

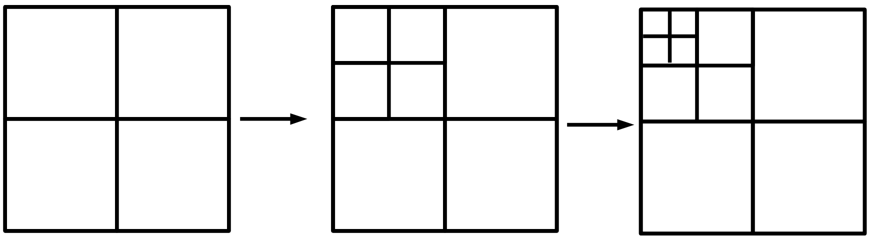
Il n'y a pas de solution pour n=2, 3 et 5.

4.1 Étude des cas où la construction est possible

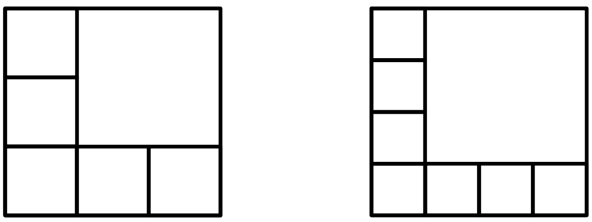
Les deux preuves ci-après sont liées à des techniques de construction différentes.

Première preuve

Notons P(n) la propriété « Il existe un pavage d'un carré quelconque par n carrés ».
Il est clair que P(1) est vraie. En traçant les segments reliant les milieux des sommets opposés, on voit qu'il en va de même pour P(4).
Sur le carré partagé en 4, on peut repartager un des carrés en quatre carrés, on obtient ainsi un partage en 7 carrés (4+(4–1)). En répétant cet algorithme, on construit ainsi successivement des partages en 4, 7, 10, 13, etc.. Ceci permet d'établir qu'il existe un partage pour tous les nombres n de la forme $n=3k+1$, $k \in \mathbb{N}$.



Cette technique de construction permet de construire aussi une solution pour tous les n de la forme $n= 3k+2$ ou $n= 3k$, à partir d'une valeur de k pour laquelle on a trouvé une solution. Et il y a des solutions « faciles » pour n=6 et n=8, par exemple celles ci-dessous.



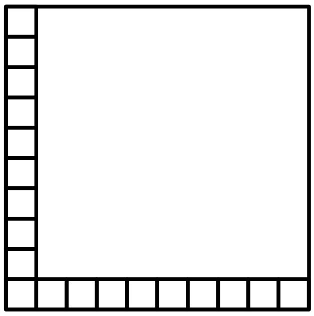
On a donc construit trois suites de nombres qui couvrent toutes les valeurs de n à partir de n=6. Il ne restera plus qu'à étudier les cas n=2, 3 ou 5.

Seconde preuve

Les partages pour n=6 et n=8 ci-dessus peuvent être généralisés et donnent une construction pour tous les n pairs, donc de la forme $n=2k$, $k \geq 2$.

Il suffit de partager le carré initial en deux bandes de carrés de côtés de longueur k (il y en a $2k-1$) et un carré de côté de longueur $k-1$.

Par exemple n=20



Il reste alors à étudier tous les n impairs.

Deux remarques :
– Si nous avons une solution avec p carrés et une avec q carrés, en insérant la seconde dans un carré de la première nous obtenons une solution à $p+q-1$ carrés. Nous avons utilisé cette méthode avec q=4.
– Le raisonnement utilisé pour obtenir une subdivision en six ou huit carrés en bordant un carré donné permet d'emblée de valider P(n) pour tout n pair tel que $n \geq 4$.
Il s'en suit que, si on utilise l'égalité $2n+1=2(n-3)+7$, on valide P(n) pour tout $n \geq 7$.

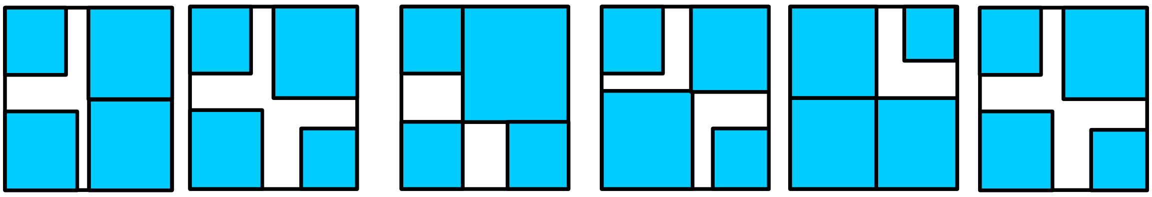
Exercice. Ces partages ne sont pas uniques. Par exemple, pour n=13, il en existe quatre utilisant des carrés en tailles et nombres différents.

4.2 Preuve de l'impossibilité d'un tel partage pour n=2, 3 ou 5.

Remarquons que, d'une part, chaque sommet du carré initial est le sommet d'un carré pavant et que, d'autre part, un carré pavant ne peut contenir deux sommets du carré initial (car cela donne la solution triviale n=1). Ceci nous permet d'affirmer qu'un pavage nécessite au moins quatre carrés. Il n'y a donc pas de solution pour n=2 ou 3.

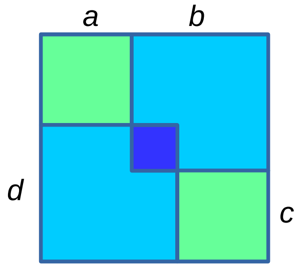
Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas n=5.

Supposons donné un carré pavé par cinq carrés. Quatre de ces carrés contiennent chacun un des sommets du carré initial. La partie non couverte par ces quatre carrés est un polygone qui devrait être le cinquième carré du pavage. Si les quatre carrés contenant les sommets ne « remplissent pas le grand carré, alors on a les figures possibles suivantes (à des symétries près) :



Enfin, si certains des quatre carrés se chevauchent, la seule solution pour qu'ils constituent un partage est que le carré de chevauchement soit réduit à un point, on a alors une partition en 4 carrés et non en 5 carrés.

Si on note a (resp. b, c, d) les côtés de ces carrés, la longueur du côté du grand carré est alors : $a+b=a+d=b+c=c+d$. Ceci entraîne que $a=c$ et $b=d$.

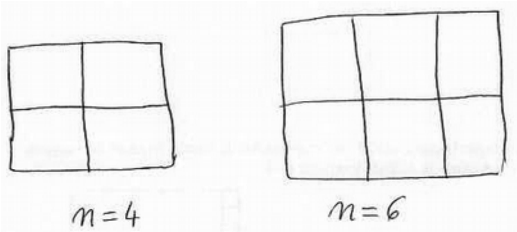


Si on soustrait la somme des aires des petits carrés à celle du grand, on obtient $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2(a^2+b^2) = (a+b)^2+(a-b)^2$, qui montre que les quatre carrés recouvrent le grand carré et ils le pavent si et seulement si $a=b=c=d$. Il n'y a pas de place pour un cinquième carré.

5. Résultats expérimentaux

À tous les niveaux de collège et de lycée, le problème est en grande partie résolu en une heure de temps, c'est-à-dire : le élèves ont trouvé les bonnes conjectures et plusieurs « algorithmes » pour construire les découpages, ils sont donc prêts à répondre lorsqu'on leur donne n'importe quelle valeur raisonnable de n. L'enseignant peut, s'il le souhaite, consacrer éventuellement le début du cours suivant pour faire une synthèse et des preuves.

En général, les premières solutions qui sont proposées correspondent aux valeurs de n qui sont des carrés parfaits : 4, 16, 25, etc. La question de savoir si les carreaux du pavage doivent être tous de même taille est souvent très vite posée. Ce à quoi l'enseignant peut répondre que l'on n'a jamais fait cette hypothèse (supplémentaire).
L'évidence de la solution pour n=4 induit très souvent une proposition immédiate d'un ou plusieurs élèves pour n=6, qui s'avère fausse (cf. figure ci-après) et donne une bonne occasion de préciser la nécessité de contrôler les dessins à main levée par des arguments géométriques.



Les essais de tracés font émerger des techniques de construction différentes selon les groupes d'élèves, qui conduisent à des résultats partiels complémentaires, ou qui se recoupent : un groupe va, par exemple, trouver que c'est possible pour tous les nombres pairs, un autre pour tous les $4+3k$, etc. L'enseignant peut alors demander aux élèves de faire la liste de toutes les valeurs de n que l'on atteint par l'un ou l'autre de ces algorithmes.

Les preuves de non-existence de pavage sont de niveaux différents : pour n=2 et n=3, les preuves sont accessibles dès la classe de Sixième. Pour n=2, on peut faire démontrer aux élèves le résultat suivant : si on partage un carré en deux parties par une droite parallèle aux bords, on obtient deux rectangles non carrés. Pour n=3, un raisonnement fréquent consiste à tracer l'exhaustivité des partages possibles d'un carré en trois rectangles ne s'intersectant pas et remplissant tous le carré. On peut aussi faire la preuve donnée au §4.2, qui règle les deux cas en même temps, en posant la question : « est-ce qu'un coin du carré peut appartenir au même pavé carré ?
Pour n=5, la preuve est difficile, on admettra les résultats au collège (on peut en donner l'idée), ils pourront être démontrés au lycée.

En Terminale S, des éléments de preuve peuvent être attendus des élèves eux-mêmes. L'enseignant peut, à l'occasion de cette activité, organiser un travail sur la preuve par récurrence, en demandant de démontrer que, pour tout $n \geq 6$, la propriété P(n) : « tout carré admet un pavage en n carrés » est vraie. L'écriture de l'hérédité est subtile, car il faut l'établir pour les trois types de valeurs de n et $\forall\ k \in \mathbb{N}$: pour n=3k à partir de n=6, pour n=3k+1 à partir de n=7, et pour n=3k+2, à partir de n=8. La nécessité de vérifier l'initialisation est induite par le travail de la phase expérimentale : par exemple, un élève peut affirmer « On sait faire pour tous les 5+3k, mais il reste à trouver le pavage pour n=5 », pour finalement conclure que « ça ne semble pas possible pour n=5, mais on peut commencer à 8 ».

De plus, au collège et au début du lycée, cette activité peut être une occasion de montrer la nécessité d'un langage commun et de règles précises pour expliquer les raisonnements et valider les résultats. Il ne suffit pas d'avoir compris mais encore faut-il convaincre ses pairs et son enseignant.
On peut aussi signaler que c'est une bonne occasion d'apprendre à construire et raisonner sur des figures « à main levée » approximatives mais soignées, la validation se basant sur des arguments géométriques théoriques.
Nos expériences montrent qu'il faut éviter le papier quadrillé, car il peut perturber la représentation du problème : par exemple, il peut induire de manière erronée qu'un carré tracé sur un quadrillage de 3×3 (donc, contenant neuf carreaux) ne peut être partagé en quatre carrés !

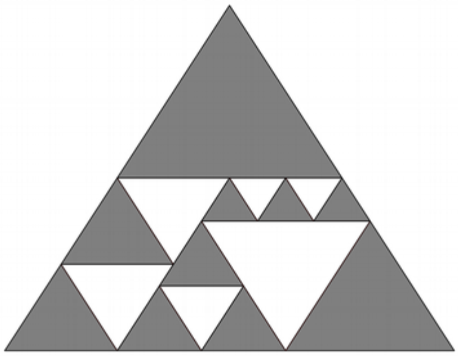
6. Une autre manière de poser le problème

On peut transformer la question ainsi :
« Est-il possible de construire un carré avec six carrés, avec 5 carrés, 7 carrés, etc.. ».

Nous laissons au lecteur l'étude de cette nouvelle consigne : en quoi la tâche est-elle différente ou semblable à celle du problème que nous avons étudié ?
Elle peut être proposée à des élèves avec du matériel : carreaux de tailles 1, 2 3 etc.. . La manipulation va consister à choisir des carreaux de tailles diverses pour réaliser un carré. Ce qui n'est pas le même travail que le partage d'un carré donné en carrés.

7. Pour aller plus loin. Une variante du problème

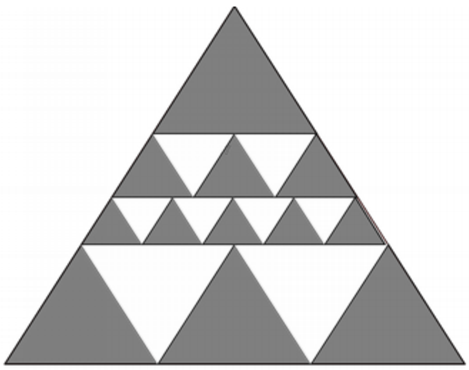
Question. Pour quelles valeurs de n peut-on paver un triangle équilatéral en n triangles équilatéraux ?



Le travail de recherche est très proche de celui de la situation précédente avec néanmoins quelques différences.

1) Le dessin est plus délicat. Il est en particulier plus difficile de distinguer une figure correcte d'une qui ne l'est pas.

2) La figure qui suit montre (après justification) qu'on peut obtenir la propriété pour tous les entiers de la forme « 1 plus une somme d'entiers impairs supérieurs ou égaux à 3 ».



On écrit $2n=(2n-1)+1$ et on obtient la propriété pour tous les entiers pairs supérieurs ou égaux à 4. Un impair s'écrit $2k+1$ avec k impair ou pair. Dans le premier cas, en analysant la figure en $2k+1=k+k+1$ et, dans le second cas, en $2k+1=(k+1)+(k-1)+1$, on obtient la propriété pour tous les impairs n supérieurs ou égaux à 7.

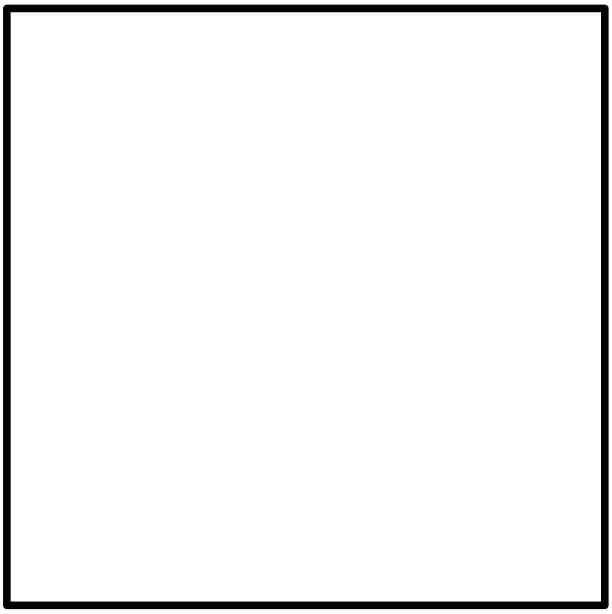
3) Un tel pavage admet un coloriage blanc-noir comme un échiquier induit ici par l' « orientation » des triangles.
Cet outil supplémentaire facilite l'étude des valeurs de n un peu particulières :2,3 et 5.
La procédure consistant à construire des pavages par bandes régulières horizontales peut être un élément facilitateur pour la recherche des solutions.

Fiche-élève

Partition d'un carré en *n* carrés

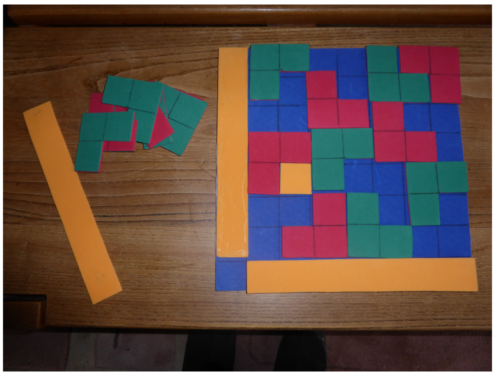
Question. Pour quelles valeurs de *n* est-il possible de partager (paver) un carré quelconque en *n* carrés ?

Exemple
Sauriez-vous partager le carré ci-dessous en 6 carrés ? En 7 carrés ? En 8 carrés ?



Matériel : papiers et crayons

Pavages de polyminos par des polyminos[*]



Depuis de nombreuses années, elle est proposée à des élèves du primaire au doctorat, en passant par le collège, le lycée et les étudiants d'université, les problèmes décrits dans ce chapitre se révèlent fondamentaux pour travailler tous les savoir-faire de l'activité mathématique : expérimentation sur des petits cas permettant de faire des conjectures, codages des données du problème (modélisation), utilisation de différents types de raisonnement pour étudier les conjectures, construction par les élèves d'exemples et contre-exemples, exploration des nombres ou de figures de géométrie, différents niveaux et types de preuve. On peut lire Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006) [1] sur ce sujet.

I. La question mathématique générale[2]. Quelques définitions

La question générale est la suivante :

> ***Q0. Etant donné un polymino, est-il pavable par un ensemble de polyminos plus petits tous identiques ?***

Un ***polymino*** peut être défini comme un morceau d'un plan quadrillé découpé selon les lignes des carrés (ou cases), chaque case étant adjacente à une ou plusieurs autres cases (4 au maximum) par au moins un de ses côtés. Un polymino peut avoir des « trous » (des cases manquantes).

Par exemple, le polymino ci-contre est-il pavable par des dominos ? (les zones hachurées sont des trous).
Après plusieurs « essais », il semble que non, et pourtant il comporte un nombres pair de cases....

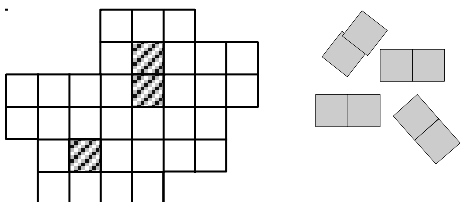


Figure 1

* On peut aussi dire polyomino, les deux termes sont utilisés indifféremment.

1 Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18.2, 59 -100. La Pensée Sauvage, Grenoble. Grenier D. (2008) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique, *Actes du colloque AMQ*, Sherbrooke, Québec, juin 2006.

2 Cette question relève de la **géométrie combinatoire**, une branche des mathématiques discrètes (domaine mathématique absent des programmes scolaires dans de nombreux pays).

La question générale Q0 est ouverte : on ne peut bien bûr pas répondre globalement pour un polymino « quelconque ». Il faut se fixer des cas particuliers de polyminos à paver, par exemple, des rectangles avec ou sans trous, des trapèzes, etc. Quant au polymino qui servira à paver (on l'appellera ***pavé***), on pourra en choisir de très simples (dominos, triminos, pentaminos, etc.) sans crainte de rendre le problème inintéressant[3]. On considère que les pavés sont identiques par isométrie directe ou indirecte.
Ces problèmes permettent avant tout de travailler la modélisation et la preuve, allant de la mise en place par les élèves de conjectures jusqu'à l'élaboration de démonstrations. Nous verrons que d'autres notions mathématiques sont aussi en jeu.

Avant de poursuivre, donnons-nous quelques définitions nécessaires pour la suite de notre propos.

Définitions et remarques

La ***taille d'un polymino,*** définie pour les seuls polyminos carrés ou rectangles est le nombre de cases formant les côtés (exemples : « carré de taille 3, « rectangle de taille 2×5 »). Un polymino rectangle, de taille $1 \times n$, sera noté *polymino-ligne.*
L'aire d'un polymino **quelconque** est le nombre total de ses cases (les trous ne sont pas comptés). Par exemple, le polymino de la figure 1 est d'aire 30, les trous sont de tailles respectivement 1×1 (ou 1) et 1×2.
Un ***trapèze*** est un polymino sans trou pouvant être décrit, dans une position bien choisie, par des polymino-lignes nommés *paliers*, de bas en haut, chaque palier vérifiant deux conditions :

– le nombre de cases d'un palier est inférieur ou égal au nombre de cases du palier inférieur.
– il n'y a pas de surplomb, chaque palier est en retrait (ou sur la verticale) du palier inférieur.

Le palier 1 sera nommé la « base ».
En voici un exemple.

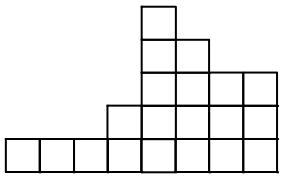


Figure 2

Les deux polyminos de la figure 3 ci-dessous **ne sont pas des trapèzes,** car quelle que soit l'orientation dans laquelle on les considère, chacun présente un palier « à trou » (ligne non connexe) ou un surplomb.

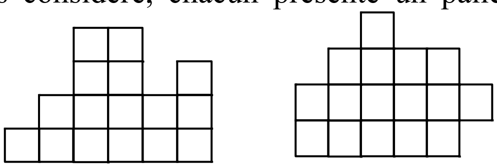


Figure 3. Exemples de polyminos non-trapèzes

Bien sûr, avant de conclure qu'un polymino donné n'est pas un trapèze, il faut l'analyser dans les quatre orientations possibles. Le polymino de la figure 1 n'est pas non plus un trapèze.

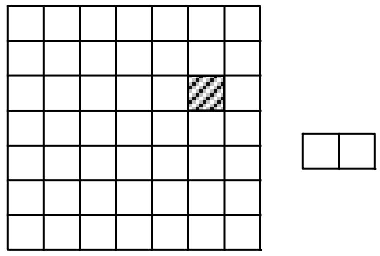
3 La question du pavage d'un polymino par des uniminos (une seule case) ne présente aucun intérêt, car elle n'est pas problématique.

II. La situation de recherche

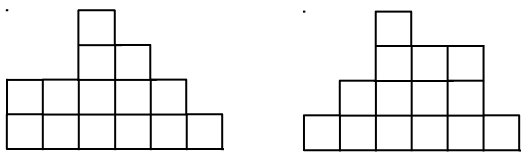
II.1 Les problèmes

La situation que nous allons étudier ici est composée de **trois problèmes**[4] correspondant chacun à des choix particuliers de polyminos à paver et également à des choix de *pavés*. L'ordre proposé pour ces trois problèmes a son importance, nous le verrons dans l'analyse. Voici les énoncés.

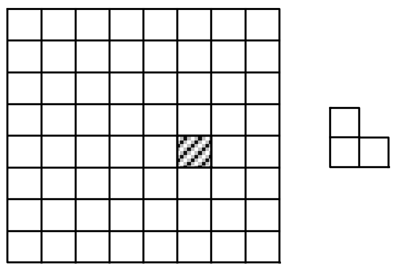
Problème P1. A quelle(s) condition(s) un carré de taille quelconque, avec un « trou » de taille 1 (une case) est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino.
Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou.



Problème P2. A quelles conditions un trapèze de taille quelconque est-il pavable par des dominos ?
Voici deux exemples de trapèzes.



Problème P3. A quelles conditions un carré de taille 2^n , n entier quelconque, avec un trou de taille 1, est-il pavable par des « triminos en L » [5]? Ci-dessous, un cas particulier avec n=3 et une position particulière du trou (hachuré).



Figures 4. Trois problèmes de pavage

Un quatrième problème est suggéré en fin de chapitre, pour « aller plus loin ».

II.2 L'organisation de la classe

Le travail en groupes est un moyen d'assurer la dévolution des problèmes et les échanges. Des moments de synthèse collective permettent de faire le point sur les cas résolus, les conjectures, les contre-exemples, les preuves, et aussi les difficultés.

Le temps est un élément important, aussi bien pour la résolution en groupes que pour les synthèses. La situation ne sera porteuse d'apprentissages que si elle se poursuit sur plusieurs séances. Il est donc nécessaire que chaque groupe tienne un « cahier de

4 Les problèmes P1 et P3 ont été analysés dans Grenier&Payan (1998) et Grenier (EMF 2006 et EMQ2006).

5 Il existe deux sortes de triminos : le polymino-ligne (à 3 cases) et le trimino en forme de L.

recherche », pour faire mémoire de l'état de la résolution d'une séance à l'autre : cas étudiés, conclusions, questions non résolues, nouvelles questions, mais aussi difficultés, pistes abandonnées, etc...

III. Analyse mathématique et didactique

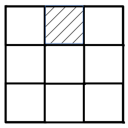
De nombreuses données expérimentales nous permettent d'avoir une analyse fiable de ces problèmes et ainsi d'anticiper les apprentissages que cette situation peut susciter.

III.1 Pavage de carrés à un trou par des dominos (problème P1)

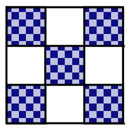
a. Propriétés et conjectures émergeant de la recherche

Le problème P1 a pour rôle la mise en place d'un « milieu » pour la résolution de la question Q0. En effet, ce type de questions est inconnu de la très grande majorité des élèves et des enseignants. La résolution de P1 va donc permettre d'introduire des outils spécifiques et d'établir des propriétés de base sur le pavage des polyminos, qui serviront ensuite pour les problèmes P2 et P3.
L'étude des carrés de petites dimensions (taille $n \leq 7$) conduit à faire des constats, puis établir des propriétés ou des conjectures. Voici celles qui émergent très régulièrement, plus ou moins facilement selon le public concerné.

Propriété 1. Une condition nécessaire pour pouvoir paver un polymino avec des dominos est que le polymino soit d'aire paire.
En conséquence, un polymino carré ayant un trou doit avoir un côté impair. En effet, pour les valeurs paires de n, le nombre de cases à paver $n^2–1$ est impair et un domino couvre 2 cases.
On ne va donc maintenant considérer que des valeurs de n impaires.
Cette condition n'est pas suffisante. Contre exemple facile à trouver : le polymino d'aire 8 (trou hachuré) n'est pas pavable.
Pour quelles positions du trou le pavage est-il possible ?



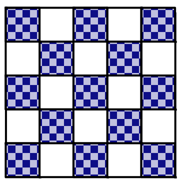
Propriété 2. Pour n=3, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une des cases hachurées ci-dessous.



> Preuve. Dans le cas des « bonnes » cases (celles qui correspondant aux positions pour trou qui permettent de paver), une preuve consiste à exhiber un pavage.
> Pour les « mauvaises » cases, la preuve consiste à décrire un pavage forcé, qui aboutit à laisser deux cases finales non connexes (donc non recouvrables par un domino).

Remarques. Pour établir la propriété 2, on utilise le fait que si on peut exhiber un pavage, alors on a la « preuve » que le polymino est pavable. Ceci ne va pas de soi pour tous les élèves. D'autre part, par des arguments de symétrie, le nombre de positions du trou à étudier est réduit à 3.

Propriété 3. Pour n=5, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une des positions coloriées ci-contre.



Preuve de la condition suffisante : on exhibe un pavage (c'est encore facile).

Pour la condition nécessaire, la preuve par exhaustivité des cas est risquée, car il faut s'assurer qu'on a étudié toutes les possibilités de pavage avant de déclarer qu'il n'en existe aucun. La propriété est donc seulement partiellement démontrée. Cependant, elle peut établie avec la preuve de la conjecture 1 générale ci-dessous.

Remarque. Pour n=7, l'étude cas par cas est fastidieuse et ne permet pas de se convaincre, sauf pour quelques cases qui « marchent » et pour lesquelles les résultats obtenus pour n=3 ou n=5 peuvent être réinvestis facilement, dans une argumentation qui relève de manière implicite d'une induction (au sens large).

Conjecture pour *n* quelconque

Repérons les cases par deux coordonnées entières, à partir d'un coin du polymino (par exemple le coin en bas à gauche), et en commençant par (1,1)).

Conjecture 1. Pour n impair quelconque, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une case ayant une position paire-paire ou impaire-impaire dans le polymino.

b. Introduction d'un outil de preuve : la coloration en damier

Le dessin représentant les « bonnes » cases induit une coloration du polymino en « damier » (deux couleurs en alternance). Cette coloration, qui pour le moment, n'est qu'un support ou une manière de représenter les solutions, va devenir un outil efficace pour la preuve. Posons-nous la question : si je colorie mon polymino en damier (disons noir-blanc), que recouvre un domino ? La réponse vient assez facilement : puisqu'**un domino est composé de deux cases adjacentes,** quel que soit le lieu où on pose ce domino, il recouvre une case noire et une case blanche. Deux dominos recouvrent donc 2 cases blanches et 2 cases noires, etc..

Une condition nécessaire pour pouvoir paver est donc que, dans la coloration en damier, il y ait autant de cases noires que de cases blanches (on dit que le *polymino est équilibré*). Or le nombre de cases d'un carré de taille n impaire est un nombre impair. Dans la coloration en damier, on a donc une couleur majoritaire de une unité ($(n^2+1)/2$ pour l'une des couleurs et $(n^2-1)/2$ pour l'autre). Ainsi, **une condition nécessaire pour pouvoir paver est que le trou soit placé sur une case de la couleur dominante.** Ceci prouve notre conjecture pour les « mauvaises » cases.
Attention, ceci ne permet pas de prouver la conjecture pour les « bonnes » **cases.** C'est une erreur qui est souvent apparue dans nos expérimentations.

Preuve de la condition suffisante[6]
Il faut donc maintenant prouver que si le trou est sur une case de la couleur dominante, le polymino carré est pavable.

6 Nous renvoyons à Grenier et Payan,1998 pour le détail de ces preuves.

Des preuves accessibles existent, qui se situent à des niveaux de connaissances différents.

– par « décomposition » du carré en rectangles d'aires paires, autour du trou.

– par récurrence sur *n*.

Remarque. Dans la preuve de la conjecture 1, qui est une CNS, les connaissances et outils pour établir la CN (l'outil coloration et la notion de « polymino équilibré ») ne sont pas les mêmes que ceux qui servent à établir la CS (décomposition ou récurrence). P1 est donc un « bon » problème pour discuter de la différence entre une CS et une CN.

c. Relations entre « pair », « équilibré » et « pavable »

Propriété 4. Quel que soit le polymino, on a : pavable ⇒ équilibré ⇒ aire paire
La preuve est facile.

Remarques. Dans le cas général, il n'y a aucune équivalence, même si c'est le cas pour les carrés ou les rectangles sans trou. Pour les carrés ou rectangles tronqués d'une case, nous venons d'établir que équilibré est équivalent à pavable, mais tout carré ou rectangle tronqué d'une case et d'aire paire n'est pas forcément équilibré.

d. La notion d'adjacence

Cette notion joue ici un rôle fondamental pour résoudre P1. Elle permet de transformer la coloration en un outil de preuve efficace. Dans nos expérimentations, nous avons constaté que la résolution de P1 permet de la faire émerger lors des essais successifs de pavage. En effet, pour un polymino non pavable, on peut observer qu'à chaque fois, les tentatives avortées de pavage s'arrêtent sur deux cases isolées, qui se révéleront être de même couleur.

e. Prolongement du problème P1

Un de nos critères pour une SiRC est que la résolution de la question de départ peut amener assez naturellement chez les élèves d'autres questions. Ici, lors de la résolution de P1, nous avons rencontré la question du pavage des rectangles par des dominos.

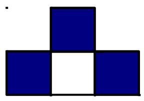
III.2 Pavage d'un trapèze par des dominos (problème P2)

Propriétés et conjectures pouvant émerger de la recherche

En réutilisant des propriétés et des outils établis lors de la résolution du problème P1, en particulier la propriété 4, on peut affirmer que :

Propriété 5. Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit pavable par des dominos est qu'il soit équilibré (il est donc d'aire paire).

Vient la question : existe t il des trapèzes d'aire paire et non équilibrés ?
La réponse est oui, il y a des exemples simples, dont celui-ci :

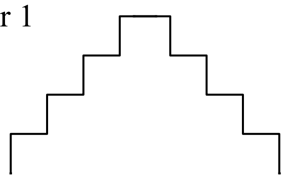


En étudiant des cas particuliers de trapèzes, d'aires petites, on peut établir facilement les propriétés suivantes :

Propriété 6. Si un trapèze a tous ses paliers ou toutes ses colonnes paires, alors il est pavable.

Preuve évidente (on pave chaque palier ou chaque colonne une à une).

Propriété 7. Tout trapèze ayant uniquement des marches de 1 sur 1 de chaque côté est non pavable car non équilibré.
On notera T1-1 ce type de trapèze.



Preuve. Dans une coloration en damier, chaque palier de ce trapèze contient une couleur dominante et c'est la même. On a donc, pour un tel trapèze à n paliers, une couleur qui a n cases de plus que l'autre.

D'autre part, l'étude expérimentale de différents trapèzes équilibrés, d'aires pas trop grandes, pris au hasard, induit facilement que le pavage de tels trapèzes semble toujours possible. On peut donc conclure, après un temps de recherche, sur la conjecture suivante.

Conjecture 2. Tout trapèze équilibré est pavable par des dominos.

La preuve de cette conjecture est difficile. Souvent, des preuves fausses sont données, plus ou moins induites par un raisonnement inductif incomplet.

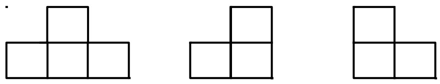
Recherche d'un algorithme de pavage

L'étude expérimentale induit la recherche d'un algorithme de pavage pour se convaincre de la possibilité ou non de paver un trapèze donné. L'algorithme décrit ci-dessous consiste à « déconstruire » le trapèze d'une manière précise qui conduit à une preuve par induction. Nos expérimentations montrent que l'intervention de l'enseignant ou de celui qui gère la situation est en général nécessaire dans cette phase.

Étant donné un trapèze d'aire paire non nulle, à chaque étape de l'algorithme, on considère le palier le plus haut, notons le m. Tant que c'est possible, on enlève deux cases adjacentes (formant donc un domino) sur le palier m, en partant d'un bord (gauche ou droit).
Si ce n'est pas possible, c'est qu'il n'y a qu'une seule case sur le palier (il ne peut pas y avoir deux cases non contiguës, car ce ne serait pas un trapèze). On considère alors le domino d formé par cette case et la case qui lui est adjacente, c'est-à-dire celle du palier m–1 située directement en dessous.
Si on peut enlever ce domino d en conservant la propriété « trapèze », on le fait. On a alors un trapèze à m –1 paliers. Sinon, on garde d et, sur le palier m–1, on enlève un domino en partant d'un bord, tout en conservant la propriété « trapèze ».

On recommence sur le palier m–1 jusqu'à ce que :
– cas 1 : soit il reste le domino d seul, on peut alors l'enlever et il reste un trapèze de hauteur m–2 (ou rien)
– cas 2 : soit il reste, au palier m–1, une unique case située d'un côté de d, on peut alors enlever d et il reste un trapèze de hauteur m–1

– cas 3 : soit il reste, au palier m–1, deux cases situées de part et d'autre de d. Dans ce cas, on ne peut plus enlever de domino dans les étages m et m–1. Il faut passer au palier m–2.



cas 3 cas 2

Le trapèze étant par hypothèse équilibré, ces trois configurations ne sont pas terminales, on est sûr qu'il existe des paliers inférieurs. On considère alors les paliers m, m–1, m–2 ensemble, et éventuellement les suivants, jusqu'à ce qu'on puisse finalement enlever un domino occupant deux paliers successifs en gardant la propriété « trapèze ». On est sûr que c'est possible en un nombre fini de paliers, puisque un trapèze équilibré ne peut être de type T1-1.

Voici un exemple où on doit aller jusqu'au palier m–2 avant de pouvoir commencer à déconstruire le trapèze – pour lui conserver sa propriété de « trapèze » (les dominos enlevés sont mis en évidence par un trait noir). **A chaque étape, l'algorithme reprend à partir du palier le plus haut du trapèze restant.**

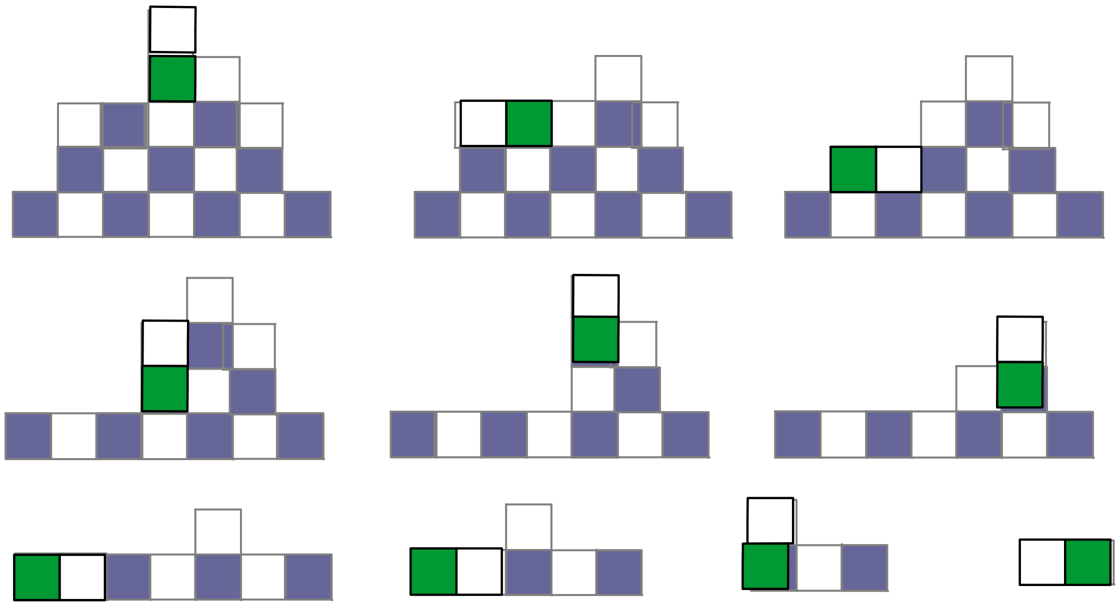


Figure 5. Illustration de l'algorithme de « dépavage » qui permet de trouver un pavage à coup sûr.

L'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes (évident) et d'autre part, à chaque étape, le trapèze restant est équilibré. Que reste-t-il à la dernière étape ? Deux cases, de couleurs différentes (évident) et de plus adjacentes (par choix même de l'algorithme), donc recouvrables par un domino : le dernier.
L'algorithme que l'on obtient en remontant ces étapes est une preuve de la conjecture, qui de plus fournit un pavage. On a donc établi la propriété suivante :

Propriété 8. Tout trapèze équilibré est pavable par des dominos.

Preuve.
Démontrons que, pour tout entier n, la propriété $P(n)$: «Tout trapèze d'aire $2n$ équilibré est pavable par des dominos » est vraie.

Soit un trapèze équilibré, il a donc une aire paire, de la forme $2n$ (n entier non nul). Considérons deux cases adjacentes choisies conformément à l'algorithme de déconstruction ci-dessus. Si le polymino d'aire $2(n-1)$ obtenu en enlevant ces deux cases est un trapèze pavable, alors le trapèze d'aire $2n$ est pavable : il suffit en effet de rajouter le domino formé de ces deux cases à un pavage du trapèze d'aire $2(n-1)$. L'implication $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ est donc vérifiée dès que l'on peut enlever deux cases par l'algorithme cité, c'est-à-dire dès qu'on a un domino, donc dès que $n \geq 1$. Et $P(0)$ est évidemment vraie. $P(n)$ étant héréditaire à partie de $n=1$ et $P(1)$ étant vraie, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

III.3. Pavage, avec des triminos en L, d'un carré de taille 2^n avec un trou

Ce problème a été décrit dans Grenier et Payan (1998). Nous ne donnerons ici que quelques éléments.

On peut établir que, pour toute valeur de l'entier n, l'aire du polymino, égale à $2^{2n}-1$, est un multiple de 3. La condition nécessaire est ainsi vérifiée pour tout n. La question est maintenant de savoir si cette condition est suffisante. L'étude de petits cas (n=2, 3) conduit à la conjecture suivante :

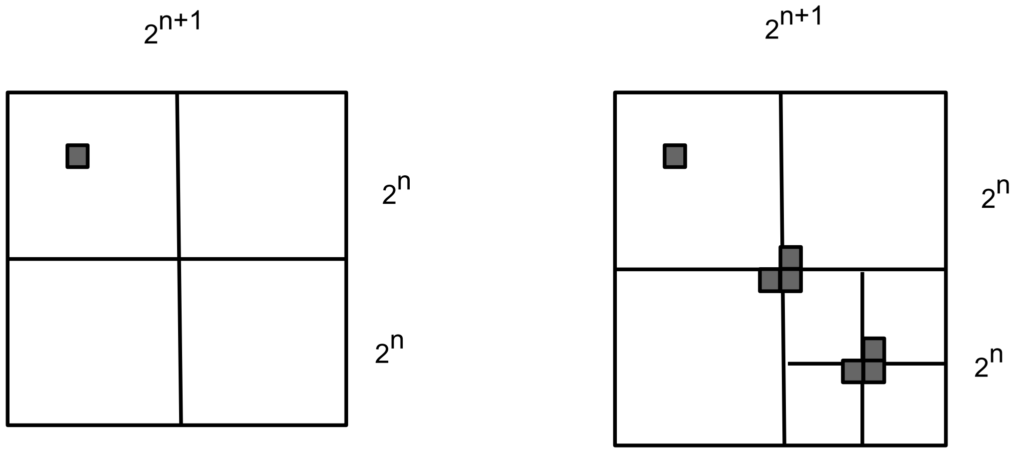
Conjecture 3. Quel que soit l'entier n, tout polymino carré de taille 2^n ayant un trou est pavable, quelle que soit la position du trou ».

L'étude expérimentale des cas pour n=2, puis n=3 et n=4, conduit en général à un raisonnement par récurrence, en considérant la propriété $P(n)$, définie pour tout entier n par « Tout polymino carré de taille 2^n ayant un trou est pavable, quelle que soit la position du trou ».

– On établit que pour tout entier n, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, en structurant et décomposant un polymino de taille 2^{n+1} en quatre carrés de taille 2^n qui conviennent pour établir l'hérédité (voir figure page suivante).
– On cherche ensuite pour quelles valeurs de n l'hérédité peut être établie, ce qui donne la « valeur initiale » de n dans la récurrence.

Cette preuve met en jeu des aspects de la récurrence non usuels dans l'enseignement :
– $P(n)$ est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction analytique (ou algébrique) de n.
– La valeur initiale de la récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité (elle ne sort pas d'un chapeau !)
– La preuve fournit un algorithme de pavage (comme dans le problème P2), ce qui est très utile car si on pave au hasard, on a très peu de chance d'aboutir au pavage effectif.

Le dessin ci-après illustre une étape de l'algorithme de pavage.



IV. Les apprentissages en jeu dans la situation

La séquence de ces trois problèmes permet de travailler des notions mathématiques ou transversales qui ne le sont pas habituellement en classe. En voici les principaux.

Existence ou non de solutions selon les valeurs de la variable *n*
En classe, souvent, tout problème a une solution unique. Ici, dans P1, l'existence de solutions dépend de la position du trou, tandis que dans P2, des solutions existent dès que le polymino vérifie la condition « équilibré », tandis que P3, lui, admet des solutions dans tous les cas (quelle que soit la position de la case manquante).

Distinction entre « condition nécessaire » et « condition suffisante »
Dans ces problèmes, les CN ne sont pas toujours suffisantes et les CS ne sont pas toujours des CN. De plus, si une condition est une CNS, la preuve de sa nécessité peut être très éloignée de celle de sa suffisance (exemple typique dans le problème 1).

Types de preuve et raisonnements non usuels
Cette situation permet d'aborder des types de preuve, telles que la preuve « par exhaustivité des cas », et la preuve par « exhibition d'un exemple » (en réponse à une question d'existence). Des outils spécifiques sont utilisés, tels la décomposition et structuration d'une figure, ou la coloration. Au delà de leur intérêt pour eux-mêmes, ils permettent à l'élève d'élargir sa conception d'une preuve en mathématique.

Les notions mathématiques
Elles concernent essentiellement les propriétés de $\mathbb{N}$, avec des niveaux d'approche différents : calcul d'aires, divisibilité de deux nombres, preuve par récurrence.

V. Conclusion

L'ensemble de ces situations de pavage est pertinente à différents niveaux scolaires, mais aussi pour la formation d'enseignants. Les résultats obtenus seront bien sûr différents

selon ces niveaux, c'est-à-dire que l'on pourra aller plus ou moins loin dans les conjectures et les preuves. Cependant, le problème 1 peut être résolu et prouvé de manière non formelle dès l'école primaire.
Deux contraintes sont quasi incontournables pour que la situation « marche » en classe :

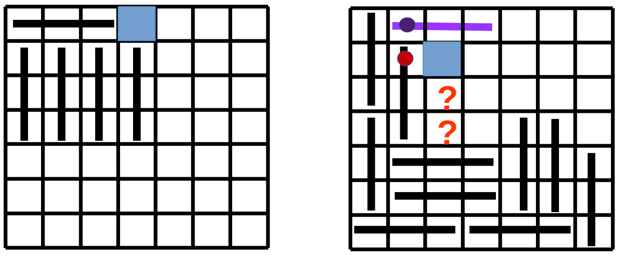
– celle du temps, nécessaire (même pour un chercheur !) pour s'emparer des problèmes et commencer à mettre en place des solutions.
– celle de l' « ouverture » qui consiste à autoriser le développement de stratégies différentes, sans en imposer une particulière, voire la résolution d'une question nouvelle liée à celle de départ.

Si ces contraintes sont respectées, le plaisir et les apprentissages décrits ci-dessus sont alors garantis !

VI. Pour aller plus loin. Pavage d'un carré avec des triminos longs

La question est la même que pour les problèmes précédents, avec un autre type de pavé.
« Pour quelles tailles du polymino carré et quelles positions du trou, existe-t-il un pavage par des triminos longs ? »

Les dessins ci-après illustrent le cas où n=7 et deux positions du trou.



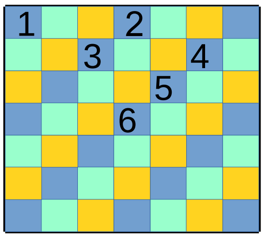
Ce problème permet de réinvestir différents raisonnements déjà utilisés, en particulier par partition de la figure en rectangles pavables, par récurrence, et pour les positions qui ne conviennent pas, par l'absurde et tentative de pavage forcé.
Une coloration du polymino en trois couleurs telle que lorsqu'on pose un trimino, il couvre chacune des trois couleurs, permet de donner une condition nécessaire sur les positions du trou qui « marchent ».[7]
En annexe (page suivante), nous avons reproduit une production d'un groupe d'élèves de Seconde, qui montre cette tricoloration et un algorithme de pavage « forcé » permettant de résoudre certains cas.
Cependant, lorsque le trou est en positions 3, 4 et 5, un **raisonnement plus subtil,** utilisant des arguments de symétrie et la coloration, permet de démontrer plus simplement qu'il ne peut exister de pavage pour ces trois positions. En effet, s'il existait un tel pavage avec le trou en case 3, alors, par symétrie, il existerait aussi un pavage avec le trou en position juste à gauche de 4. Donc aucune des deux ne « marche ». On peut faire le même raisonnement avec la position 5.

7 La coloration en trois couleurs ne permet pas de prouver quoi que ce soit dans le cas du trimino coudé(en L).

Annexe. Reproduction (fidèle) d'un travail d'un groupe d'élèves pour n=7

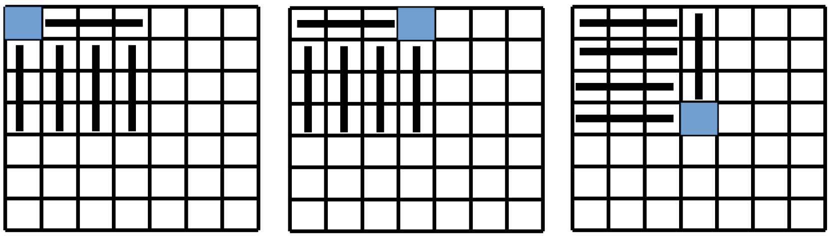
Pavage du 7x7 ayant un trou d'une case, avec des triminos longs

(1) Une coloration en trois couleurs telle que deux cases adjacentes soient de couleurs différentes permet de repérer les positions possibles du trou (condition nécessaire de pavage : trou sur couleur majoritaire de 1, ici en bleu sur la figure)

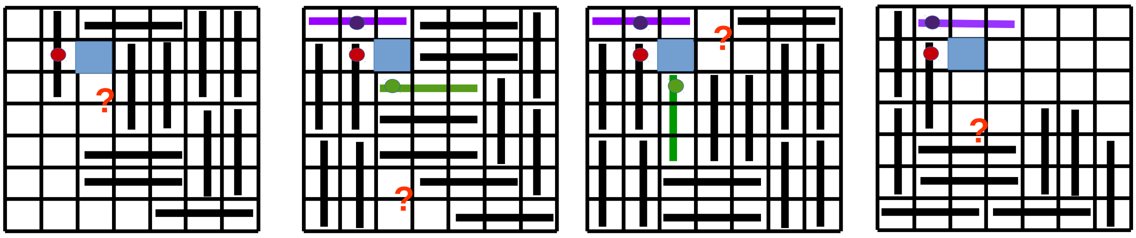


(2) Pour raisons de symétrie, il y a en fait seulement six positions à étudier (numérotées ci-contre de 1 à 6)

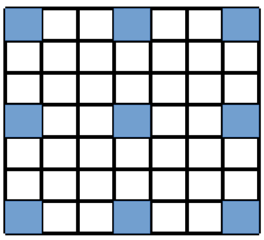
(3) Il existe un pavage pour trois seulement d'entre elles, positions 1, 2 et 6 (voir figures ci-après, la suite des pavages est évidente).



(4) Pour les trois autres positions (3, 4 et 5), l'impossibilité est établie par une preuve par absurde, exhaustivité des cas et forçage (ci après, exemple de preuve pour la position 3, les ronds de couleur indiquent les cases choisies pour le raisonnement exhaustif dans l'ordre rouge, violet, vert).



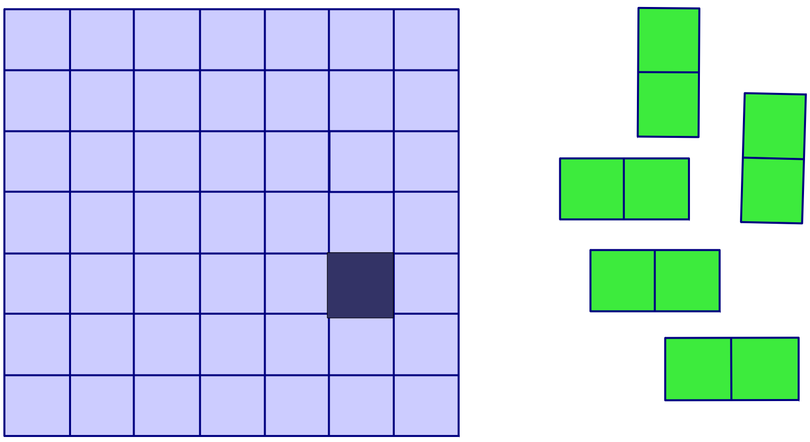
Finalement,
les cases qui marchent



Fiche-élève n°1

Pavages de polyminos avec des dominos

Question 1. Voici un polymino carré 7×7 ayant un trou d'une case.
Le trou peut se situer n'importe où dans le carré.
Pour quelles positions du trou le polymino est-il pavable par des dominos ?



Question 2 (cas général). Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou un polymino de taille $n \times n$ est-il pavable par des dominos ?

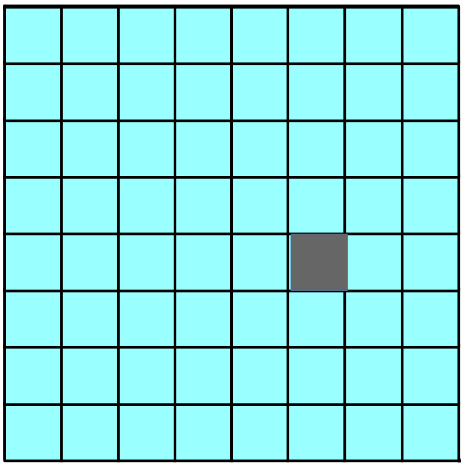
Question 3 (généralisation). Résoudre le problème sur un rectangle de dimensions quelconques avec un trou.

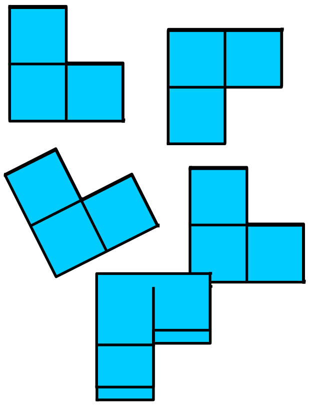
Matériel : un plateau carré (ou plusieurs de tailles différentes) et des dominos

Fiche-élève n°2

Pavages de polyminos avec des triminos coudés

Question 1. Voici un polymino carré 8×8 ayant un trou d'une case.
Le trou peut se situer n'importe où dans le carré.
Pour quelles positions du trou le polymino est-il pavable par des triminos « coudés » ?





Question 2 (généralisation). Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou un polymino de taille 2^n est-il pavable par ces triminos ?

Matériel : un plateau carré (ou plusieurs de tailles différentes) et des triminos en L

La chasse à la bête

Les problèmes d'optimisation sont nombreux en mathématiques mais peu fréquents en classe. Ils consistent à chercher la « meilleure réponse » à une question, souvent le plus petit nombre (ou le plus grand nombre) vérifiant des conditions données. L'intérêt de cette situation de recherche est de permettre à des élèves de collège et lycée de trouver par eux-mêmes une solution optimale, parce que celle-ci est accessible expérimentalement et facile à argumenter.

Historique de la situation

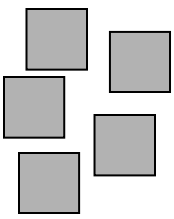
La situation de la chasse à la bête a été inspirée initialement par le problème d'exclusion des pentominos proposé par Golomb en 1968 (présentée dans SIAM J. Appl. Math., 18 (1970)). Il s'agissait de savoir quel est le minimum de cases de l'échiquier à noircir de sorte que les « zones » non noircies (connexes) n'excèdent pas 4 cases. Puis Bosch (*Optima* 60–1998, *Optima* 62–1999) a proposé une méthode algorithmique pour résoudre ce problème, qui donne les valeurs optimales pour des échiquiers de taille inférieure à 12. Interpellé par cette approche, Gravier et Payan (*Discrete Comput. Geom.*, 26 (3) (2001), pp. 375-386) adoptent un regard géométrique sur ce problème et obtiennent des résultats plus généraux sur le plan (« échiquier » non borné). Gravier et Payan proposent ce même problème en 2002 à des lycéens grenoblois, dans le cadre d'un atelier Math.en.Jeans. C'est en suivant les investigations de ces lycéens qu'Eric Duchêne (doctorant de Gravier) a suggéré d'exclure un seul type de pentomino plutôt que tous. Suite à des expérimentations en classe dans le cadre d'ateliers Maths à Modeler, cette situation est devenue la « chasse à la bête ». Cependant il serait sans doute intéressant de revenir à la situation d'origine)….

Problème général

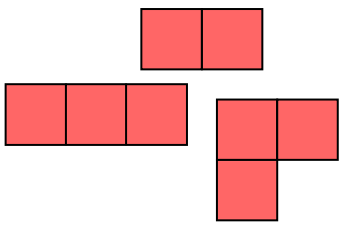
On veut protéger un territoire quadrillé d'un nuage de bêtes, en interdisant à celles-ci de se poser. On dispose pour cela de pièges, des uniminos, qui recouvrent chacun un carré. Les bêtes sont des petits polyminos (dominos, triminos, etc...). Elles ne peuvent se poser que selon les carrés du quadrillage. Bien sûr, une bête ne peut pas se poser sur une case contenant un piège. On cherche à mettre le moins possible de pièges sur le territoire.

Voici un exemple de territoire de dimensions 5×5, et trois types de bêtes (domino, trimino long, trimino coudé), qui conduisent à trois problèmes différents de complexité croissante.

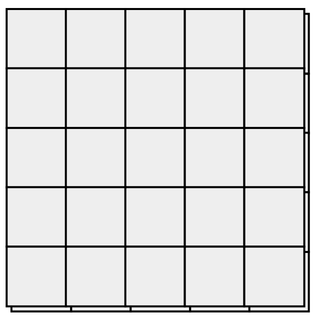
Question. Pour chacun des trois types de bête, déterminer le plus petit nombre de pièges qui protège le territoire.



Pièges



Les 3 types de bêtes



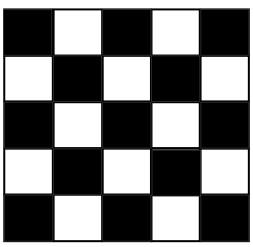
Remarques générales et mathématiques en jeu

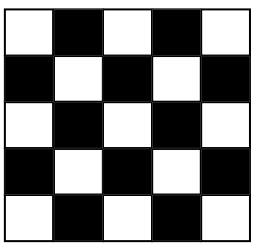
Les trois problèmes correspondant chacun à un type de bêtes – les bêtes ne se mélangent pas ! – forment un tout, dans une progression précise (dominos, triminos longs, triminos coudés), permettant un réinvestissement de certains raisonnements et preuves d'un problème à l'autre. Nous invitons le lecteur à chercher les solutions avant de lire la suite.

On appellera « solution provisoire » toute configuration d'un certain nombre de pièges, dont on peut se convaincre qu'elle protège le champ – on ne peut poser aucune « bête » (domino ou trimino) sur la grille carrée. Il est évident que recouvrir les 25 cases de la grille est une solution provisoire pour chacun des trois types de bêtes, mais qui semble très vite non satisfaisante. Il est donc assez naturel de chercher une meilleure solution.
Il s'agit de problèmes d'optimisation. Ce type de questions est en général assez difficile à résoudre, mais, ici, la solution est un « plus petit nombre entier » que l'on va pouvoir anticiper expérimentalement.
Une stratégie induite par le contexte consiste à déterminer expérimentalement une solution provisoire, dont on ne sait pas si elle est optimale. Dans un deuxième temps, on va chercher à améliorer la solution provisoire. On peut aussi, par des raisonnements sur la grille – analysée par lignes, colonnes, ou diagonales – , chercher combien de pièges sont nécessaires. On arrive ainsi à un intervalle (de $\mathbb{N}$) dans lequel se situe le nombre cherché, N_{opt} : il est au moins égal à un nombre N_1, et au plus égal à un nombre N_2, ce qui s'écrit : $N_1 \leq N_{opt} \leq N_2$. Ce qu'on peut aussi formuler par « N_2 pièges suffisent à protéger le champ » et « au moins N_1 pièges sont nécessaires pour protéger le champ ».
On peut ainsi travailler les relations entre les notions de Nécessaire/Suffisant, « au moins/au plus » et « supérieur ou égal/inférieur ou égal ».
Pour trouver la solution optimale, par des aller-retours entre expérimentations et raisonnements, on va tenter de réduire cet intervalle à un point : lorsqu'on aboutit à $N_1=N_2$, le problème est résolu.

Problème 1. Chasse à la bête avec des dominos

Un domino recouvrant deux cases adjacentes, il suffit de poser des pièges en alternance sur une case sur deux pour avoir une solution provisoire déjà bien plus satisfaisante. On obtient avec cet argument l'une des deux solutions ci-après, la seconde (12 pièges) étant meilleure que la première (13 pièges). On retient donc la seconde, mais on ne sait pas si c'est la meilleure. Ceci prouve que 12 pièges sont suffisants, soit $N_{opt} \leq 12$.





La question est maintenant de savoir si on peut protéger le champ avec 11 pièges seulement, ou si 12 pièges sont nécessaires.
Un raisonnement permet de se convaincre que 11 pièges ne suffisent pas : il est possible de poser dans ce champ côte à côte 12 bêtes à la fois, autrement dit il est possible de paver partiellement sans chevauchement la grille avec 12 dominos. Or, il faut au moins un piège par bête, ce qui prouve que 12 pièges sont nécessaires, soit $N_{opt} \geq 12$. On a donc prouvé que $N_{opt} = 12$.

En classe. Un contre-exemple convaincant à un raisonnement faux répandu

Le travail en groupes et la phase expérimentale avec du matériel manipulable (en bois, carton plastifié, mousse, etc..) est indispensable pour faire des conjectures et raisonner. Très souvent et assez rapidement, quel que soit le niveau des classes (collège, lycée, université), les deux solutions (avec 12 et 13 pièges, figures ci-dessus) émergent séparément dans les groupes. Et, dans un premier temps, tous les élèves sont persuadés qu'ils ont la meilleure – y compris ceux proposant 13 pièges, avant de voir la solution à 12 pièges. Pour justifier que c'est la « meilleure solution », un argument assez répandu, donné aussi bien pour 13 pièges que pour 12 pièges (donc faux !), est le suivant :
« C'est la meilleure solution car si on enlève un piège, le champ n'est plus protégé ».

Cet argument n'est valide pour aucune des deux solutions. Il dit seulement que chacune de ces solutions est localement la meilleure (minimum local), mais ne justifie pas du tout que 12 pièges est le minimum global. Cet argument faux offre une bonne occasion de débattre en classe de la complexité à reconnaître la validité d'un raisonnement. En effet, dans cette situation, la mise en relation des deux solutions (12 et 13 pièges) fournit naturellement un contre-exemple convaincant : on voit facilement que l'argument n'est pas valide pour 13 pièges – puisqu'on a une solution à 12 pièges ! –, ce qui permet d'accepter qu'il ne l'est pas non plus pour 12 pièges.

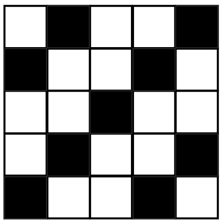
Il faut donc chercher une autre preuve pour établir que $N_{opt} \geq 12$, autrement dit que « 12 pièges sont nécessaires » (on a déjà la preuve que 12 pièges suffisent). Nos expérimentations montrent que les deux raisonnements décrits au paragraphe précédent sont accessibles aux élèves. Cependant, celui qui consiste à poser le plus de bêtes possibles côte à côte sur le champ ne vient pas des élèves seuls. L'enseignant peut introduire cette idée par une nouvelle consigne : « je vous propose d'étudier une autre question : combien de bêtes peuvent se poser en même temps, côte à côte, sur le champ ? Combien de pièges faut-il pour une bête ? En quoi cela nous permet-il d'avancer vers la résolution du problème ?». Il est facile de paver avec 12 dominos, et assez facile de reconnaître qu'il faut « au moins un piège par bête ». D'où le résultat.

Problème 2. Chasse à la bête avec des triminos longs

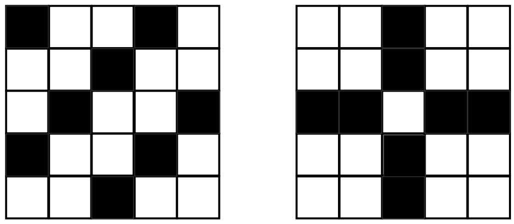
Quelques-uns des raisonnements et résultats établis pour les dominos peuvent être réinvestis en les adaptant dans ce nouveau problème.
– une solution provisoire satisfait nécessairement la condition : il n'y a pas trois cases adjacentes sans piège ;

– cette condition est suffisante (pour vérifier qu'on a bien une solution provisoire) : si la configuration ne laisse pas trois cases sans pièges, alors aucune bête ne peut se poser.

La phase expérimentale aboutit à des résultats très différents. Les premières solutions proposées sont les mêmes que pour les dominos, avec 12 ou 13 pièges, même si elles sont assez vite reconnues comme non satisfaisantes. Finalement, trois solutions provisoires émergent, l'une avec 9 pièges, deux autres avec 8 pièges.

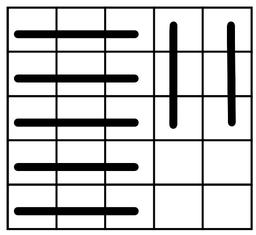


solution à 9 pièges



deux solutions à 8 pièges

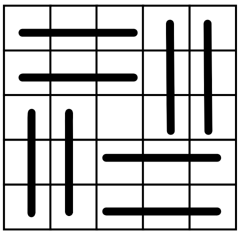
Les stratégies de construction de ces deux solutions à huit pièges sont différentes.
Dans la première, on part d'un coin de la grille et on pose un piège « toutes les 3 cases » en cheminant sur la grille. Dans la seconde, ou progresse sur la grille ligne par ligne, puis colonne par colonne. On obtient d'ailleurs souvent ainsi une solution à 9 pièges (un piège au centre, dont on se rend compte ensuite qu'il est en trop). Très vite, l'une au moins des solutions à 8 pièges est construite par tous les groupes.
Ceci prouve que $N_{opt} \leq 8$.
La question est maintenant de savoir si c'est la meilleure solution. On peut réinvestir la démarche utilisée pour les dominos : combien de triminos longs est-il possible de poser sans chevauchement sur la grille ?
Il est très facile d'en poser sept, comme indiqué ci-contre, ce qui montre que $N_{opt} \geq 7$.



On a donc maintenant le résultat : $7 \leq N_{opt} \leq 8$.

L'étape finale consiste à déterminer si le nombre cherché est 7 ou 8. Après des essais pour trouver une solution à 7 pièges, la conjecture largement partagée est que $N_{opt} = 8$. Deux types de raisonnements sont possibles :
– 7 pièges ne sont pas suffisants,
– ou 8 pièges sont nécessaires : comme $25 > 3{\times}8$, il est peut-être possible de faire « mieux » :
si on peut poser 8 triminos côte à côte sur la grille, cela résoudra la question.

Après quelques essais, on aboutit au pavage suivant :



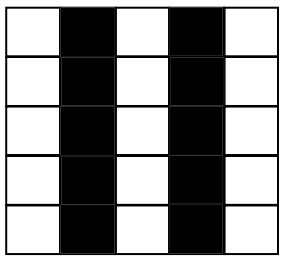
Les stratégies consistant à prouver que sept pièges ne suffisent pas par exhaustivité des pavages possibles est plus difficile, car il y a beaucoup de cas.

Déroulement en classe

La stratégie consistant à attraper le nombre optimal cherché en le coinçant dans un intervalle entier de plus en plus petit est très efficace. Si les essais avec le matériel donnent naturellement des majorants de l'intervalle, et même un « bon majorant (8), il faut faire des raisonnements pour trouver des minorants. L'enseignant peut induire cette démarche en posant des questions telles que « Est-ce que 5 pièges suffisent ? » (il est facile de voir qu'un piège par ligne ne suffit pas), ce qui peut conduire à chercher si 6 pièges suffisent, conclure que non, et donc aboutir à $7 \leq N_{opt} \leq 8$.

Problème 3. Chasse à la bête avec des triminos coudés

L'expérimentation aboutit à une solution représentée dans le dessin ci-contre, qui démontre que *10 pièges sont suffisants*, ce qui s'écrit $N_{opt} \leq 10$: en effet, la bête (trimino coudé) occupe deux colonnes adjacentes (ou deux lignes adjacentes), et les 10 pièges positionnés ainsi bloquent une colonne sur deux (il n'y a pas deux colonnes adjacentes sans piège), aucune bête ne peut donc se poser.

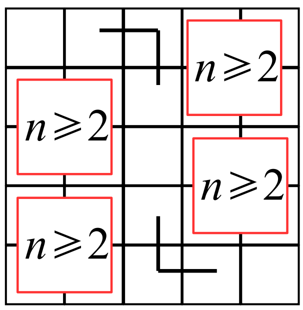


Pour démontrer que *10 pièges sont nécessaires*, on va utiliser le fait que « sur n'importe quel carré de taille 2, 2 pièges sont nécessaires » (ce qui s'écrit $n \geq 2$), où n est le nombre de pièges nécessaires dans le petit carré. Une partition bien choisie du champ permet d'achever la preuve.

Par exemple, les quatre petits carrés du schéma ci-contre nécessitant chacun 2 pièges (donc 8 pièges rien que pour eux), il reste à protéger la bande « en Z », ce qui nécessite au moins 2 pièges (deux bêtes pouvant se poser sur cette bande comme indiqué dans le dessin, quelles que soient les positions des pièges dans les petits carrés).

Donc 8+2=10 pièges sont nécessaires, soit $N_{opt} \geq 10$.

On a prouvé que $N_{opt} = 10$.

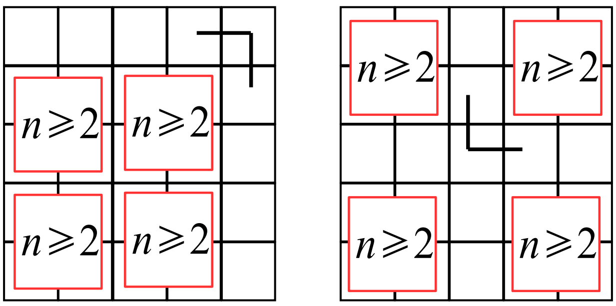


Déroulement en classe

Lors de la phase expérimentale « d'investigation », les conjectures et raisonnements qui émergent régulièrement, à tous les niveaux de collège et lycée, montrent un réinvestissement de ceux faits dans la situation avec les dominos :
– Des premières solutions faciles à 13 pièges, puis 12 pièges (une case sur deux), qui permettent d'écrire « 12 pièges **suffisent** » ou $N_{opt} \leq 12$;
– Puis la solution a 10 pièges ci-dessus, ce qui permet d'écrire $N_{opt} \leq 10$, ou encore « 10 pièges suffisent ». Cette solution est validée par l'argument que « dans cette configuration, il n'y a pas de case ayant trois voisines directes sans piège » ;
– Un pavage du champ avec 8 triminos, ce qui permet d'écrire $N_{opt} \geq 8$, et se traduit par « 8 pièges sont **nécessaires** », justifié par l'interprétation « 8 bêtes peuvent se poser en même temps côte-à-côte dans le champ, et il faut au moins un piège par bête) ;

Ensuite – ce que montre nos expérimentations – pendant un temps assez long le résultat reste $8 \leq N_{opt} \leq 10$, autrement dit le nombre cherché est soit 8, soit 9, soit 10. Cependant une conjecture forte se met en place : $N_{opt} = 10$, sous-tendue par les échecs répétés à trouver expérimentalement – avec le matériel – une solution en 8 ou 9 pièges.
À partir de là, pour (tenter de) prouver la conjecture $N_{opt} = 10$, il faut mettre en place un autre type de raisonnement, car on ne pourra pas poser 10 bêtes côte-à-côte sur le champ, ni même 9 bêtes, puisque l'aire du champ est 25 et que 3 fois 9 égal 27.

Ce qui va marcher pour la preuve, c'est le constat assez évident que « la bête est coûteuse, puisqu'il faut au moins 2 pièges pour protéger un carré de taille 2 », encore faut-il savoir quoi faire avec cette remarque. Ceci demande en général une intervention de l'enseignant, qui peut proposer d'étudier des partitions du champ en carrés de taille 2, et de raisonner sur ces partitions. Les différents essais aboutissent très souvent à l'une ou l'autre des deux partitions ci-dessous, qui permettent de **prouver** que $N_{opt} \geq 9$.



On a donc progressé dans la résolution du problème, puisqu'on est passé de $8 \leq N_{opt} \leq 10$ à $9 \leq N_{opt} \leq 10$.
L'enseignant peut alors suggérer d'essayer d'autres partitions qui pourraient donner le résultat conjecturé. Nous avons vu ci-dessus qu'une partition bien choisie permet de finalement prouver que $N_{opt} \geq 10$, et donc $N_{opt} = 10$.

Conclusion

Les trois problèmes de « chasse à la bête » présentés ici ont été expérimentés de très nombreuses fois, avec un succès constant auprès des élèves et des étudiants, et un vrai travail de fond sur les raisonnements mathématiques, l'optimisation et la preuve :
– les manipulations et essais aboutissent à des conjectures améliorables par les élèves eux-mêmes, et finalement la bonne conjecture est donnée en un temps raisonnable,
– l'enjeu de l'optimisation incite à trouver des solutions meilleures (que celles des autres),
– les raisonnements sont accessibles dès le début du collège, et ne sont pas caduques en fin de lycée (et au-delà),
– les arguments faux peuvent être débattus et invalidés par des contre-exemples « évidents » : par exemple, une solution conjecturée comme optimale peut être remise en question par une autre meilleure.
– les preuves sont « visibles » : une solution peut être « montrée » et argumentée sur la grille.

L'analyse de ces trois problèmes montre bien qu'il y a une progression dans la complexité de leur résolution. Il est donc recommandé de les proposer dans cet ordre, la situation avec les dominos permettant d'introduire la question de l'optimisation discrète – non familière aux élèves – , mais aussi les pavages, les différents raisonnements, etc... Au lycée, lorsque le temps est compté, l'enseignant peut proposer seulement les deux situations avec les triminos.

Comme pour nos autres situations de recherche, le travail en petit groupe permet à tous les élèves de s'investir, en mettant de côté provisoirement les différences de niveaux entre eux. Il oblige aussi à formuler les arguments pour défendre une solution.

L'enseignant peut choisir, selon la classe, jusqu'où formaliser les raisonnements et les preuves, la notion d'intervalle, les relations entre les notions de Nécessaire/Suffisant, « au moins/au plus » et « supérieur ou égal/inférieur ou égal ».

Fiche-élève

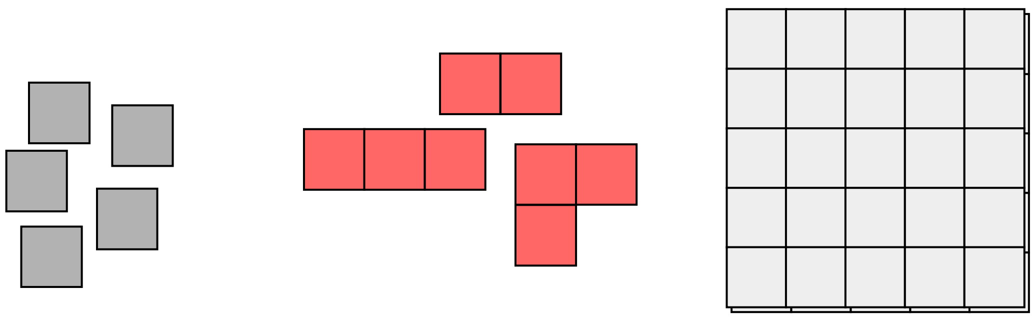
La « Chasse à la bête »

On veut protéger un territoire quadrillé (5×5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Question. Quel est le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

Il y a **trois problèmes distincts**, correspondant à trois sortes de bêtes (elles ne se mélangent pas !), à étudier dans l'ordre ci-après.

problème 1 : avec les dominos
problème 2 : avec les triminos longs
problème 3 : avec les triminos coudés



Pièges Les trois types de bêtes

Matériel : un plateau 5×5, des pièges (petits carrés), des dominos et des triminos. Commencer par les dominos, puis les triminos longs, enfin les triminos coudés

La deuxième énigme d'Einstein

1. Introduction

Nous étudions ici une SiRC qui s'appuie sur un problème qui est maintenant bien connu, que l'on peut trouver sur le web, mais qui à notre connaissance n'est jamais accompagné d'une solution convaincante, ni d'une analyse didactique. Cette SiRC peut être proposée de la fin de l'École primaire à la Terminale avec des attendus différents à chaque niveau.

2. Énoncé

> Un commerçant possède 3000 bananes qu'il souhaite transporter à dos de chameau dans une ville située à 1000 km de distance. Ces bananes vont aussi servir de nourriture au chameau, celui-ci a besoin pour avancer de manger une banane par kilomètre. De plus, il ne peut porter plus de 1000 bananes à la fois sur son dos.
>
> Combien de bananes au plus le commerçant pourra-t-il amener jusqu'au point d'arrivée ?

3. Organisation de la classe

Pour que cette SiRC fonctionne, il faut respecter certaines règles :
– Ne rien donner de plus au départ qu'un énoncé du type donné ici. Ne surtout pas découper cette situation en exercices avec des questions intermédiaires.
– Attendre des élèves des représentations du problème, qui attestent d'une prise en charge du problème, avant de commencer à faire une synthèse collective.
– Si la recherche ne se débloque pas, on peut relancer en donnant un exemple avec une étape à 1 km qui permettra d'apporter une banane à destination :

on avance avec 1000 bananes jusqu'au premier kilomètre,
on y dépose 998 bananes,
on revient au point de départ,
on reprend 1000 bananes et on repart,
au premier kilomètre, on prend au passage une banane « pour la route »,
on peut ainsi filer jusqu'à destination et arriver avec une banane.

Il peut arriver que certains points aient besoin d'être spécifiés à la demande des élèves. Si cela ne rend pas la situation « caduque », on peut y répondre.

Pour motiver la classe, on peut lancer un défi consistant à trouver qui amènera le plus de bananes. Dans ce cadre, vérifier que les solutions proposées sont valides et, si oui, prévoir, par exemple, de faire des affiches pour une discussion collective dans la classe.

Le travail en groupes (3 ou 4 élèves) est un moyen d'assurer la dévolution du problème, et la discussion sur les stratégies et les solutions. Les moments de synthèse collective sont importants pour faire le point sur les cas résolus, les conjectures, les contre-exemples, les preuves et les difficultés rencontrées.

Une fois le problème mené à son terme, l'institutionnalisation des résultats et des méthodes rencontrées permet de débattre des raisonnements utilisés et de celui qui permet d'obtenir la meilleure solution.

Cette SiRC a toujours été expérimentée sur une durée d'une heure. Selon les niveaux, si l'enseignant veut faire travailler plus en détail la construction de la preuve, il aura sans doute besoin de plus de temps.

4. Une solution mathématique

4.1 Le modèle

Ici on choisit le modèle suivant :

1 – Le trajet aura un nombre fini d'étapes (lieu où on peut s'arrêter pour déposer ou reprendre des bananes).
2 – On appelle *passage* un trajet dans un seul sens entre deux étapes.
3 – Le chameau mange une banane après chaque kilomètre parcouru. Au bout du km, il porte donc une banane de moins (sauf s'il a déposé ou embarqué des bananes).

Attention : le choix 3 n'est pas anodin car si on change cette règle on peut imaginer simplifier à outrance le problème (ce que ne s'interdisent pas de faire les élèves). Par exemple, si on peut nourrir le chameau de 1000 bananes avant de partir il est clair qu'il pourra transporter 1000 bananes à bon port.

4.2 Résolution

Principes (Lemmes) pour la construction de la solution

a) Ce n'est pas optimal d'abandonner des bananes.
Avec cinq bananes on peut faire avancer 2995 bananes d'un kilomètre (1 km) en faisant :

– un aller avec 1000 bananes et en en laissant 998 à 1 km puis un retour au départ (on revient sans banane sur le dos),
– puis un deuxième aller retour du même type en laissant 998 bananes à 1 km,
– puis un aller jusqu'au kilomètre 1, en prenant les 1000 dernières bananes.

On a alors 998+998+999 bananes soit 2995 bananes au kilomètre 1.
Donc abandonner cinq bananes revient à ne pas profiter de cette possibilité d'avancer de un kilomètre.
On peut aussi avancer de 200 mètres avec une banane par le même procédé.

b) l'ordre des passages entre les étapes ne change pas le nombre de bananes qu'il faut pour les parcourir. On peut donc d'abord s'occuper de tous les passages entre les deux premières étapes, puis entre les deux suivantes, etc…

c) Faire voyager des bananes qui ne seront pas consommées dans le sens retour ne permet pas d'améliorer la quantité de bananes amenées à bon port.

d) Le nombre des passages entre deux étapes vérifie :

– Tant qu'on a entre 2001 et 3000 bananes, il faut au moins 5 passages entre deux étapes consécutives (3 allers et 2 retours) pour ne pas abandonner de banane.

– Quand on a entre 1001 et 2000 bananes, il faut 3 passages (2 allers et 1 retour).
– Quand on a 1000 bananes ou moins, on peut les déplacer en un seul passage entre deux étapes.

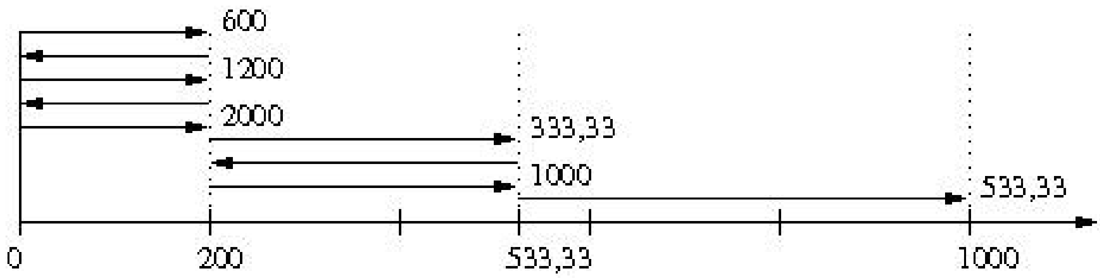
Solution

Il devient maintenant « naturel » de suivre la stratégie suivante (notée A).

La première étape **x1** est placée de façon à avoir 2000 bananes une fois qu'on a effectué les 5 passages pour déplacer les bananes jusqu'à l'étape **x1.** Comme on a fait 5 passages sur le même parcours (3 dans le sens aller et 2 en retour) et qu'on a consommé 1000 bananes, on a avancé de 1000/5 km soit 200 km. Donc **x1** est placée à 200 km.
L'étape **x2** est placée de façon à avoir 1000 bananes une fois qu'on a fini les 3 passages suivants soit à 1000/3 km de l'étape **x1** (au km 200), c'est à dire au km 533,333. Puis on avance jusqu'au km 1000 (étape finale). Pour cela on a avancé de 1000–533,333 km. On a donc consommé 467 bananes et on a amené à bon port 533 bananes.

4.3 Détails sur la preuve

Il est clair que la preuve telle que présentée ci-dessus n'est pas complète.
D'abord parce que l'expression « il devient maintenant naturel » n'est pas forcément vraie pour tous les élèves, en particulier pour un élève qui aurait une exigence forte sur la preuve.
Ensuite parce qu'on n'a pas donné la preuve de l'optimalité de la stratégie A.
Pour faire la preuve que cette solution est la meilleure, on peut procéder de la façon présentée en 5.4. Il nous semble cependant que c'est impossible de la présenter en collège et sans doute compliqué et chronophage en lycée.



4.4 Une preuve de l'optimalité de la solution proposée

L'idée sous-jacente est de choisir une autre stratégie possible supposée optimale (notée B) avec ses étapes propres et de concaténer les étapes des deux stratégies A et B en les considérant comme des étapes des deux trajets. On modifie alors les deux stratégies A et B sans changer leur coût en conservant le nombre de passages en chaque point du trajet mais en ordonnant les passages. Par exemple, si la stratégie B consiste à faire des étapes à 250, 500 et 1000 km, alors la liste des étapes des deux nouvelles stratégies (A' et B') sera 200, 250, 500, 533 et 1000 km.
La stratégie A sera modifiée en A' en faisant :

- cinq passages entre le km 0 et le km 200,
- puis 3 passages entre le km 200 et le km 250,
- puis 3 passages entre le km 250 et le km 500,
- puis 3 passages entre le km 500 et le km 533,
- puis 1 passage entre le km 533 et le km 1000.

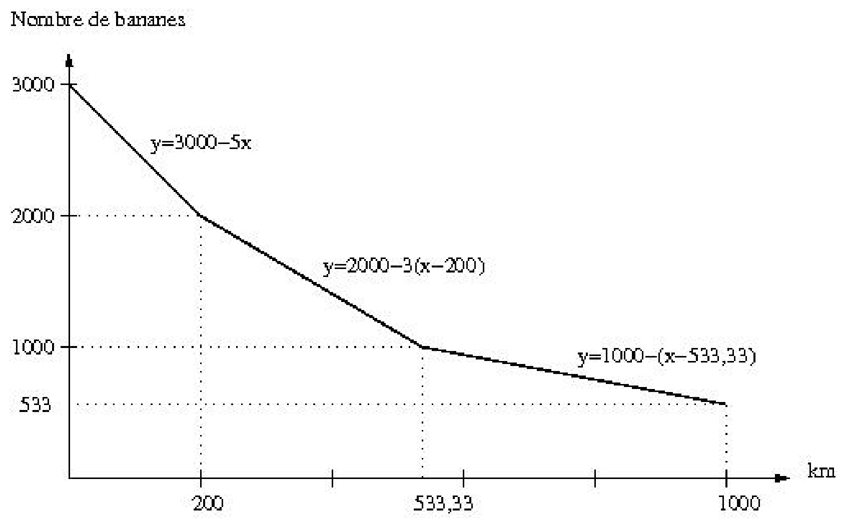
La stratégie B sera modifiée en B' en faisant :

- autant d'étapes entre le km 0 et le km 200 qu'il y en a dans B entre le km 0 et le km 250,
- autant d'étapes entre le km 200 et le km 250 qu'il y en a dans B entre le km 0 et le km 250,
- autant d'étapes entre le km 250 et le km 500 qu'il y en a dans B,
- autant d'étapes entre le km 500 et le km 533 qu'il y en a dans B entre le km 500 et le km 1000,
- autant d'étapes entre le km 533 et le km 1000 qu'ils y en a dans B entre le km 500 et le km 1000.

Ces transformations ne changent pas le coût des deux stratégies donc ne modifient pas leur caractère optimal ou pas. Elles sont justes plus compliquées. Le point a) qui interdit d'abandonner des bananes implique que sur les étapes avant 200 km la stratégie B' a au moins 5 passages. Or 5 passages suffisent à tout transporter et coûtent moins cher que plus de passages. Donc, comme B' est optimale, elle a 5 passages.
À partir de l'étape à 200 km et jusqu'à l'étape à 533 km, il faut au moins 3 passages, ils suffisent et sont moins coûteux que plus de passages, donc la stratégie B' est optimale avec trois passages.
Enfin pour la dernière portion du voyage il est clair qu'il faut aller tout droit puisqu'il ne reste que 1000 bananes au km 533. Au final, les deux stratégies sont égales.
Cette idée de concaténation ne nous semble pas évidente et, en tout cas, elle peut prendre beaucoup de temps à exposer et surtout à faire comprendre.

4.5 Une illustration graphique

Certains élèves ont proposé une illustration graphique qui est assez naturelle une fois l'idée de ne pas abandonner de banane posée. Même si ce graphique ne constitue pas une preuve, il a un intérêt d'explication et d'illustration de la solution.



5. Analyse didactique

5. Déroulements en classe et intérêt didactique de cette SiRC

Ce qui est à attendre des élèves varie bien évidemment selon les niveaux. Voici ce qui a pu être observé dans différentes classes.

Dans les premières classes de collège, les élèves vont réussir à comprendre la situation complexe, la modéliser (par des schémas par exemple), ils vont effectuer des calculs ayant du sens. Ils vont clairement pratiquer la démarche d'essai erreur, avec des stratégies à plus d'une étape. On peut espérer qu'ils trouvent 500 bananes à l'arrivée. On pourra les aider en leur donnant l'idée des étapes, mais pas tout de suite. Aucune preuve ne peut être formalisée à ce niveau.

En fin de collège, une bonne partie ne va pas trouver le résultat optimal. Les élèves ne devraient plus faire en fin de séance d'essai « au hasard ». Ils recherchent une démarche. Comme pour les plus jeunes, il faudra sûrement les « mener » vers l'idée et le travail sur les étapes. On ne leur demandera pas de formaliser le résultat optimal, mais on pourra en discuter avec eux.

Pour des élèves de lycée, les étapes doivent venir naturellement, avec une modélisation, une description du trajet, des trajectoires logiques sont attendues aussi. Avec l’aide de l’enseignant, la majorité des élèves peuvent améliorer leur stratégie et donné une solution au-delà des 500 bananes. La solution optimale peut même être trouvée par une grande partie d’entre eux et on peut essayer de faire une approche intuitive de la preuve de ce résultat. L’écriture complète de la preuve semble complexe (formaliser qu'il ne faut pas abandonner de bananes, qu'il faut maximiser la charge).

Nos expérimentations nous permettent d’affirmer les éléments didactiques suivants :
– La situation est complexe mais la recherche et la solution sont à la portée des élèves, aussi bien en collège qu'en lycée.
– Elle nécessite une modélisation et des représentations du problème dont on peut, dans un premier temps, laisser le choix aux élèves. Dans un deuxième temps, il est important de fixer collectivement un modèle, car les choix de modélisation ont ici des effets importants sur les solutions.
– Les élèves effectuent des calculs qui ont du sens et sont en lien avec la situation.
– Ils peuvent expérimentent une démarche de type "essai-erreur" qui permet d'approcher la solution.
– Ils pratiquent au moins partiellement une démarche logique, en posant des conjectures et en essayant de les justifier (ex : il ne faut pas abandonner de banane en chemin).
– Ils sont capables de changer de stratégie quand des indications sont données, par exemple faire le lien entre le fait qu'avec 5 bananes on peut avancer d'un km et le fait que pour être optimal il ne faut pas abandonner de banane.
– L'enjeu de trouver l'optimum est très motivant pour les élèves. Une solution (sous)-optimale est abordable dès le collège (au moins 500 bananes). En lycée, on peut motiver les élèves à rédiger la stratégie optimale et une preuve (partielle).

6. Pour aller plus loin

On pourrait imaginer une version continue (avec un véhicule consommant de l'essence) mais en lycée le risque est grand de voir les élèves chercher des fonctions. Par contre elle a l'avantage (ou le désavantage) de permettre de ne pas trop se poser de question sur la modélisation et ses conséquences sur la solution.

Bibliographie

On peut aller lire, sur ce problème, le compte-rendu d'un travail mené par des élèves du collège « L'ardillière de Nézant » à Saint-Brice-sous-forêt (Val d'Oise), dans le cadre de l'association Maths-en-Jeans, sous le titre : « Les bananes dans le désert » http://mathenjeans.free;fr/amej.
D'autres documents sur ce sujet peuvent être trouvés sur le Web, les solutions données ne sont pas toujours les meilleures ...

Annexe 1. La « narration de recherche » d'un enseignant

« Le chameau et les bananes »
J'ai d'abord essayé de déplacer les bananes de 500 bornes : tout de suite pas terrible.
Puis 300 (il reste alors 1500 bananes) puis on en abandonne 500 et on file tout droit jusqu'à 1000km et on en a sauvé 300.
Puis 250km (il reste 1750 bananes) + 250 km (il reste 1000 bananes) puis on file jusqu'au km 1000 et on a sauvé 500 bananes.
Puis j'ai pensé à des mini déplacements de 1km et je me suis rendu compte que quand on a les mêmes milliers de bananes tout au long du déplacement c'est équivalent de se déplacer deux fois sur 1km qu'une fois sur 2.
J'ai ensuite compris que c'était stupide d'abandonner des bananes.
On peut commencer par en utiliser 5 pour avancer d'un km et reproduire une stratégie qui perd 5 bananes en chemin.
Enfin je me suis dit que la bonne stratégie était d'avancer au plus loin avec encore 2000 bananes, soit avec une consommation de 5 bananes du km (deux allers retour et un aller simple), ce qui fait aller jusqu'au KM 200. Puis aller le plus loin possible avec encore 1000 bananes, soit avec une consommation de 5 bananes par km ce qui permet d'arriver au kilomètre 533,33333. On va alors directement au km 1000 et il reste 533,3333333 bananes.
Il me semble possible de rédiger quelque chose qui fait office de preuve à partir de cette stratégie.... »

Annexe 2. Une production d'élèves de Terminale S

Voici une énigme à résoudre : BRULEY Ronan / CLAUZIER Antoine

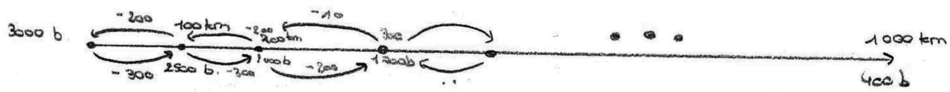
Un marchand possède 3000 bananes et il souhaite les vendre au marché qui se trouve à 1000 km de là. Pour les transporter, il dispose d'un chameau assez particulier puisque cet animal peut transporter jusqu'à 1000 bananes sur son dos et qu'en plus, il mange une banane par kilomètre qu'il parcourt!

Quel est le nombre maximal de bananes que ce marchand est en mesure d'amener au marché?

Rédigez ci-dessous votre meilleure solution à cette énigme en laissant toutes traces de recherche vous ayant conduit à celle-ci :

Comme le chameau mange une banane par kilomètre, il est impossible qu'il parcourt la totalité du trajet en une fois. Donc il peut parcourir ce chemin par paliers.

Si il effectue des paliers de 100 km on a le schéma suivant



Maintenant on cherche à trouver l'optimisation de ces voyages : • Lorsque que le nombre de bananes > 2000, le chameau fait 3 allers et 2 retours.

Donc : si palier de 100 km $\Delta N = |3 \times 100 + 2 \times 100| = |500|$

200 km : $\Delta N = |3 \times 200 + 2 \times 200| = |-1000|$

300 km : $\Delta N = |3 \times 300 + 2 \times 300| = |-1500|$

• Lorsque le nombre de bananes > 1000 et ≤ 2000, le chameau fait 2 allers et 1 retour

Donc : si palier de 100 km : $\Delta N = |2 \times 100 + 1 \times 100| = |-300|$

200 km : $\Delta N = |3 \times 200| = |600|$

300 km : $\Delta N = |3 \times 300| = |900|$

• Lorsque le nombre de bananes ≤ 1000, le chameau ne fait plus que des allers :

Donc : Si palier de 100 km : $\Delta N = |-100|$

200 km : $\Delta N = |200|$

300 km : $\Delta N = |300|$

On cherche alors à optimiser les trajets en ne faisant pas de trajets avec le chameau qui ne porte pas le poids maximal de bananes. Donc on cherche à ce que le chameau porte toujours 1 000 bananes.

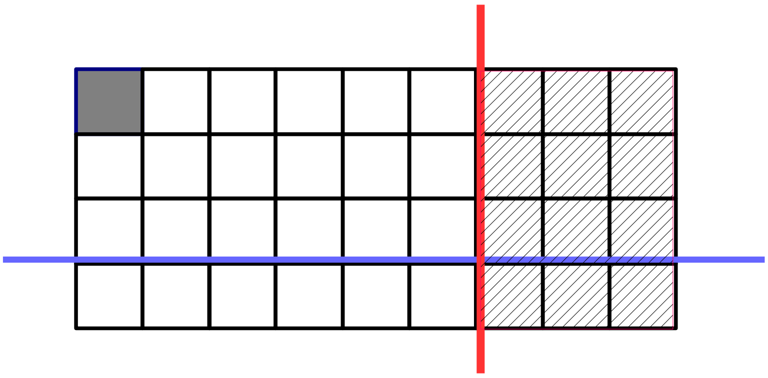
Fiche-élève

La deuxième énigme d'Einstein

Un commerçant possède 3000 bananes qu'il souhaite transporter à dos de chameau dans une ville située à 1000 kilomètres de distance de chez lui. Ces bananes vont aussi servir de nourriture au chameau, celui-ci a besoin pour avancer de manger une banane par kilomètre. De plus, il ne peut porter plus de 1000 bananes à la fois sur son dos.

Quel est le maximum de bananes que le commerçant pourra amener jusqu'à la ville d'arrivée ?

Le jeu du chocolat



1. La situation de recherche

Le problème

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs (ou deux équipes de joueurs). On joue sur une grille rectangulaire, de dimensions entières quelconques, représentant une tablette de chocolat dans laquelle un carreau est remplacé par un morceau de savon. Chaque joueur doit, tour à tour, casser la tablette en deux, en une seule fois, soit horizontalement soit verticalement, puis prendre le morceau sans savon. Le perdant est celui qui se voit contraint de prendre – sinon de manger – le carreau de savon !
La question est de trouver s'il existe une stratégie gagnante – qui assure de gagner quel que soit le jeu de l'adversaire – pour toutes les dimensions de la tablette, et toutes les positions du carreau de savon.

Remarquons que, quelle que soient les dimensions de la tablette et la position du carreau de savon, le jeu a une fin, puisque les dimensions sont entières et qu'elles diminuent strictement à chaque coup.

Les jeux de Nim

Ce problème relève des jeux de Nim que l'on peut décrire ainsi : deux joueurs ont devant eux un certain nombre de tas de tailles quelconques, d'objets identiques – disons des tas d'allumettes – chaque joueur doit à tour de rôle prélever autant d'allumettes qu'il veut dans un seul tas de son choix. Le perdant est celui qui ne peut plus jouer.
Les jeux de Nim sont des jeux équitables, qui ont une fin et pour lesquels il existe toujours une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. On se place toujours du point de vue du premier joueur. On dit que le jeu est « gagnant » (pour le premier joueur, appelons-le A) – ou qu'une position est gagnante – si A peut gagner **quel que soit** le jeu de son adversaire (appelons-le B). Sinon, le jeu est perdant – on dira que A est en position perdante. La stratégie de chacun des joueurs va consister à mettre son adversaire en position perdante, si cela est possible bien sûr.
Le jeu du chocolat étudié ici a été décliné en différentes versions (accessibles à des niveaux scolaires différents), qui correspondent à des jeux de Nim à 2, 3 ou 4 tas.

Un peu d'histoire

Certains d'entre vous penserons au *jeu des allumettes* du Film d'Alain Resnais "L'année dernière à Marienbad" et peut-être à la fameuse réplique : "Je peux perdre mais je gagne toujours". Précisons qu'il arrive que l'auteur de la réplique dans le film laisse courtoisement son adversaire commencer la partie.
En fait, les jeux de Nim, sous des formes différentes, sont connus depuis fort longtemps. On trouve le "Fan-Fan" en Chine, le "Tiouk-Tiouk" en Afrique. Ces terminologies "binaire" ne sont pas fortuites, comme nous le verrons dans nos analyses ci-après. Le jeu des bâtonnets de Fort Boyard en est une variante facile à décrypter du point de vue mathématique.
L'étude théorique des jeux de Nim a été faite par le mathématicien américain Charles L.Bouton[1] en 1901. Il semble que les stratégies gagnantes qu'il décrit, remarquablement simples dans leurs mises en œuvre, correspondent à celles utilisées auparavant par les joueurs de manière empirique.

Les versions du jeu que nous avons étudiées

On peut considérer différentes versions du jeu, de difficulté croissante. Des exemples de tablettes sont données en page suivantes pour chacune de ces versions.

– Version 1*a* (jeu de base) : le carreau de savon est situé dans un coin de la tablette, le rectangle est de dimensions quelconques (cf la figure ci-dessus).

– Versions 1*b* et 2 : le carreau de savon est sur un des bords de la tablette.
Deux cas particuliers sont relativement faciles à résoudre : celui d'un rectangle de dimensions $1\times N$ (version 1*b*), et celui d'un rectangle de dimensions $2\times N$ (version 2).

Pour d'autres dimensions $M\times N$ avec le carreau de savon n'importe où, le problème est difficile. Mais certain cas particuliers sont accessibles, nous les donnons ci-après.

– Versions 3 : la tablette est de dimensions $3\times N$
Deux cas particuliers peuvent être étudiés qui, avec le cas de la version 1, résolvent entièrement le cas de la tablette de dimensions $3\times N$

version 3*a :* le carreau de savon est sur la ligne centrale de la tablette
version 3b : le carreau de savon est sur un bord de la tablette.

On pourra aussi étudier deux versions plus générales dont la résolution est accessible
– Version 4*a*. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, M et N impairs, carreau de savon au centre.
– Version 4*b*. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, carreau de savon sur un bord.

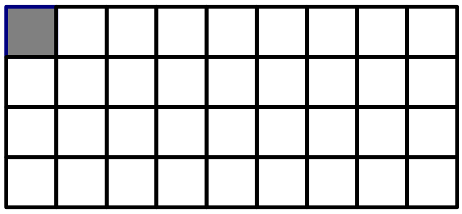
Matériel pour la situation

Quelques feuilles de papier et des stylos (de couleurs diverses) suffisent. On peut préparer plusieurs dessins de plaquettes de chocolat dans des dimensions différentes (bien choisies). Les élèves doivent faire plusieurs parties « pour de vrai » afin de comprendre le jeu, pour ensuite réfléchir ensemble à une stratégie gagnante à coup sûr.

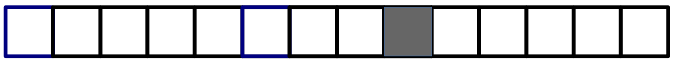
1 Bouton, C. L. (1901/02), "Nim, a game with a complete mathematical theory", *Annals of Mathematics*,,Second Series.

Exemples de tablettes (dans un ordre croissant de difficulté de résolution)

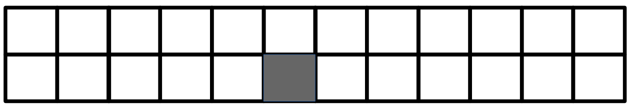
Version1*a*. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, carreau de savon dans un coin



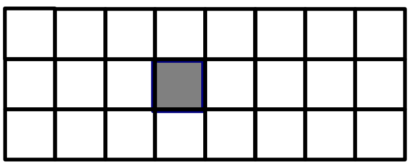
Version1*b*. Tablette de dimensions $1\times N$, carreau de savon n'importe où sur la ligne.



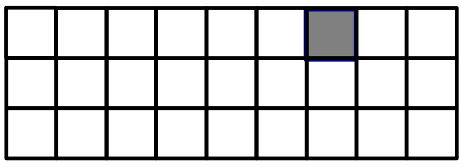
Version2. Tablette de dimensions $2\times N$, carreau de savon n'importe où.



Version 3*a*. Tablette de dimensions $3\times N$, carreau de savon sur la ligne centrale.
Version 3*b*. Tablette de dimensions $3\times N$, carreau de savon sur un bord.

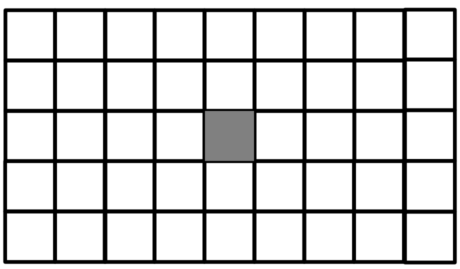


version 3a

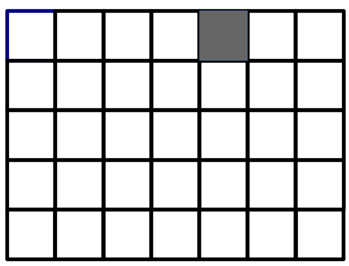


version 3b

Version4*a*. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, M et N impairs et carreau de savon au centre.
Version 4*b*. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, carreau de savon sur un bord.



version 4a



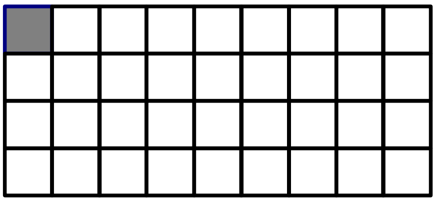
version 4b

Version générale. Tablette de dimensions quelconques $M\times N$, carreau de savon n'importe où

2. Analyse mathématique et didactique

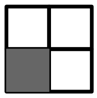
Nous partons du principe que les deux joueurs sont avertis et jouent de manière optimale. Étudions les stratégies gagnantes dans les différentes versions proposées. Pour les trouver, il faut absolument jouer plusieurs parties, en notant les différents coups afin de pouvoir les comparer et comprendre ce qui fait gagner ou perdre.

Version 1*a* (Problème initial). Le rectangle est de dimensions quelconques (4×9 sur l'exemple ci-dessous) et le carreau de savon est dans un coin.



En jouant, on arrive assez vite, parce que beaucoup de parties se terminent ainsi, à un premier constat concernant la stratégie gagnante :

> « Pour gagner, il faut arriver à donner à l'adversaire un carré 2×2 contenant le carreau de savon ».



Mais est-il toujours possible d'arriver à cette configuration quelle que soit la partie ? La réponse à cette question nécessite de faire un raisonnement « inductif ». Très souvent, en jouant à nouveau, on peut arriver à un deuxième constat : « Pour gagner, il faut donner un carré 3×3 à l'adversaire, ainsi on pourra le coup suivant lui donner une carré 2×2.

Finalement, il apparaît que pour gagner, il faut donner, à chaque coup, un carré à l'adversaire, donc, avant le carré 3×3, avoir donné un carré 4×4, etc.. Autrement dit la stratégie gagnante consiste à reconstruire un carré pour le donner à l'adversaire, quelle que soit sa dimension, pour arriver au savon – qui est un carré !
Est-ce toujours possible ? La réponse vient d'une propriété géométrique simple : lorsqu'on coupe un carré suivant une des dimensions, il devient un rectangle non carré, dans lequel on peut refaire un carré plus petit.
Ainsi, si le rectangle initial n'est pas un carré, la situation est gagnante (pour le joueur A) : il commence et, à chaque coup, il reconstruit un carré à partir du rectangle non carré donné par l'adversaire. En revanche, si la tablette de départ est un carré, le jeu est « perdant », c'est-à-dire gagnant pour l'adversaire ... sauf si on convainc celui-ci de commencer !

Version 1*b*. Tablette de dimensions $1\times N$, carreau de savon n'importe où.

On peut en jouant se convaincre facilement que si, au départ, il y a le même nombre de carreaux de chocolat de part et d'autre du carreau de savon (position symétrique), la situation est perdante, elle est gagnante sinon. En effet, à partir d'une position asymétrique, on peut retourner une position symétrique qui ne peut être transformée qu'en une position asymétrique, etc. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce que le perdant se retrouve contraint de prendre le seul carré qui reste, le savon (position symétrique finale). Ceci arrive obligatoirement puisque le nombre total de carreaux de chocolats diminue strictement à chaque étape. Le même raisonnement montre que si la position de départ est symétrique, la situation est perdante pour le joueur qui commence.

Exercice. Vérifiez que les versions 1*a* et 1*b* sont en fait les mêmes !

Version 2. Tablette de dimensions $2\times N$, carreau de savon n'importe où.

La stratégie gagnante est moins simple à découvrir, car il faut gérer la position du carreau de savon par trois nombres (m, n, 1), ses « distances aux bords » (nous ne distinguerons pas les positions (n, m, 1) et (m, n, 1), car elles sont symétriques).

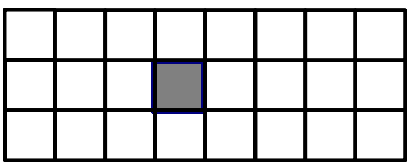
Cependant, quelques parties suffisent souvent à résoudre le jeu :
– la position (m, m, 1) est gagnante, quelle que soit m :elle permet de jouer (m, m, 0) qui est une position perdante (cf. version 2*a*) ;
– la position (1, n, 1) est gagnante quelle que soit n>0, puisqu'elle peut se ramener à la position perdante (1,0,1) ;
– les positions (2,m,1) avec m>3 sont gagnantes : on donne (2,3,1) qui est perdante ;
– les positions (3,m,1) avec m>2 sont gagnantes, on donne (2,3,1) qui est perdante.

Théorème. Les positions perdantes sont de type (1,2k, 2k+1), quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Toutes les autres positions sont gagnantes.

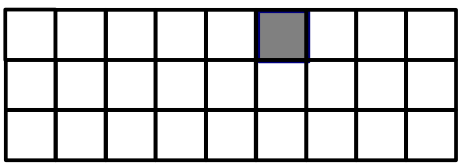
Versions 3 – Tablettes de dimensions $3\times N$

Pour décrire la position du carreau de savon, il nous faut quatre nombres (m, n, p, q=2–p), où m et n désignent le nombre des colonnes avant ou après le carreau de savon et p et q le nombre des lignes avant ou après le carreau de savon. On prendra $m\leq n$ et $p\leq q$, puisque le quadruplet (m,n,p,q) est équivalent pour raisons de symétrie aux quadruplets (m,n,q,p), (n,m,q,p) et (n,m,p,q).

Les deux exemples ci-dessous correspondent aux triplets (3,4,1,1) et (3,5,0,2)



version 3a



version 3b

Version 3*a*. Tablette de dimensions $3\times N$, carreau de savon sur la ligne centrale.

La position finale du carreau de savon est (0,0,0,0). La position du carreau est symétrique par rapport aux lignes (p=q=1). Or nous savons maintenant que les positions symétriques du carreau de savon jouent un rôle important dans la caractérisation des positions gagnantes/perdantes et de la stratégie gagnante. Si le carré de savon est au milieu de la ligne centrale, la position est perdante. Sinon, à chaque coup, il suffit de donner à l'adversaire une configuration symétrique relativement aux colonnes, c'est-à-dire, selon le déroulement du jeu, l'une des deux configurations perdantes (m,m,1,1) ou (m,m,0,0).

Version 3*b*. Tablette de dimensions $3\times N$, carreau de savon sur un bord ;

Elle est décrite au départ par le quadruplet (m,n,0,2).
On peut facilement voir que :

– si m=n, la situation est gagnante, le coup consiste à donner à l'adversaire la configuration perdante (m,m,0,0) (on retrouve la version 1a)

– en s'appuyant sur l'étude de la version 2, on voit que les positions (0,2, 2k, 2k+1) sont gagnantes quel que soit $k \in \mathbb{N}$: on peut en effet donner à l'adversaire la position perdante (0,1, 2k, 2k+1) (cf. version 3a)

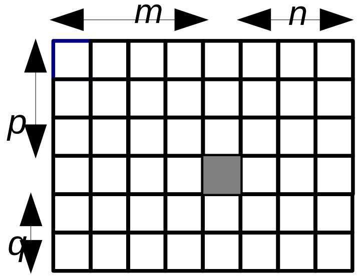
– si $m \neq n$ et m et n quelconques, la stratégie gagnante est plus difficile à repérer et sa justification nécessite une modélisation du jeu (donnée au paragraphe 4 ci-après).

Versions 4*a* et 4*b*

Dans la version 4a, le carreau de savon étant au centre, on se retrouve avec un quadruplet de type (m, m, p, p) à double « symétrie ». Le premier coup – en diminuant strictement m ou p – va casser une des symétries, ce qui laisse à l'adversaire la possibilité de reconstruire un quadruplet à double symétrie avec un des nombres m ou p plus petit. L'étude des cas précédents permet de comprendre que cette position 4a est perdante et d'imaginer la stratégie gagnante. Nous laissons cet exercice au lecteur.

La version 4b est plus difficile à résoudre. Elle ne présente pas un grand intérêt pour la classe – sauf si l'étude générale est prévue. Toutes les versions précédentes de tablettes sont largement suffisantes pour faire le travail mathématique souhaité. Il sera intéressant alors d'y revenir après avoir étudié l a résolution du cas général (développée ci-après).

Version générale. Tablette de dimensions quelconques, carreau de savon n'importe où.



Ici, la tablette est de dimensions 8×6 et m=4, n=3, p=3 et q=2.

On repère le morceau de savon à l'aide de quatre paramètres m, n, p, q, ses « distances aux bords » mesurées en carreaux de chocolat.

On peut là encore tenter de faire quelques essais avec de petites valeurs de m, n, p, q strictement positives. Mais la stratégie est complexe et a peu de chance d'être mise en place complètement, car la liste des quadruplets gagnants est longue et ne permet pas d'élaborer facilement une stratégie dans le feu de l'action.
Nous donnons au paragraphe 4 la résolution complète du jeu dans le cas le plus général.

3. Déroulements classiques en classe

Ce jeu a été expérimenté de nombreuses fois, avec des élèves de tous niveaux, du CE2 à l'Université.

Dans la version 1*a*, la dévolution du jeu est immédiate dès la fin de l'école primaire. L'objectif du problème (trouver un moyen de gagner) semble accessible, ce qui est motivant : en effet, des idées sur la stratégie gagnante émergent après quelques parties jouées en binômes.

Au collège, une grande partie des élèves trouvent la stratégie gagnante dans sa version 1*a*, puis dans la version 1*b*. Les dimensions des tablettes peuvent, dans un premier temps, être choisies par l'enseignant. La formulation des stratégies gagnantes et l'explicitation des raisons pour lesquelles elles « marchent » induisent un travail entre les domaines géométrique, numérique et langagier qu'il ne faut pas négliger.

Au lycée, on peut poursuivre avec les versions 2, 3*a* et 3*b*, mais il n'est pas attendu des élèves qu'ils découvrent seuls entièrement les stratégies gagnantes. Il faut en effet gérer la progression des valeurs des nombres dans les triplets ou les quadruplets, c'est-à-dire choisir, à chaque coup, celui des nombres que l'on va faire décroître pour rester sur une position gagnante.

Dans sa thèse, Ximena Colipan* a montré que, pour les situations 1*a* et 1*b,* les élèves du secondaire restent longtemps sur une représentation réaliste du jeu, s'appuyant sur des dessins de tablettes des dimensions particulières qu'ils se fixent eux-mêmes. En laissant du temps pour la résolution du jeu, tous finissent par établir les deux propriétés suivantes :
– les positions gagnantes ou perdantes sont en corrélation avec le fait que la tablette est un carré ou un rectangle non carré
– les versions 1 et 2a sont les mêmes !
Certains élèves donnent les stratégies gagnantes complètes pour les versions 1*a* , 1*b* et 2.
Dans un deuxième niveau d'abstraction, la tablette a disparu. Le problème peut être traité avec un modèle de *p*-uplets de nombres entiers. Avec des élèves ou étudiants motivés, on peut introduire cette modélisation.

La modélisation que nous décrivons maintenant et qui permet de résoudre le jeu dans sa version la plus générale n'est pas attendue dans le secondaire.

4. Résolution mathématique de la version générale

Le quadruplet, non ordonné, (m,n,p,q) des distances aux bords caractérise une configuration. Un coup a pour conséquence de diminuer un et un seul de ces quatre paramètres. Remarquons tout de suite que le jeu s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes, car les valeurs de la somme $m+n+p+q$ forment au cours du jeu une suite strictement décroissante d'entiers positifs.

* Colipan Ximena (2014) Étude didactique de situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim, Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble

Nous allons démontrer que toute partie se termine par un gagnant (et un perdant) et qu'il y a une règle relativement simple pour déterminer une position perdante et, dans le cas contraire, pour mettre en place une stratégie gagnante.

Jeu de Nim à *n* tas en version normale (ou misère)

Rappelons que les jeux de Nim sont des jeux à deux joueurs, qui jouent chacun à tour de rôle, il y a un gagnant et un perdant, pas de partie nulle possible. Dans la version « normale », celui qui ne peut plus jouer a perdu ; dans la version « misère », celui qui termine à perdu. On peut jouer avec un ou plusieurs tas de jetons, bâtons, billes, graines etc. La règle usuelle dit chaque joueur enlève le nombre de bâtons de son choix dans un seul des tas qu'il choisit comme il veut.

Dans le jeu du chocolat, les nombres qui permettent de repérer la position du carré de savon correspondent aux tas (quatre dans le cas général), et couper sur une des dimensions revient à diminuer le nombre de cases du « tas ». Le jeu du chocolat est en version «normale ».

Nim-somme

Un « bit » est un chiffre qui peut prendre les valeurs 0 ou 1. Pour un nombre a, le i-ème bit de a est celui en position i dans son écriture en binaire, compté de droite à gauche.
La Nim-somme de deux nombres a et b, notée $a \oplus b$, est le nombre dont le i-ème bit vaut 0 si la somme des i-èmes bits de a et b est paire, et 1 sinon.[2]
La Nim-somme de n nombres $a_1, a_2, ..., a_n$, notée $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$, est le nombre dont le i-ème bit vaut 0 si la somme des i-èmes bits des n nombres est paire, et 1 sinon.

Exemple. Les nombres a=11, b=9 et c=7 s'écrivent en binaire 1011, 1001, 111 et leur Nim-somme vaut 0101 (en base 2), soit 5 en base 10.

Théorème (C.L. Bouton)

Si la Nim-somme $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ est nulle, **toute** modification d'un a_i entraîne qu'elle ne l'est plus.

Si la Nim-somme $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n$ n'est pas nulle, **il existe** une modification (diminution) d'un a_i qui la rend nulle.

Corollaire

Dans la version « normale » du jeu de Nim à n tas, la position (a_1,..., a_n) est perdante si et seulement si la Nim-somme est nulle : $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$. Si la Nim-somme de a_1,..., a_n est non nulle, il existe une stratégie gagnante. Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème. Il suffit de remarquer que la position finale du jeu est 0,…,0 qui est de Nim-somme nulle.
Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce théorème, mais nous allons décrire la stratégie gagnante sur un exemple, qui devrait permettre au lecteur de comprendre comment ça marche.

2 Note.Cette opération correspond au « OU-Exclusif » en logique, elle est souvent appelée « somme binaire sans retenue ».

Étude sur un exemple

Considérons la tablette correspondant au quadruplet (m,n,p,q) = (5,14,7,11). La Nim-somme, notée Nim (5,14,7,11), vaut 5⊕14⊕7⊕11=0111 (soit 7 en base 10), comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

5	0	1	0	1
14	1	1	1	0
7	0	1	1	1
11	1	0	1	1
Nim (5,14,7,11)	0	1	1	1

D'après le théorème précédent, Nim (5,14,7,11) n'étant pas nulle, le joueur qui a la main peut la ramener à zéro. Pour cela, il faut repérer, dans la Nim-somme, la colonne la plus à gauche où il y a un 1 (ici, la deuxième). Il y a donc au moins un 1 sur une des lignes dans cette colonne. Il choisit une de ces lignes, par exemple la deuxième, correspondant au nombre 14. Il remplace ensuite le 1 par un zéro, ainsi le bit de la Nim-somme correspondant à cette colonne devient nul. Puis il va répéter cette procédure sur toute cette ligne en la parcourant vers la droite : remplacer, dans les colonnes où le bit dans la Nim-somme n'est pas nul, les 0 par des 1 et les 1 par des 0, de manière à annuler un par un tous les bits de la colonne correspondante de la Nim-somme.

5	0	1	0	1
14 **→9**	1	**1→0**	**1→0**	**0→1**
7	0	1	1	1
11	1	0	1	1
5 ⊕ 9 ⊕ 7 ⊕ 11	0	**0**	**0**	**0**

La ligne modifiée représente un nombre strictement plus petit que le nombre initial (ici 14 devient 9). En enlevant 14–9= 5 allumettes au second tas (ou 5 barres de chocolat là où il y en avait 14), on a ramené la Nim-somme à zéro. L'adversaire en jouent va modifier une ligne et une seule, ce qui change un ou plusieurs bits dans cette ligne, la Nim-somme devient non nulle. La partie se poursuit ainsi jusqu'à ce que le second joueur se trouve devant le jeu (0, 0, 0, 0).

Remarquons que **la stratégie gagnante n'est pas unique**. Nous aurions pu choisir l'autre ligne où il y avait un 1 dans la deuxième colonne (la quatrième ligne).

Cette analyse montre bien que, pour mettre en œuvre une stratégie gagnante dans la plus version générale du jeu, il faut être un expert : en effet, sauf si on a mémorisé un grand nombre de sous-parties en jouant très souvent, il faut savoir calculer en base 2 la Nim-somme de chaque position, l'interpréter pour choisir le coup gagnant à jouer, et tout cela très vite si on ne veut pas faire fuir l'adversaire !

Fiche-élève

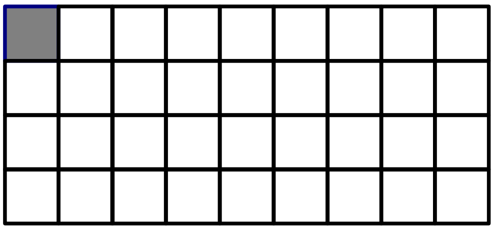
Le jeu du chocolat

Jeu à deux (équipes de) joueurs

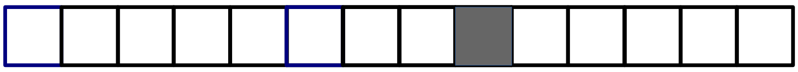
Chaque joueur doit, à tour de rôle, « couper » la tablette dans une seule de ses dimensions et choisir de garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carreau de savon (en gris sur le dessin) doit le manger et il a perdu.

Existe-t-il une stratégie gagnante (pour ne pas manger le carreau de savon !) quelles que soient les dimensions de la tablette ?

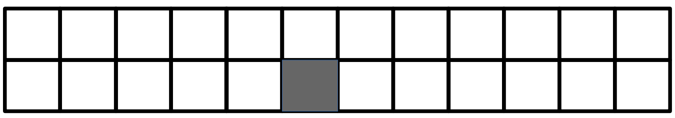
Version 1*a*. Le rectangle est de dimensions quelconques et le carreau de savon est dans un coin



Version1*b*. Tablette de dimensions $1 \times n$, carreau de savon n'importe où sur la ligne.



Version2. Tablette de dimensions $2 \times n$, carreau de savon n'importe où.



Question subsidiaire. Voyez-vous une ressemblance entre les versions 1*b* et 1*a* ?

Le carré insécable

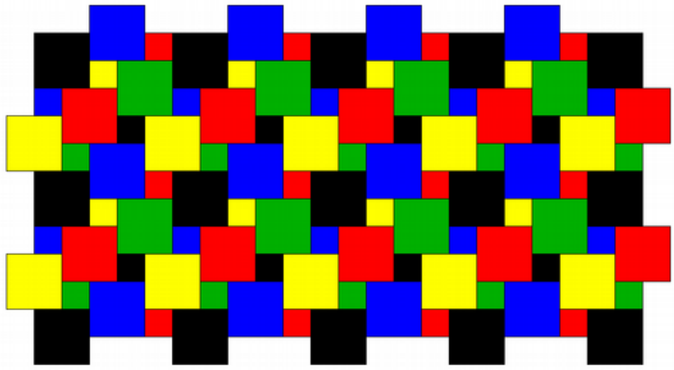


Figure 1: Un joli pavage (insécable) du plan

1. Définitions et problème général

On considère des pavages particuliers du plan ou d'une partie du plan par des **carrés** à côtés de longueurs quelconques, que l'on appellera des **carreaux**. La figure ci-dessus illustre un pavage du plan par des carreaux (carrés) dont la particularité est qu'on ne peut tracer aucune droite traversant le pavage horizontalement ou verticalement sans couper au moins un carré du pavage. On dira qu'un tel pavage est **insécable**. Cette figure montre qu'il existe (au moins) un pavage insécable du plan. Mais, est-ce possible de paver ainsi un rectangle ou un carré, ou n'importe quelle partie bornée du plan ? En effet, dans le pavage ci-dessus (figure 1), on ne peut pas délimiter un rectangle sans couper un carreau du pavage, car ils « dépasseront » tous – puisque justement le pavage est insécable ! Remarquons que le pavage d'un carré par un seul carreau est insécable, quelle que soit la taille de ce carré.

Nous allons étudier des pavages non-triviaux par des carreaux carrés dont les longueurs des côtés sont entières – on dispose de toutes les tailles (1×1, 2×2, 3×3, etc.).
La figure suivante montre deux pavages de la grille rectangulaire 5×7 par des carreaux carrés, dont l'un est insécable. Il existe donc de tels pavages ! Est-ce possible pour des rectangles de toutes dimensions ?

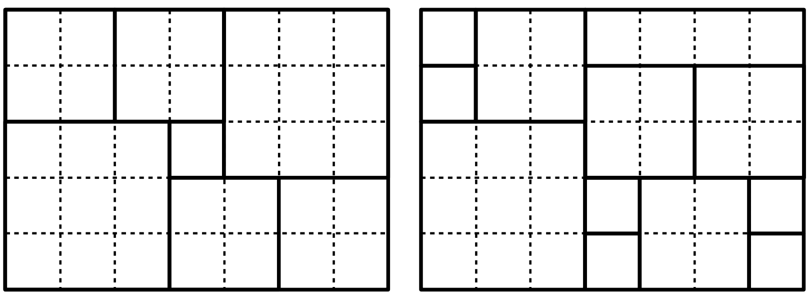


Figure 2. Un pavage insécable et un pavage sécable de la grille 5 × 7

Nous allons restreindre encore notre recherche à l'étude de pavages insécables de grilles carrées, de tailles quelconques.

Pavages insécables de grilles carrées $n\times n$

Dans la phase de recherche, on va – assez naturellement – choisir une valeur de n et faire des essais en s'autorisant toutes les tailles pour les carreaux. On peut faire cela pour des valeurs de n pas trop grandes, avec papier-crayon-gomme – un peu fastidieux car il faudra beaucoup d'essais – ou du matériel manipulable qui permet plus facilement de construire et déconstruire des pavages, changer les positions et les tailles des carreaux. C'est ce dernier choix que nous avons fait (notre matériel est décrit au §2 et en figure 4).

Pour certaines valeurs de n, on peut trouver plusieurs pavages insécables, avec un nombre total de carreaux différents. Pour d'autres valeurs de n, la question de l'existence même d'un pavage insécable peut se poser.

Nous avons identifié et étudié trois questions dont des réponses partielles peuvent émerger « naturellement » de la phase expérimentale de la situation de recherche.

Question 1. Peut-on construire un pavage insécable d'une grille $n\times n$ pour tout n ?

Question 2. Étant donnée une grille $n\times n$, quel est le plus petit nombre de carreaux qui permettent de faire un pavage insécable (non-trivial) de cette grille ?

Question 3. Étant donnée une grille $n\times n$, quel est le plus grand nombre de carreaux qui permettent de faire un pavage insécable (non-trivial) de cette grille ?

Évidemment, la question 1 est première, car les questions 2 et 3 n'ont de sens que si on a trouvé au moins un pavage insécable.
Ces trois questions sont de natures et de complexités différentes. Pour prouver l'existence d'un pavage insécable, il « suffit » d'en construire un. Cependant, la réponse peut être facile ou non, selon la taille de la grille, la taille des carreaux que l'on choisit, la méthode de pavage que l'on adopte. Les questions 2 et 3 relèvent des « problèmes d'optimisation ». Prouver qu'on a « le plus petit » ou « le plus grand » nombre de carreaux possibles pour que le pavage soit insécable nécessite des raisonnements spécifiques souvent complexes.

Nous verrons que ces trois questions peuvent être abordées de manière compréhensible, et que l'expérimentation et les essais-erreurs permettent de les résoudre, au moins dans quelques cas particuliers.

Un exemple

Pour la grille 7×7, en expérimentant, on a construit le pavage insécable de 18 pièces représenté en figure 3, qui résout la question 1 : il existe un pavage insécable pour la grille de taille 7. On peut alors se demander s'il existe un pavage insécable avec moins de 18 pièces (ce qui correspond à la question 2), ou s'il existe un pavage insécable avec plus de 18 pièces (ce qui correspond à la question 3).

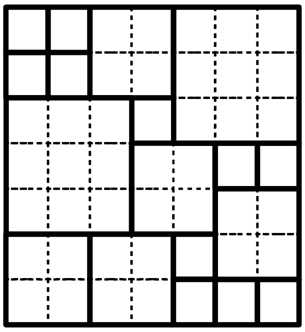


Figure 3. Un pavage insécable de la grille 7×7

2. Matériel et déroulement usuel de la recherche en classe

Cette situation est réalisable en une heure environ, pour des élèves de collège ou lycée, avec un dispositif expérimental qui permet de faire facilement des essais. Nous avons construit un matériel en bois (on peut le faire en carton ou en mousse) permettant d'expérimenter sur les grilles carrées de tailles allant de 1×1 à 10×10, avec un nombre suffisant de carreaux de toutes les tailles de 1×1 à 9×9 (en annexe la description complète du matériel présenté ci-dessous).

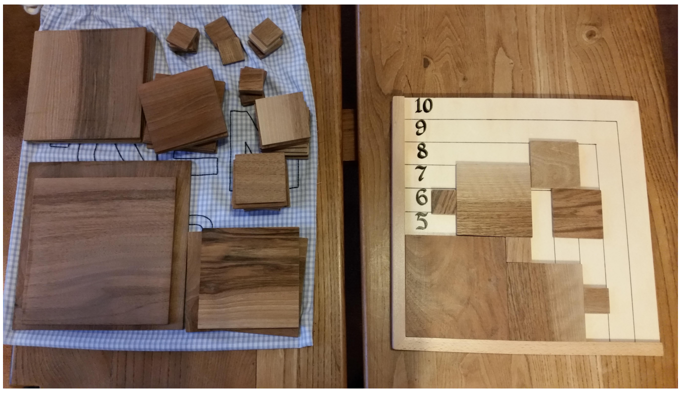


Figure 4. Une photo du matériel IREM ... avec un début de pavage du 8×8

Proposition de gestion

Après la distribution du matériel (un pack par groupe de 3-4 élèves), l'enseignant doit expliquer la notion de « carré insécable », en montrant rapidement un exemple sur une grille et quelques carreaux. Il peut donner une image d'un pavage insécable comme étant un découpage contraire à celui d'une tablette de chocolat classique, justement fait pour pouvoir être cassé facilement dans toute la longueur. Puis l'enseignant peut suggérer de commencer par la grille de taille 8 : elle est bien adaptée pour mettre les élèves en activité car, comme il existe plusieurs pavages insécables, il est facile d'en trouver un. Il peut demander aux élèves de chercher ensuite pour les autres tailles de carrés.

Pour la gestion des solutions proposées par les élèves, l'enseignant peut tracer au tableau deux colonnes, l'une pour les valeurs de la grille de taille *n*, l'autre pour le nombre *k* de carreaux du pavage insécable trouvé ou la réponse « impossible » selon les cas. Ceci favorise une émulation entre les élèves, une motivation pour trouver d'autres solutions, avec plus de carreaux, ou moins de carreaux, plus jolies, etc... Bien sûr, ces solutions doivent être validées par tous les élèves – en essayent de les retrouver – et finalement par l'enseignant.
Pour des petites valeurs de *n*, on peut écrire au tableau la liste de tous les pavages insécables trouvés, ce qui peut faire avancer, en même temps qu'on cherche un pavage, la résolution des questions Q2 et Q3 (nombre minimum et nombre maximum de carreaux pour un pavage insécable).

3. Productions d'élèves pour les questions Q1 et Q2

Nous avons expérimenté essentiellement les deux premières questions. On peut éliminer assez vite collectivement le cas du pavé unique (comme peu intéressant). Pour la grille 5×5, la résolution est difficile. Nous avons souvent vu apparaître des arguments liés à une « fleur » – avec des expressions du type « au milieu », « avec un coeur », permettant à certains groupes d'élèves de trouver une solution à 13 pièces pour n=5 (voir figure 5). Cette solution est assez souvent considérée comme non optimale : « on doit pouvoir trouver un pavage avec moins de 13 carreaux ». De manière générale, les arguments de symétrie sont très présents, aussi bien pour trouver un pavage insécable que pour dire que « c'est le meilleur » ! ». Nous verrons au §4 que ces arguments ne marchent pas.
Dans nos expérimentations, nous avons régulièrement obtenu les valeurs suivantes (la liste est non exhaustive et bien sûr n'apparaît pas dans cet ordre) :

<table>
<tr><td>n</td><td>Nombre de pièces</td><td>Preuves de non-existence pour la question 1 et de l'optimum pour la question 2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>impossible</td><td rowspan="4">Exhaustivité des cas
ou Absurde</td></tr>
<tr><td>2</td><td>impossible</td></tr>
<tr><td>3</td><td>impossible</td></tr>
<tr><td>4</td><td>impossible</td></tr>
<tr><td>5</td><td>13</td><td rowspan="3">À partir de la solution existante</td></tr>
<tr><td>6</td><td>11</td></tr>
<tr><td>7</td><td>9, 12, 14, 17, 19, 20</td></tr>
<tr><td>8</td><td>19, 17, 13, 10, 12</td><td rowspan="6">Conjectures</td></tr>
<tr><td>9</td><td>15, 13, 10</td></tr>
<tr><td>10</td><td>16, 11</td></tr>
<tr><td>11</td><td>11</td></tr>
<tr><td>13</td><td>12, 13, 14, 15</td></tr>
<tr><td>17</td><td>14</td></tr>
</table>

Dans tous les groupes, il y a souvent une première stratégie basée sur l'idée que « pour en mettre moins, il faut paver avec des carrés les plus grands possibles », mais cette stratégie conduit à compléter avec beaucoup de très petits carreaux – du coup, le nombre total de carreaux est finalement très grand. Souvent, les (nombreux) essais vont induire que « dans un carré de taille n, on ne peut mettre aucun carré de taille supérieure strictement à n–3, car le pavage est alors forcément sécable ».
La conjecture fausse que toute solution optimale contient une pièce de taille n–3 est régulièrement énoncée. Mais des contre-exemples émergent dans d'autres pavages insécables contenant moins de pièces et sans pièces de taille n–3.
D'autres remarques ou questions peuvent relancer la réflexion, tells que :
– On a trouvé le même nombre de pièces pour le carré de taille 11 et pour le carré de taille 6. Peut-on trouver un pavé insécable pour le carré de taille 6 avec moins de pièces ?
– La solution avec 13 pièces est-elle vraiment minimale pour le carré de taille 5 ?
– Le nombre de pièces (dans la liste écrite au tableau) ne semble pas être une fonction régulière et croissante de n. Cependant, si on a trouvé un pavage optimal pour une grille de taille n, est-ce que cela donne un pavage pour d'autres valeurs de n et lesquelles ?

Vers la fin de la séance, l'enseignant peut suggérer de chercher une preuve de la non-existence d'un carré insécable de taille $n < 5$. Une solution insécable de taille 5 ne sort généralement qu'après un long moment, il arrive même que les élèves se mettent à douter de son existence.

Avec des élèves plus avancés, on peut demander une preuve de l'existence d'un carré insécable pour toute taille $n \geq 5$. (En particulier, on peut « gonfler » une solution de taille n pour en faire une de taille $2n$, $3n$, $4n$, ...)

4. Éléments de résolution mathématique

Nous donnons ici les solutions et quelques preuves ou conjectures (tout n'est pas résolu!) pour les trois problèmes correspondant à chacune des questions données ci-dessus. La compréhension des preuves n'est pas nécessaire pour gérer la situation en classe, l'enseignant pouvant décider jusqu'où il peut aller avec ses élèves en fonction de ses propres objectifs et du niveau des élèves. Cependant, la résolution complète de certains cas est accessible dès le début du collège, par des raisonnements de type « exhaustivité des cas » (avec arguments de symétrie), ou « construction de solution ».

4.1. Existence d'un pavage insécable d'une grille carrée n×n pour tout n ? (Q1)

On obtient facilement un pavage insécable d'un grand carré en commençant par construire un « moulin à vent » constitué de quatre carreaux relativement grands tournant autour d'un petit carreau central, comme dans le pavage gauche de la figure 2 et dans le pavage de la figure 5. Il empêche souvent à lui tout seul la sécabilité locale. Il faut cependant un peu de place pour faire cette construction qui ne marche qu'à partir de la taille 5. En faisant varier les différents paramètres, on peut essayer de minimiser le nombre de carreaux utilisés.

Remarque. Un pavage insécable pour la grille de taille n fournit, par homothétie, un pavage insécable pour toute grille dont la taille est un multiple de n. Cette remarque permet de démontrer qu'il suffit de construire des carrés insécables de tailles 6, 8, 9 et p pour tout nombre premier $p \geq 5$, car tout entier $n \geq 5$ est divisible par 6 ou 8 ou 9 ou un nombre premier supérieur ou égal à 5.

Non existence

La propriété suivante est utile pour la construction d'exemples, et aussi pour la preuve de l'inexistence de pavages insécables pour n plus petit que 5.

Propriété 1. Dans un pavage insécable d'une grille carrée de taille n, il n'y a pas de carreau de taille n–1 ou n–2.

Preuve

À symétries près, il n'y a qu'une seule position pour un carreau de taille n–1 dans une grille carrée de taille n, par exemple en haut à gauche de la grille. Il est alors évident qu'il n'y a qu'une façon de compléter le pavage et qu'alors il est sécable puisque la dernière droite verticale ne coupe aucun carreau du pavage.

Toujours à symétries près, il n'existe que trois positions dans une grille carrée de taille n, pour un carreau de taille n–2 : en haut à gauche, en haut au milieu, ou centré.

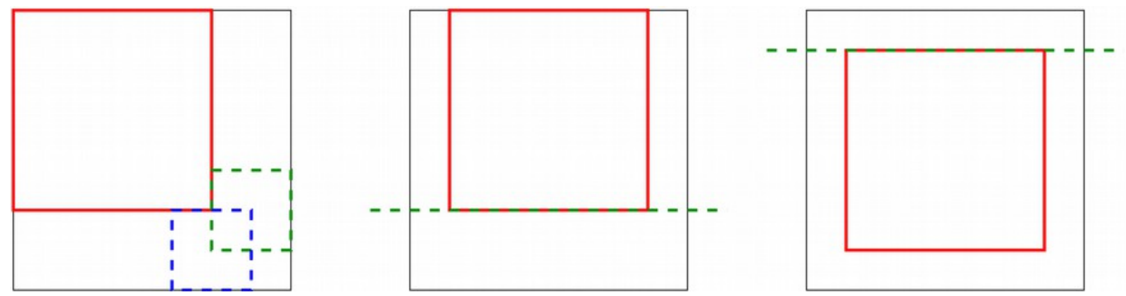


Figure 4. Les trois positions du carreau de taille n–2 dans un pavage d'une grille de taille n.

– Dans le premier cas, pour que le pavage soit insécable, il faut compléter avec un carreau de taille 2 au bout du bord droit et au bout du bord bas (voir figure 4). Mais ces deux carreaux s'intersectent, ce qui est interdit.

– Dans le deuxième cas, quelque soit la façon dont on complète le pavage, l'avant dernière droite horizontale ne coupe aucun carreau.

– Dans le dernier cas, on ne peut compléter le pavage que d'une seule façon, et la première droite horizontale ne coupe aucun carreau.

Grâce à la propriété 1, on démontre facilement la propriété suivante.

Propriété 2. Il n'existe pas de pavage insécable pour des grilles carrées de taille inférieure ou égale à 4.

Pour les grilles de tailles 2 ou 3, c'est une conséquence directe de la propriété 1. Pour la grille de taille 4, un pavage insécable ne peut contenir aucun carreau de taille 3 ou de taille 2. Il ne reste plus que les carreaux de taille 1, ce qui ne permet pas de créer un pavage insécable.

Existence d'un pavage insécable

Propriété 3. Il existe au moins un pavage insécable pour toute grille de taille $n \geq 5$.

Nous en proposons deux preuves, car elles font appel à des raisonnements différents. Tout d'abord, on sait construire un tel pavage pour n=5, le voici.

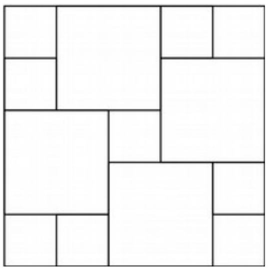


Figure 5. Un pavage insécable de la grille carrée de taille 5

Preuve A (par récurrence)

On va démontrer que la propriété P(n) : « Il existe au moins un pavage insécable pour la grille de taille n » est vraie pour tout $n \geq 5$.

Établissons l'hérédité de P(n) : « Pour tout n, $n \geq 5$, s'il existe un pavage insécable de la grille de taille n, alors il existe un pavage insécable de la grille de taille n+1. »

Considérons la grille de taille n+1, $n \geq 5$, et plaçons dans cette grille, en haut à gauche, la grille de taille n. S'il existe un pavage insécable de la grille de taille n, ce pavage contient un carreau d'une taille k en bas à droite. On l'enlève, puis on pose un carreau de taille k+1 en bas à droite de la grille de taille n+1. On complète la colonne à droite et en bas par des carreaux de taille 1.

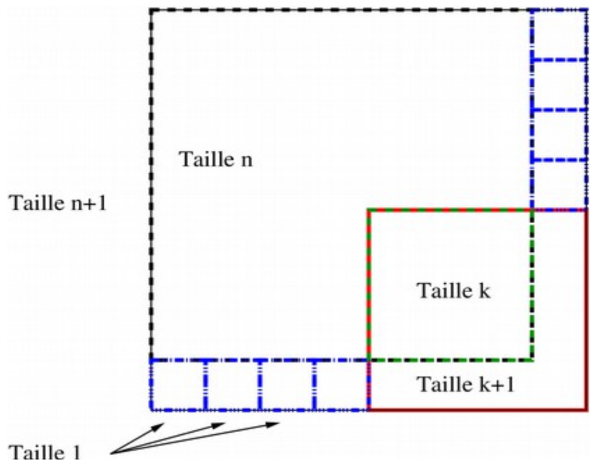


Figure 6. Construction d'un pavage de la grille de taille n+1 contenant une grille de taille n.

Ce pavage est insécable car les (n–k–1) premières droites verticales sont bloquées par le pavage de la grille de taille n en haut à gauche et les k dernières droites sont bloquées par le carreau de taille k+1 en bas à droite. De même pour les droites horizontales.
La propriété P(n) est donc héréditaire pour tout $n \geq 5$ et elle est vraie pour n=5, ce qui, d'après le principe de récurrence, prouve que P(n) est vraie pour tout $n \geq 5$.

Preuve B (directe). La construction est très semblable, mais on utilise pour tout n, la grille de taille 5 avec son pavage insécable. Dans toute grille de taille $n \geq 6$, on pose en haut à gauche le pavage du carré de taille 5. On enlève son carreau de taille 1 en bas à droite et on le remplace dans la grille de taille *n* par un carreau de taille *n*–4. On remplit le reste du carré de taille *n* avec des carreaux de taille 1.

Le pavage ainsi obtenu est insécable car les quatre premières droites verticales sont bloquées par le pavage du carré de taille 5 en haut à gauche et les *n*–5 dernières sont bloquées par le carreau de taille *n*–4 en bas à droite de la grille de taille *n*. De même pour les lignes horizontales.

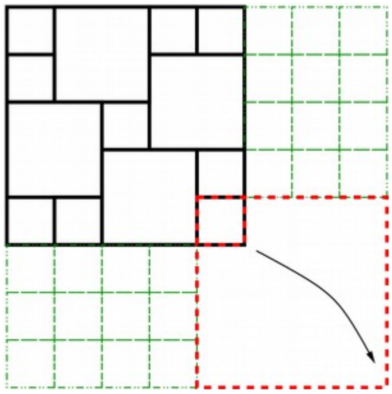


Figure 7. Construction d'un pavage de la grille de taille *n*+1 à partir de celui de la grille de taille 5

4.2 Construction d'un pavage insécable avec un nombre minimal de carreaux (Q2)

La grille de taille 5

Par la proposition 1 précédente, on sait qu'un pavage insécable ne contient que des carreaux de taille 1 et 2. En conséquence, il est assez immédiat que plus un pavage aura de carreaux de taille 2, plus son nombre total de carreaux sera petit. D'autre part, la grille de taille 5 est sécable par quatre droites verticales. Si deux carreaux de taille 2 sont centrés sur la même droite verticale dans un pavage, alors celui-ci est sécable. Il y a donc au plus un carreau de taille 2 centré sur chaque droite verticale donc au plus quatre carreaux de taille 2 en tout. De plus comme chacune des quatre droites verticales doit être bloquée, et comme un carreau de taille 2 ne bloque qu'une droite verticale, il faut au moins quatre carreaux de taille 2 dans un pavage insécable. Donc, s'il existe un pavage insécable, il contient exactement quatre carreaux de taille 2 et neuf carreaux de taille 1. Un exemple d'un tel pavage est donné en figure 5.

***Propriété 4.* Le pavage donné pour n=5 en figure 5 est unique à symétries près**

On prouve cela facilement en raisonnant par exhaustivité des cas. Pour poser le premier carreau de taille 2, il y a trois positions à isométries près :

1 – en haut à gauche,
2 – en haut et une case à droite du coin gauche,
3 – une case à droite et en dessous du coin gauche.

– Un pavage construit à partir de la position 3 doit contenir des carreaux de taille 1 à gauche et au dessus du premier carreau de taille 2. Si ce pavage était insécable, on pourrait en obtenir un autre avec un carreau de taille 3 (en remplaçant tous ces carreaux) ce qui est contradictoire avec ce qui a été montré plus haut car 3=5–2.

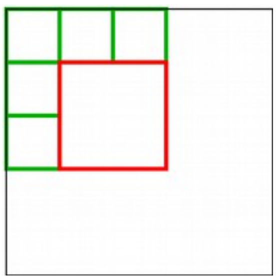


Figure 8. Un pavage construit à partir de la position 3.

– Si on complète la position 1, alors il faut bloquer la deuxième droite horizontale donc mettre un carreau de taille 2 centré sur cette droite, à la droite du premier carreau et il n'y a que deux possibilités.

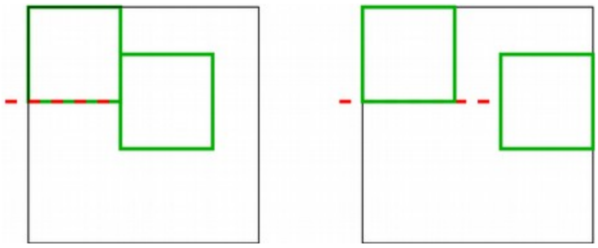


Figure 9. Un pavage construit à partir de la position 1.

– Si le deuxième carreau de taille 2 est centré sur la deuxième droite horizontale et la troisième droite verticale alors il faut bloquer la troisième droite horizontale ce qui impose de mettre un carreau de taille 2 sous le premier carreau et, comme on l'a vu plus haut, le pavage est alors sécable.

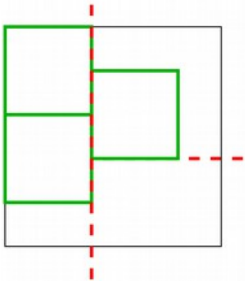


Figure 10. Un pavage construit à partir de la position 1bis.

– Si le deuxième carreau est centré sur la deuxième droite horizontale et la quatrième verticale, alors il faut poser un carreau de taille 2 centré sur la quatrième droite horizontale et la troisième droite verticale pour bloquer cette dernière.
Mais alors la deuxième droite verticale ne peut pas être bloquée : le pavage est sécable. La figure ci-contre illustre ce cas.

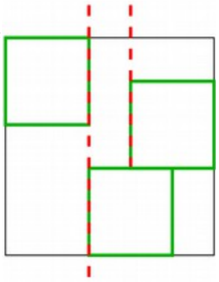


Figure 11. Un pavage construit à partir de la position 1ter.

– Si on complète la position 2, par nécessité il faut centrer un carreau de taille 2 à l'extrémité droite de la deuxième droite horizontale, puis un carreau de taille 2 en bas de la troisième droite verticale, et enfin le dernier carreau de taille 2 à gauche de la troisième droite horizontale. Et on retrouve l'exemple de la figure 5.

La grille de taille 6

Tout d'abord on connaît un pavage insécable avec 11 carreaux, le voici.

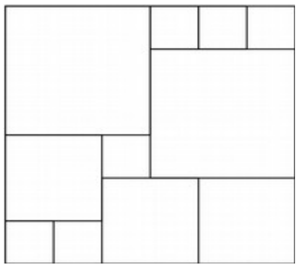


Figure 12. Un pavage insécable avec 11 carreaux de la grille de taille 6.

Prouvons que 11 est le minimum de carreaux pour un carré de taille 6. On sait d'ores et déjà qu'un pavage insécable de taille 6 ne contient que des carreaux de taille 1, 2 et 3.

Si un pavage insécable ne contient que des carreaux de taille 1 et 2, alors le nombre de carreaux sera d'autant plus petit que le nombre de carreaux de taille 2 sera maximal. Le carré de taille 6 contient 36 cases. Il y a donc au plus 9 carreaux de taille 2 mais ce cas correspond à un unique pavage, qui est sécable. S'il y a 8 carreaux de taille 2 ou moins, alors le nombre de carreaux est au moins de 12, donc un pavage insécable avec que des carreaux de taille 1 ou 2 aura au moins 12 carreaux, ce qui n'est pas optimal.

Un pavage insécable contient au plus 4 carreaux de taille 3. Il n'en existe qu'un qui en contient 4 mais il est sécable. De même, à symétrie près, il n'existe que deux façons de disposer 3 carreaux de taille 3 et cela donne des pavages sécables.

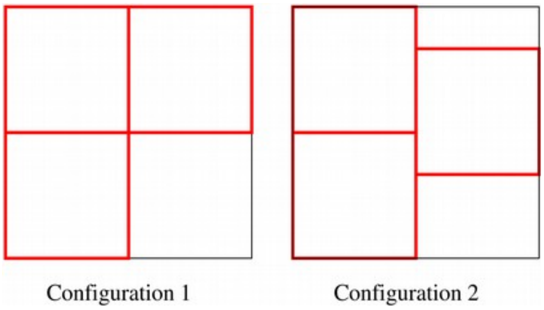


Figure 13. Les deux seuls pavages avec trois carreaux de taille 3.

Donc un pavage insécable minimal ne contient qu'un ou deux carreaux de taille 3. Étudions chacun de ces deux cas.

Pavage contenant un seul carreau de taille 3

Celui-ci peut contenir jusqu'à six carreaux de taille 2, il n'aurait alors que trois carreaux de taille 1 et ne serait composé que de dix carreaux. D'autre part, s'il contient cinq carreaux ou moins de taille 2, alors il est composé d'au moins treize carreaux et n'est donc pas minimal. Donc, si l'on montre qu'un pavage insécable minimal ne peut pas contenir un carreau de taille 3 et six carreaux de taille 2, on aura finalement montré qu'un pavage insécable minimal contient deux carreaux de taille 3.

Considérons d'abord le cas où le carreau de taille 3 est dans un coin (en haut à gauche par exemple). Alors, dans le carré de taille 3 qui est à sa droite, il y a au moins trois carreaux de taille 1, et il en est de même dans le carré en dessous. Donc ce pavage contient au moins six carreaux de taille 1 et il ne peut donc pas contenir six carreaux de taille 2.

Si le carreau de taille 3 est sur un bord sans être dans un coin, alors il y a trois carreaux de taille 1 entre lui et le bord le plus proche qu'il ne touche pas. Il y a aussi au moins un quatrième carreau de taille 1 le long de ce même bord car ce bord ne touche alors au plus qu'un carreau de taille 2. Donc ce pavage contient au moins quatre carreaux de taille 1, il ne peut donc pas contenir six carreaux de taille 2.

Si le carreau de taille 3 ne touche pas le bord, par exemple en étant décalé du coin en haut à gauche d'une case vers la droite et d'une case vers le bas, on sait qu'il va y avoir sept carreaux de taille 1 au dessus et à gauche de ce carreau. On va pouvoir remplacer ce carreau de taille 3 et ces sept carreaux de taille 1 par un carreau de taille 4 en gardant le caractère insécable du pavage, ce qui est contradictoire avec le résultat prouvé plus haut.

Pavage contenant deux carreaux de taille 3

A symétrie près, il n'y a que six positions relatives des deux carreaux de taille 3 :

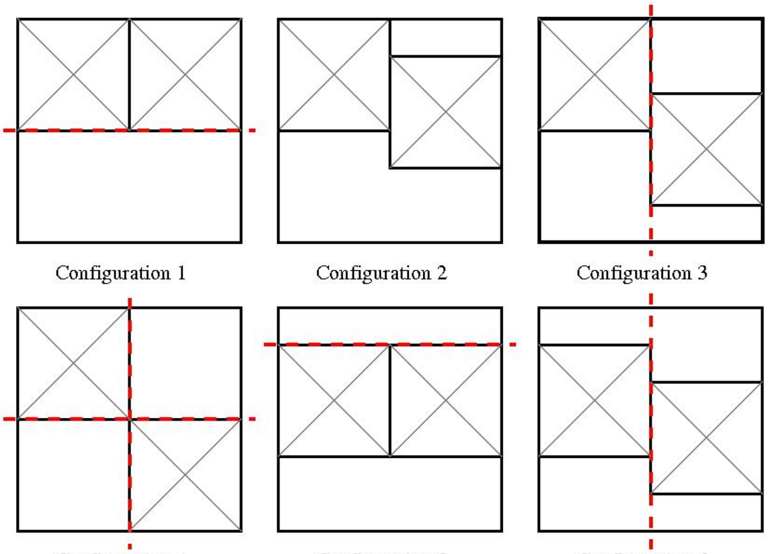


Figure 14. Les six configurations possibles avec deux carreaux de taille 3.

Les configurations 1, 3, 4, 5 et 6 correspondent à des pavages sécables. Si on part de la configuration 2 pour construire un pavage insécable alors nécessairement il faut mettre un carreau de taille 2 centré sur la troisième droite verticale et la cinquième droite horizontale pour bloquer la troisième droite verticale. Puis il faut mettre un carreau de taille 2 centré sur la première droite verticale et la quatrième droite horizontale pour bloquer cette dernière. On ne peut plus poser qu'un seul carreau de taille 2, centré sur la dernière droite horizontale et la dernière droite verticale. Le seul pavage insécable, à symétrie près, avec 2 carreaux de taille 3 est donc celui présenté au début composé de 11 carreaux. 11 est donc la taille minimale d'un pavage insécable d'un carré de taille 6.

Construction d'un majorant M du nombre minimal de carreaux

Nous proposons une construction pour $n= 2m+1$ avec $n > 5$ donc $m \geq 3$.
L'idée de notre construction est de caser un maximum de carreaux de tailles voisines de m. On comptabilise un carreau de taille $m+1$, deux carreaux de taille m, un carreau de taille $m-1$, $m-1$ carreaux de taille 2 et trois carreaux de taille unité, soit au total :

$m+6$ carreaux = $\mathrm{E}(n/2)+6$ carreaux

et ceci quelle que soit la parité de m.

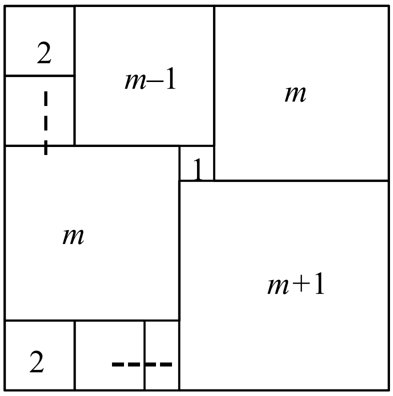


Figure 15. Construction d'un majorant (figure pour le cas où m est impair)

Pour n=5, on a construit un pavage insécable à 13 carreaux (figure 5), et pour n=6, un pavage insécable à 11 carreaux.

Pour n=8 et n=10, il existe un pavage à 10 carreaux. On peut montrer « à la main » que cette construction utilise un minimum de carreaux, comme pour n=5 et n=6.

Pour n pair, $n \geq 12$ (soit $n=2m$, avec $m \geq 6$), on obtient par homothétie un pavage qui a le même nombre d'éléments qu'un carré de taille m.

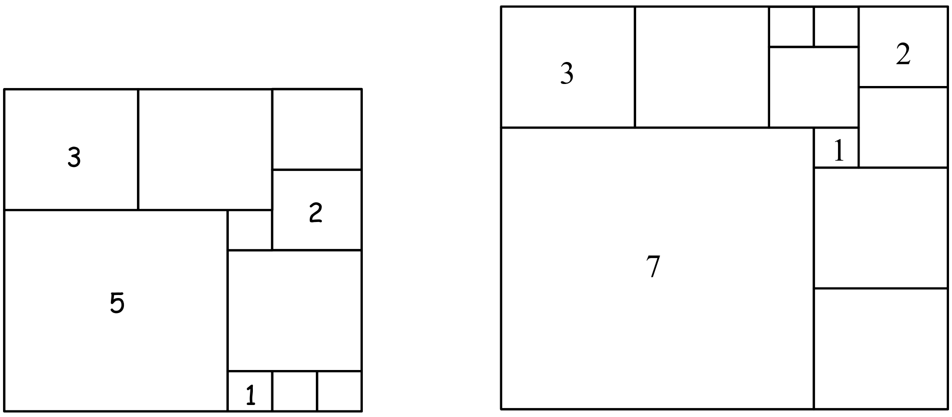


Figure 16. Illustration pour les carrés de taille 8 et 10

En utilisant les propriétés ci-dessus, on peut construire le tableau suivant qui donne les valeurs d'un majorant M (le meilleur que nous avons trouvé) pour les grilles de taille n.

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
M	13	11	9	10	10	11	11	11	12	9	13	10	14	10	15	11	9	11	17	...

4.3 Question 3

Rappelons la question : « Étant donnée une grille $n \times n$, **quel est le plus grand nombre de carreaux qui permet de faire un pavage insécable de cette grille ?** »

Remarque élémentaire. Une solution insécable avec un nombre maximal de carreaux ne peut pas contenir de carreau de taille $a \geq 5$ car en remplaçant ce carreau par un pavage insécable de taille a on augmente le nombre de carreaux. Concernant le nombre maximal de carreaux dans un pavage insécable, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème
Un pavage insécable d'un carré de taille n contient au plus n^2-3n+3 carreaux. Cette borne est atteinte pour tout $n \geq 5$ par au moins un pavage.

Preuve
Notre idée est de chercher des pavages insécables avec seulement des carreaux de tailles 1 ou 2 et un nombre minimum de carreaux de taille 2. Pour n=5, nous avons vu (propriété 4) qu'il n'existait qu'un seul pavage insécable et qu'il utilisait 13 carreaux de tailles 1 ou 2, avec $(n-1)$ carreaux de taille 2 et $n^2-4\,(n-1)$ carreaux de taille 1, ce qui correspond bien à n^2-3n+3 carreaux en tout.
Pour tout $n \geq 6$, on place des carreaux de taille 2 centrés sur les points de coordonnées suivants (comme indiqués sur les figures qui suivent).

Si n est pair, soit $n=2m$, les carreaux sont centrés en :
(1,1), (3,2), (5,3), …, $(2m-1, m)$, puis $(2, m+1)$, $(4, m+2)$, … , $(2m-2, 2m-1=n-1)$
Si n est impair, soit $n=2m+1$, les carreaux sont centrés en :
(1,1) (3,2), (5,3), … , $(2m-2, m)$, puis $(2, m+1)$ $(4, m+2)$……. .$(2m, 2m=n-1)$

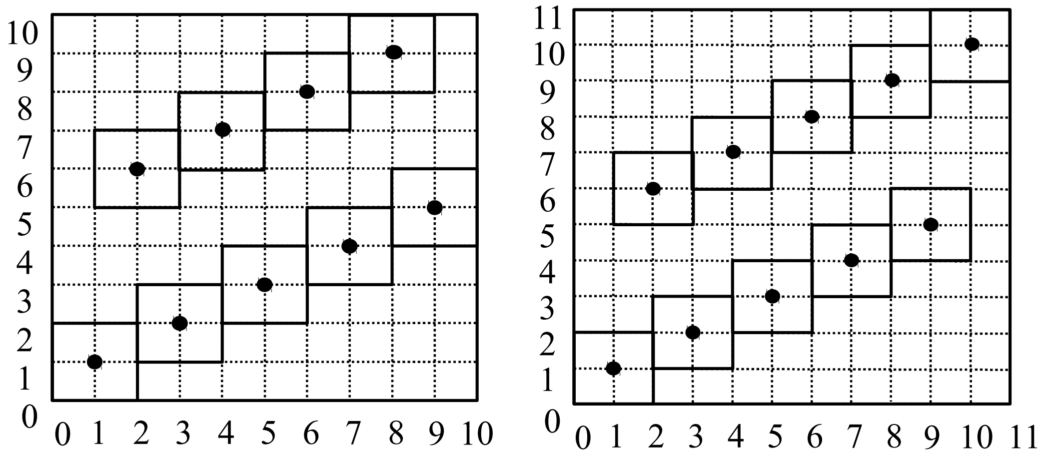


Figure 17. Un algorithme de pavage insécable avec des carreaux de tailles 1 ou 2 pour des grilles de tailles 10 et 11

Nous bloquons ainsi toutes les sécantes horizontales et toutes les sécantes verticales du carré initial avec $n-1$ carrés de taille 2. Nous pouvons maintenant, sans mettre en danger l'insécabilité, compléter le pavage par $n^2-4\,(n-1) = (n-2)^2$ carreaux de taille 1 comme le montre un rapide calcul d'aires. Le pavage obtenu a donc $(n–1)$ $+(n–2)^2$ = $n^2–3n+3$ carreaux. Ceci montre que le nombre maximum de carreaux est au moins $n^2–3n+3$. On va montrer maintenant qu'il y a égalité.

Considérons un pavage insécable d'un carré de taille n avec $n \geq 5$. Chaque carreau du pavage, de taille $k \geq 2$, a une aire qui correspond à celle de $k–1$ carreaux de taille 2 et $(k–2)^2$ carreaux de taille 1. Or $k–1$ est le nombre de droites horizontales que le carreau bloque. L'ensemble des carreaux du pavage de taille supérieure ou égale à 2 bloque l'ensemble des $n–1$ droites horizontales du carré. La somme des $k–1$ carreaux de taille au moins 2, est donc supérieure ou égale à $n–1$. Si on remplace chacun de ces carreaux par des carreaux de taille 1 et 2 dans les quantités indiquées plus haut, on aura encore un pavage insécable, avec un jeu de carreaux de taille 1 et 2 dont la somme des aires des carreaux est encore n^2, et avec au moins $n–1$ carreaux de taille 2. Si on note K le nombre de carreaux de taille 2 ainsi obtenu et qu'on remplace $K–(n–1)$ carreaux de taille 2 par $4(K–(n–1))$ carreaux de taille 1, on obtient un nouveau jeu de carreaux de tailles 1 et 2, dont la somme des aires des carreaux est encore n^2, avec exactement $n–1$ carreaux de taille 2. Ce dernier jeu a plus de pièces que le jeu de carreaux correspondant au pavage de départ. Il en a en fait $(n–1)$ carreaux de taille 2 et $(n–2)^2$ carreaux de taille 1 soit $n^2−3n+3$ pièces. On a vu plus haut qu'il permet de faire un pavage insécable du carré de taille n.
On a donc démontré qu'à partir d'un pavage insécable on pouvait augmenter le nombres de pièces pour arriver à un jeu de pièces permettant un autre pavage insécable de $n^2−3n+3$ pièces. Ce dernier nombre est donc le nombre maximum de pièce d'un pavage insécable d'un carré de taille n.

Remarque. On peut voir les centres des carreaux de taille 2 comme des positions de Tours sur un échiquier. Il y a une seule Tour par droite horizontale et une seule par droite verticale afin qu'elles ne se menacent pas deux à deux. Cette situation est connue comme étant le problème de Hertzsprung.

5. Pour aller plus loin : pavages insécables de rectangles

Nous avons étudié le pavage insécable de carrés par des carrés.
Qu’en est-il pour le pavage insécable d’un carré par des rectangles, ou le pavage insécable d’un rectangle non carré ? Voici quelques questions pour les plus motivés.

1. Combien faut-il de rectangles au minimum pour paver de façon insécable un rectangle ?

2. Pour quelles tailles $m\times n$ de rectangles existe-t-il un pavage insécable par des carreaux carrés ?

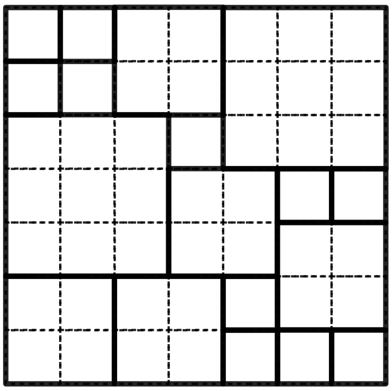
3. Dans le pavage par des carrés d’un rectangle de taille $m\times n$, quel est le nombre maximum de carrés ?
Indication : en supposant $m < n$, on commence par remplir le carré de taille $m\times m$ à gauche comme dans le pavage insécable d’un carré. Il ne reste plus que $n – m$ verticales à bloquer.

Fiche-élève n°1

Le carré insécable

On veut paver une grille carrée avec des carreaux carrés, de telle manière qu'il n'existe aucune droite traversant la grille dans toute sa longueur, horizontalement ou verticalement, ne coupant aucun des carreaux.

Exemple. Voici une grille 7×7 pavée par 18 carreaux carrés (deux carrés 3×3, cinq carrés 2×2, et onze carrés 1×1). Vous pouvez vérifier que toutes les droites horizontales ou verticales rencontrent un carreau du pavage.



Question

Cherchez des pavages de grilles carrées de différentes dimensions respectant cette règle.
Par exemple, avez-vous trouvé un pavage pour la grille carrée 6×6, et pour la grille carrée 5×5 ?

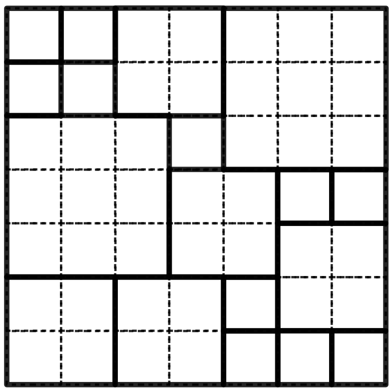
matériel : un plateau avec des dessins de grilles carrées et des pavés de différentes dimensions.

Fiche-élève n°2

Le carré insécable

On veut paver une grille carrée avec des carreaux carrés, de telle manière qu'il n'existe aucune droite traversant la grille dans toute sa longueur, horizontalement ou verticalement, ne coupant aucun des carreaux.

Exemple. Voici une grille 7×7 pavée par 18 carreaux carrés (deux carrés 3×3, cinq carrés 2×2, et onze carrés 1×1). Vous pouvez vérifier que toutes les droites horizontales ou verticales rencontrent un carreau du pavage.



Cherchez des pavages de grilles carrées de différentes dimensions respectant cette règle. Puis essayez de répondre aux trois questions ci-après.

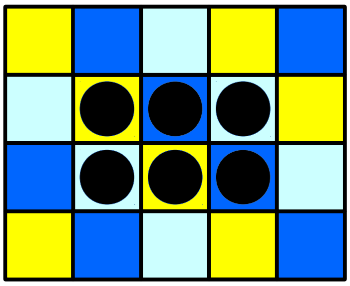
Question 1. Peut-on construire un pavage insécable d'une grille $n \times n$ pour tout n ?

Question 2. Étant donnée une grille $n \times n$, quel est le plus petit nombre de carreaux qui permettent de faire un pavage insécable (non-trivial) de cette grille ?

Question 3. Étant donnée une grille $n \times n$, quel est le plus grand nombre de carreaux qui permettent de faire un pavage insécable (non-trivial) de cette grille ?

matériel : un plateau avec des dessins de grilles carrées et des pavés de différentes dimensions.

Le Solitaire rectangulaire

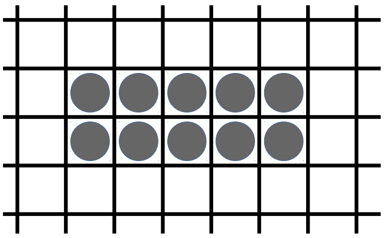


Introduction

Cette SiRC est une variation du célèbre « jeu du solitaire », duquel les élèves sont souvent familiers. Sous un aspect ludique (travail en groupes, manipulation de pions sur un damier), elle permet de faire (re)découvrir plusieurs concepts mathématiques et éléments de raisonnement fondamentaux, à commencer par le raisonnement inductif et le principe de récurrence.

1. Le problème

On propose ici de jouer au « solitaire » à partir d'une configuration de pions disposés en rectangle $2\times n$, pour un certain entier n (voir la figure ci-dessous pour $n=5$). La règle du solitaire est qu'un pion peut sauter au dessus d'un voisin, et le « manger » au passage, à condition que la case d'arrivée soit vide ; les sauts ne sont autorisés qu'horizontalement et verticalement, pas en diagonale.



On dit que le jeu admet une solution lorsque qu'il existe une suite de tels mouvements permettant de se ramener à une configuration avec un seul pion – un pion « solitaire ».

Question. Pour quelles valeurs de n le jeu a-t-il une solution ?

2. Gestion de l'activité en classe

Pour chaque groupe d'élèves (maximum 4 élèves), prévoir une grille du type damier, ou n'importe quelle grille rectangulaire contenant au moins 4×10 cases, et une vingtaine de pions (les pions du jeu de dames, par exemple). L'utilisation du matériel induit un travail en groupe, ce qui est fortement recommandé pour cette SiRC. Il est aussi très utile de disposer d'un rétroprojecteur avec une grille transparente, afin d'exhiber en version « ombre chinoise » des suites de mouvements de pions pour toute la classe, ou valider la résolution proposée par un groupe.

On pourrait aussi envisager l'utilisation d'une version informatique du jeu, par exemple celle disponible sur le site Maths-à-Modeler[1]. Ceci faciliterait les retours en arrière dans une suite de mouvements, et donc également la validation des solutions, mais risque néanmoins de diminuer les interactions entre les élèves.

Cette SiRC a été testée sur des classes de collège, lors de séances d'une heure. Une séance permet de couvrir le problème et sa résolution, en donnant occasionnellement de petits coups de pouce aux élèves. On peut aussi imaginer laisser un temps d'expérimentation et de réflexion aux élèves entre deux séances (dans cette optique, on pourrait voir l'utilité de la version en ligne du jeu).

Pour rappeler les mouvements valides dans le jeu de solitaire, on pourra commencer par exhiber une résolution possible pour le cas n=4 (par exemple au rétroprojecteur, ou de façon un peu plus fastidieuse au tableau). Rapidement, bon nombre d'élèves se rappellent avoir déjà joué à un jeu similaire et se découvrent ainsi des familiarités avec le problème. On peut alors suggérer que chaque groupe fasse ensuite sa propre résolution ; par validation de la solution de chaque groupe, on vérifiera que la consigne est bien comprise par tous les élèves de chaque groupe.

On pose alors la question pour la configuration 2×5, 2×6,... et en général, la configuration $2\times n$ pour un nombre n quelconque. Une fois la consigne comprise, on laissera les groupes expérimenter pour différentes valeurs de n, et au fur et à mesure, on recensera au tableau les valeurs pour lesquelles un groupe a trouvé une solution. Pour certaines valeurs, on pourra demander à un(e) élève du groupe de venir montrer sa solution au rétroprojecteur, afin de valider (ou infirmer) les valeurs qui apparaissent dans le tableau. Le simple fait de devoir reproduire la solution au rétroprojecteur suggère souvent aux élèves de trouver une méthode efficace de résolution, et de structurer/comprendre leurs tâtonnements (au bout d'un moment, on hésite à affirmer qu'une grille est résoluble sans pouvoir le justifier).

La liste des valeurs pour lesquelles on a trouvé une solution (et celles pour lesquelles on n'en a pas trouvé) suggère souvent une périodicité de période 3. Certains élèves formuleront peut-être une conjecture (il y a une solution si n est pas divisible par 3).

Si les méthodes de résolution exhibées au rétroprojecteur pour différentes valeurs de n se ressemblent, on pourra le signaler aux élèves, ou le mentionner comme une piste de réflexion (y a-t-il un lien entre vos résolutions pour la grille 2×4 et la grille 2×5?).
Ceci permet parfois de dégager un algorithme de résolution, qui permet de passer d'une grille $2\times n$ avec $n\geq4$ à une grille $2\times(n\text{-}3)$. Si cet algorithme ne se dégage pas, on pourra aider les élèves, et leur montrer une résolution pour 2×5 qui n'utilise que 4 des rangées, ce qui suggère un algorithme de résolution.

1 http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/solitaire/solitaire1.htm.

Les élèves sentent souvent que la grille $3 \times n$ n'est pas résoluble. On pourra lancer une discussion autour d'une éventuelle validation/preuve de ce sentiment ; le fait qu'aucun groupe n'ait trouvé de solution ne dit pas vraiment qu'il n'y en a pas ! Certains groupes feront sans doute une forme d'exhaustion des cas pour le justifier, sinon on pourra les guider vers un tel argument (on trouvera également à la fin de ce chapitre une figure décrivant une exhaustion des cas, à symétries près). La grille 2×6 coince également, mais l'exhaustion des cas correspondante est maintenant assez clairement prohibitive !

Contrairement à l'idée que se font beaucoup d'élèves à ce stade, l'algorithme de résolution n'aide pas pour montrer que les grilles $2 \times (3k)$ ne sont pas résolubles. Il y a ici souvent confusion entre une implication et sa réciproque.
On pourra expliciter l'implication suivante (qui est vraie par utilisation de l'algorithme) :

pour toute valeur de n, résoluble pour $n \Rightarrow$ résoluble pour $n+3$

et sa contraposée (qui lui est équivalente) :

pour toute valeur de n, insoluble pour $n+3 \Rightarrow$ insoluble pour n.

En revanche, l'algorithme ne dit rien sur la véracité de la réciproque :

insoluble pour $n \Rightarrow$ insoluble pour $n+3$.

On rompra alors le suspense en donnant la preuve de l'insolubilité pour n multiple de 3, à l'aide d'un invariant bien choisi (voir la résolution ci-dessous). Ici, un gros coup de pouce est souvent nécessaire. Cette étape de la situation a néanmoins l'intérêt d'aborder certaines notions fondamentales de la logique (implication, réciproque, nécessité d'une preuve).

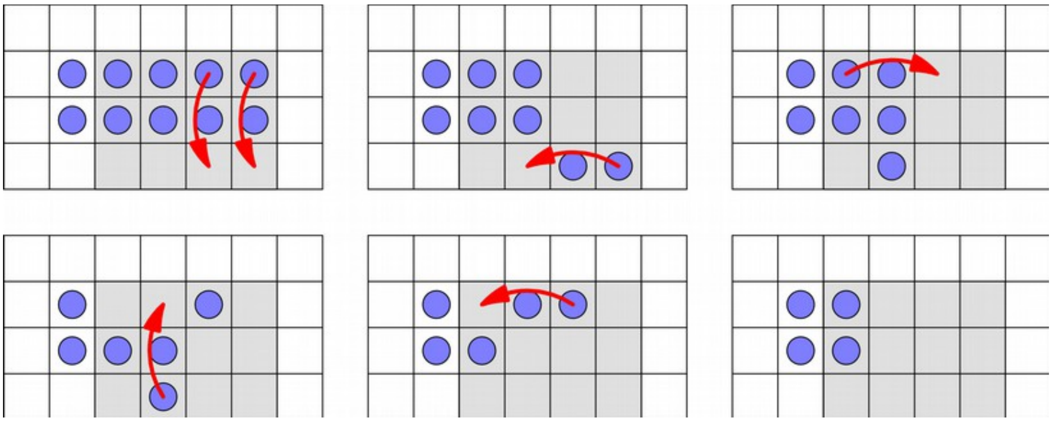
L'organisation de la situation proposée ci-dessus devra bien entendu être ajustée en fonction du niveau de la classe.

Dans les petites classes du collège, on pourra écrire au tableau la liste des 20 premiers nombres naturels, et compléter petit à petit comme ci-dessous : 1 OK 2 OK 3 ? 4 OK 5 OK 6 ? 7 …. 8	Dans un second temps, lorsque le rôle particulier des multiples de 3 est signalé, on complétera ce tableau en termes de division Euclidienne : $1=0 \times 3+1$ OK $2=0 \times 3+2$ OK $3=1 \times 3$? $4=1 \times 3+1$ OK $5=1 \times 3+2$ OK $6=2 \times 3$? $7=2 \times 3+1$ …. $8=2 \times 3+2$

On demandera alors pour quelles valeurs la règle ci-dessus permet de déduire la résolubilité. On pourra ensuite les faire travailler sur la notion de reste d'une division, et leur demander de décrire les nombres n pour lesquels on sait que le jeu a une solution; la grille 2×127 est-elle résoluble ?

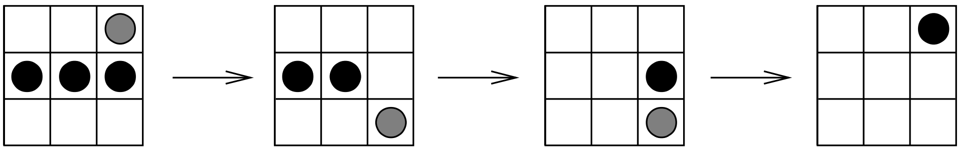
3. Résolution du problème

La résolution du problème est immédiate pour n=1, et à peine plus difficile pour n=2 (la solution étant unique à symétrie près).
La figure ci-dessous donne une méthode pour ramener une configuration de 2×5 pions à une configuration 2×2, et démontre ainsi que le problème est résoluble pour n=5. On notera que cette suite de mouvements ne fait intervenir que les cases de la région grisée de la grille, située à une l'extrémité droite de la configuration de départ.



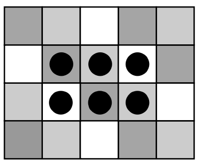
Plus généralement, la même méthode appliquée à l'extrémité droite d'une configuration de $2\times n$ pions (avec $n\geq 4$) nous permet de passer à une configuration $2\times(n-3)$. Ainsi, pour résoudre le puzzle $2\times n$, il suffit de résoudre le puzzle $2\times(n-3)$.
Comme le problème est résoluble pour n=1 et n=2, il est aussi résoluble pour tout n dont le reste de la division par 3 est soit 1, soit 2.

Notons qu'une tactique similaire, couramment utilisée dans le jeu de solitaire « classique », consiste à regrouper les pions par trois (alignés), et de les retirer en utilisant un pion voisin, qui retourne en position initiale à la fin du processus :



Lorsque n est un multiple de 3, le problème n'est en revanche pas résoluble.

Considérons la configuration de 2×3 pions,
et une tricoloration de la grille comme illustrée ci-contre :



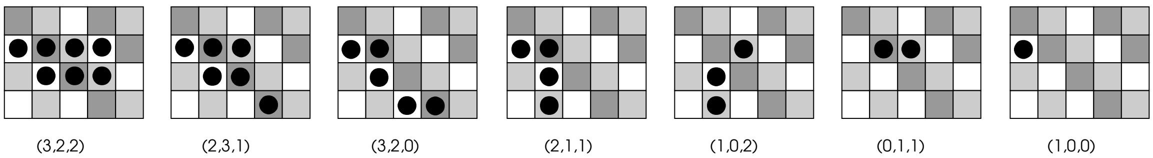
On constate qu'il y a deux cases de chaque couleur occupées par un pion. En particulier, pour chaque couleur, le nombre de cases de cette couleur occupées par un pion est *pair*.

De même, pour toute configuration de $2\times(3n)$ pions (avec $n\geq 1$) et cette même tricoloration de la grille, pour chacune des trois couleurs, il y a un nombre *pair* de cases occupées (en l'occurrence, $2n$).

Lorsqu'un pion saute au dessus d'un voisin (ce que l'on appellera par la suite un mouvement élémentaire), on observe que, pour deux des trois couleurs, le nombre de cases occupées diminue de 1, tandis qu'il augmente de 1 pour la troisième couleur :

Ainsi, en partant de la configuration $2\times(3n)$, où chaque couleur est occupée un nombre *pair* de fois, tout mouvement élémentaire nous produit une configuration où chaque couleur est occupée un nombre *impair* de fois. Un nouveau mouvement élémentaire donnera une configuration où chaque couleur est utilisée un nombre *pair* de fois, et ainsi de suite : à tout moment, les nombres de cases occupées pour chacune des trois couleurs ont même parité !

Voici un exemple avec le « mouvement de récurrence » ; les trois chiffres indiqués sous chaque grille désignent le nombre de cases occupées de couleur blanche, jeune et bleu, respectivement :



Autrement dit, seules les configurations ayant cette propriété de parité peuvent éventuellement être atteintes à partir d'une configuration $2\times(3n)$. On constate donc qu'il est impossible, en partant de la configuration $2\times(3n)$, de se ramener à un seul pion.

4. Éléments didactiques

La situation de recherche du solitaire permet de travailler plusieurs éléments explicitement au programme du collège et du lycée :

Démarche d'expérimentation

La nature même de cette situation favorise une démarche d'expérimentation, dans la mesure où l'on part d'un étude de « petits cas » (grilles $2\times n$ pour des petites valeurs de n) pour découvrir/comprendre le cas général, et formuler des conjectures.

Exhaustion des cas

Il est intéressant de faire analyser par les élèves leurs arguments pour dire que la grille 2×3 n'est pas résoluble, en particulier de vérifier qu'ils ont bien traité tous les cas de figure possibles ! La liste exhaustive des cas (à symétrie près) est illustrée dans la figure donnée en annexe, et elle ne correspond sans doute pas à la façon dont les élèves structurent leur exhaustion des cas (on exclut bien souvent des cas de figure dans lesquels on n'aurait plus aucun espoir de vider la grille). Un autre intérêt du traitement détaillé de l'exhaustion des cas pour la grille 2×3 est de faire émerger la difficulté (voire l'impossibilité) de traiter les grilles $2\times(3k)$ avec $k > 1$ de cette façon (d'où la nécessité d'autres outils/idées).

Symétries d'une figure géométrique
Le tableau qui apparaît en annexe donne, à chaque étape, la liste *à symétrie près* de tous les mouvements possibles. Une activité intéressante est l'identification du mouvement élémentaire et de la transformation géométrique qui correspond à chaque flèche du tableau.

Raisonnement par récurrence
Il se présente ici sous une forme assez différente des exemples développés dans les manuels scolaires, qui sont souvent de nature très calculatoire. Il est donc susceptible de donner du recul aux élèves sur le sens de la récurrence, loin d'une application mécanique de formules algébriques. Par ailleurs, on pourra aussi proposer aux élèves d'écrire une preuve formalisée, en identifiant clairement l'initialisation et l'hérédité.

Division euclidienne/critères de divisibilité
Cet aspect est à développer (surtout dans les classes ou ces notions ne sont pas complètement acquises) après que la méthode pour supprimer trois rangées de pions a été découverte et comprise. On pourra entamer la discussion sous forme d'un défi posé à la classe, par exemple en demandant si la grille 2×127 est résoluble ou non.

Logique élémentaire (contraposée/réciproque)
Cette situation donne une occasion de discuter la distinction/confusion entre la contraposée et la réciproque d'une implication (voir la section consacrée à la gestion de l'activité en classe).

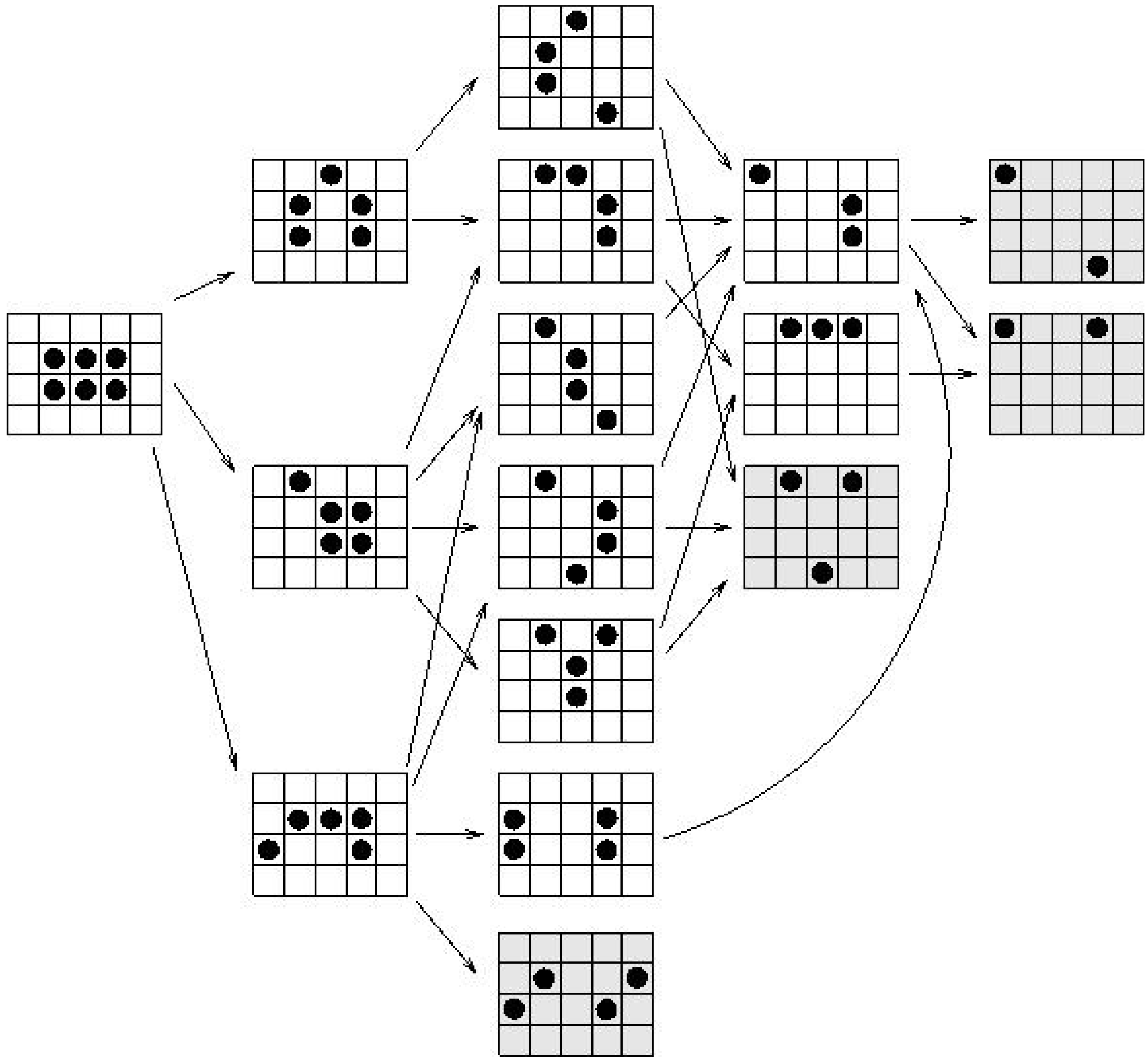
Il est naturel d'exploiter le travail fait durant la résolution pour faire réfléchir à la notion de preuve en mathématique, et également aux différents types de preuve. La démarche suivie pour traiter les cas résolubles (direct pour les petits cas, puis raisonnement par récurrence) est très différente de celle utilisée pour les cas non résolubles. Dans ce dernier cas, un raisonnement direct est presque impossible, il faudrait montrer que tous les essais de résolutions (et il y en a beaucoup!) sont vains, et la récurrence utilisée pour les cas résolubles ne dit rien dans les cas non résolubles (la non-existence d'une solution pour une valeur n n'implique pas la non-existence pour la valeur n+3).

5. Pour aller plus loin

Cette situation conduit naturellement à des questions légèrement différentes, certaines plus générales. On a étudié ici en détail la résolubilité de certains types de grilles rectangulaires, on pourrait évidemment se demander plus généralement quand une configuration de pions (non nécessairement rectangulaire) est résoluble ; l'invariant qui permet de montrer que les grilles $2\times(3n)$ ne sont pas résolubles donne une condition nécessaire de résolubilité pour une configuration quelconque, il est naturel de se demander si cette condition est également suffisante.

Annexe

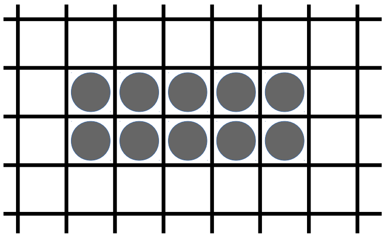
Illustration de l'exhaustion des cas, à symétries près, du problème pour *n*=3



fiche-élève

Le Solitaire rectangulaire

On propose de jouer au «solitaire » à partir d'une configuration de pions disposés en rectangle $2 \times n$, pour un certain nombre naturel n (voir la figure ci-dessous pour $n=5$).



La règle du solitaire est qu'un pion peut sauter au dessus d'un voisin et le manger au passage, à condition que la case d'arrivée soit vide. Les sauts ne sont autorisés que horizontalement et verticalement, pas en diagonale.

On se demande alors pour quelles valeurs de n le jeu a une solution, c'est-à-dire qu'il existe une suite de mouvements pour se ramener à une configuration avec un seul pion : un pion « solitaire ».

Objectif : Trouver, rédiger et justifier une stratégie gagnante.

C'est à vous de jouer !

Remplissage de châteaux d'eau

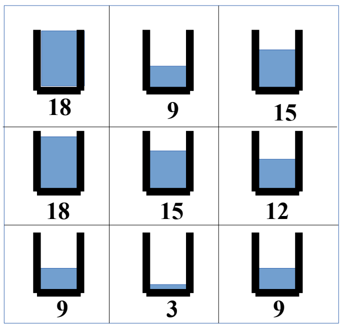
Château d'eau en Finlande, pris sur Wikipediahttps://fr.wikipedia.org/wiki/Château_d'eau#/media/File:Roihuvuori_water_tower_-_Helsinki_Finland.jpg

Ce problème est tiré de l'article « Un problème de remplissage de verres » de Xavier Caruso, publié le 12 août 2009 sur Images des Mathématiques, où l'accent est mis sur les aspects logiques de la démonstration de la solution. Dans ce chapitre, nous décrivons une situation que nous avons adaptée pour des classes et nous donnons une résolution mathématique un peu plus algorithmique, accessible aux enseignants.

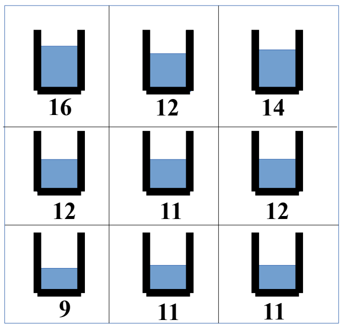
1. Le problème

On considère une grille rectangulaire sur laquelle on a disposé dans chaque case un réservoir contenant une certaine quantité d'eau. On cherche à aboutir à une situation où tous les réservoirs contiennent la même quantité d'eau, en procédant par étapes selon la règle suivante : à chaque étape, on choisit un des réservoirs et on déverse tout ou partie de son contenu dans le réservoir situé immédiatement à sa droite (s'il y en a un) ou dans celui situé immédiatement en dessous (s'il y en a un), éventuellement dans les deux. On peut verser les quantités que l'on souhaite.
Est-il possible de résoudre ce problème quelles que soient les quantités initiales ? Lorsque c'est possible, donner un procédé qui permet d'aboutir à l'équilibre recherché.

On va considérer dans un premier temps les deux cas particuliers suivants : neuf châteaux disposés dans un carré, avec les quantités indiquées dans les figures ci-dessous.[1]



Exemple 1



Exemple 2

1 En centaines de mètres cubes … mais l'unité n'a pas d'importance pour le problème.

2. Analyse didactique

Comme dans beaucoup de situations de recherche, la difficulté est évolutive. Pour permettre à tous de rentrer dans l'activité, une première situation simple permet de s'approprier le problème. Deux axes permettent de jouer sur le niveau de difficulté :
– Pour explorer le problème, il est pratique de calculer avec des quantités discrètes pour pouvoir expérimenter, par exemple en reformulant avec des jetons à déplacer d'une case à une autre, ce qui implique de se ramener à un cas où la moyenne est entière. Pour une première approche, il est possible de commencer avec autant de jetons que de cases.
– Demander un procédé de résolution est difficile, en particulier pour des élèves n'ayant pas encore eu l'occasion de travailler la pensée algorithmique. Une première formulation plus accessible consiste à demander des conditions, nécessaires ou suffisantes, pour que le problème ait une solution.

On va considérer le problème particulier de neuf châteaux disposés dans un carré. Repérons les positions des châteaux par des couples (i, j), en partant de celui en haut à gauche, ce qui correspond au sens des transvasements. Le calcul de la moyenne des quantités initiales d'eau de tous les châteaux permet de connaître la quantité d'eau finale à atteindre dans chaque château.
Des conditions nécessaires simples apparaissent assez vite en expérimentant :

– si la quantité initiale d'eau dans le château (1,1) est inférieure à cette moyenne, le problème n'a pas de solution (car ce château ne reçoit d'eau d'aucun autre) ;
– si la quantité initiale d'eau dans le château (3,3) est supérieure à cette moyenne, le problème n'a pas de solution (car ce château ne donne de l'eau à aucun autre).
Ces conditions peuvent être élargies à la première colonne et à la première ligne :
– si la somme des quantités d'eau des châteaux de la première colonne (ou de la première ligne) est inférieure à trois fois la quantité finale d'équilibre, le problème n'a pas de solution (car la première colonne ne peut être remplie qu'avec l'eau de ses propres châteaux, idem pour la première ligne)
– si la somme des quantités d'eau des châteaux de la dernière colonne (ou de la dernière ligne) est supérieure à trois fois la quantité finale d'équilibre, le problème n'a pas de solution.

L'intérêt de ce problème est que **ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes**, nous en verrons un exemple plus loin. Il est nécessaire de faire une analyse plus fine des quantités d'eau dans les neuf châteaux d'eau pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes de remplissage équilibré.

3. Compte-rendus d'expérimentations

Dans une classe de sixième

La situation a été testée sur une séance d'une heure, avec une classe hétérogène qui a déjà travaillé sur des situations de recherche. En sixième, le problème général est trop difficile, nous avons donc proposé des cas particuliers :

– Le problème a été explicitement formulé pour rester dans les nombres entiers (les nombres donnés et la moyenne sont des entiers pas trop grands). Les élèves ont travaillé sur des feuilles présentant plusieurs tableaux 3×3 vides pour faciliter l'étude et inciter à écrire.
– Pour la situation initiale, on a choisi de mettre 18 en case (1,1) et rien dans les autres cases (la moyenne est donc égale à 2). Certains élèves ont résolu ce cas en deux étapes : d'abord 6,6,6 dans la première ligne, puis des 2 partout.
Les élèves ont rapidement trouvé qu'il faut avoir 2 dans chaque case à la fin. Ils ont expérimenté en essayant divers transvasements au hasard.
– Le problème étant formulé dans les entiers, la condition que le total doit être un multiple de 9 a été vue comme une condition « nécessaire », ce qui est bien adapté en classe de sixième, les élèves n'étant pas familiers du passage des nombres entiers aux nombres décimaux.
– Des cas particuliers d'impossibilité ont été identifiés, par exemple un déficit dans la case en haut à gauche ou un excès en bas à droite. En revanche, la condition nécessaire générale semble difficilement accessible. Le cas suivant a posé des difficultés :

2	4	6
6		

Il peut y avoir plusieurs causes à cela :
- – Une stratégie au hasard peut faire passer d'une situation résoluble à une situation impossible (par exemple transférer 2 de la case (1,2) à la case (1,3))
- – Pour quelques cases, il y a plusieurs choix possibles.
- – Garder l'historique des étapes de remplissage nécessite de choisir une représentation adéquate.

Avec deux groupes de 3ème année de licence de mathématiques

Dans le groupe 1 (quatre étudiants), l'exemple 1 est résolu très vite par tâtonnements. Pour le deuxième exemple, le compte-rendu donne quatre méthodes correspondant chronologiquement à différentes étapes de leur recherche.

La première méthode, consistant à partir du coin en haut à gauche et à verser dans la case adjacente où il manque le plus, est tout de suite invalidée par un contre-exemple.

Pour la deuxième méthode, les étudiants se sont ramenés à un tableau donnant les excédents et déficits (en soustrayant la moyenne 12), et ils donnent comme méthode : « on cherche tous les moyens de remplir là où il en manque puis on raisonne récursivement par "obligation" ». Ceci ne résout pas du tout le problème.

La troisième méthode décrit un ordre dans lequel traiter les cases (en évoquant l'anti-diagonale et des études par carrés) mais elle reste floue ; on voit apparaître l'idée qu'il faut traiter plusieurs cases en même temps, les traiter une par une ne convient pas.

La dernière méthode est plus précise, elle décrit des éléments d'un algorithme qui traite les cases dans un ordre précis donné par les numéros suivants :

9	*8*	*5*
7	*6*	*3*
4	*2*	*1*

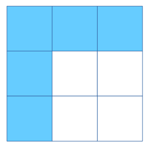
Pour chaque case, on va chercher dans les cases suivantes de quoi équilibrer la quantité d'eau. Bien que plus précise, cette méthode ne marche pas dans tous les cas. La progression des méthodes montre une meilleure compréhension du problème, on peut supposer qu'avec un peu plus de temps, une méthode générale aurait été trouvée.

Dans le groupe 2 (trois étudiants), le compte-rendu évoque successivement les méthodes suivantes :

– traiter case par case en commençant par la case (1,1), méthode très vite abandonnée ;

– traiter colonne par colonne, ce qui permet de résoudre l'exemple 1, mais les étudiants constatent que cela ne marche pas pour l'exemple 2 ;

– vérifier les conditions nécessaires sur différents ensembles de plusieurs cases, notamment des ensembles qui ne sont pas tous rectangulaires :



En fin de compte le groupe a proposé un algorithme (reproduit en annexe) qui est correct et très proche de la solution proposée dans notre étude mathématique (cf. §4) mais sa validité n'est pas justifiée.

Conclusions

Cette situation peut être reformulée avec des jetons à déplacer d'une case à l'autre sur une grille rectangulaire, en veillant bien à ce que la moyenne soit un nombre entier. On peut même imaginer une première situation où le nombre de jetons est égal au nombre de cases, les jetons étant au départ répartis de façon aléatoire et la résolution consistant à se ramener à un jeton par case. Cette contextualisation peut faciliter le problème en sixième mais elle reste intéressante dans des classes de tous niveaux.

Nos expérimentations montrent que certaines des conditions nécessaires pour pouvoir résoudre le problème sont accessibles aux élèves dès le collège. En revanche, il est difficile de donner un algorithme précis qui fonctionne dans tous les cas ayant une solution et qui identifie les cas d'impossibilité ; il est encore plus difficile de justifier qu'un tel algorithme est correct.

4. Résolution mathématique

4.1. Diagrammes de Young : définition et théorème

On notera v_{ij} la quantité d'eau contenue dans le réservoir qui est placé dans la case de coordonnées (i,j). Une configuration peut donc être représentée par un tableau :

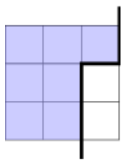
$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

Le volume total d'eau contenu dans l'ensemble des réservoirs ne subit ni apport ni suppression parce qu'on ne fait que transvaser d'un réservoir à un autre. Dans la configuration finale, il faut donc que chaque réservoir contienne une quantité d'eau égale à la moyenne des quantités initiales :

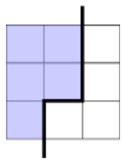
$$m=\frac{\sum_{i,j} v_{ij}}{n^2}$$

On peut reformuler la question en termes d'écart par rapport à la moyenne : pour chaque case (i,j) on pose $d_{ij}=v_{ij}-m$ la différence entre la valeur contenue dans le réservoir et la valeur que l'on cherche à atteindre. L'objectif est alors de faire passer chaque d_{ij} à 0. Notons que par construction la somme des d_{ij} est nulle.

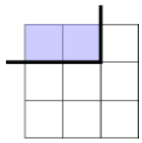
Pour résoudre le problème, on va considérer des sous-ensembles de réservoirs qui ont la propriété de ne pas pouvoir recevoir d'eau de réservoirs situés à l'extérieur de ces ensembles. Les ensembles suivants correspondent à cette propriété :



{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)}



{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1)}



{(1,1), (1,2)}

Un ensemble de ce type est ce que l'on appelle un **diagramme de Young.**

Définition. *On appelle* diagramme de Young *une collection finie de cases organisées en lignes, alignées à gauche et avec la propriété que chaque ligne à une longueur inférieure ou égale à celles des lignes précédentes.*

Une condition nécessaire pour qu'il soit possible d'atteindre la configuration équilibrée à partir d'une configuration initiale donnée est que pour tout diagramme de Young D de la grille considérée on ait

$$\sum_{(i,j)\in D} v_{ij} \geq Card(D)\times m \quad \text{, c'est-à-dire} \quad \sum_{(i,j)\in D} (v_{ij}-m)\geq 0 \quad \text{ou encore} \quad \sum_{(i,j)\in D} d_{ij}\geq 0 \quad .$$

Le fait que cette condition soit nécessaire est assez intuitif. En effet, selon la règle du jeu et par définition des diagrammes de Young, les seuls transvasements possibles à travers la frontière du diagramme vont de l'intérieur vers l'extérieur du diagramme. À chaque étape, pour chaque diagramme, la somme des volumes d'eau des réservoirs dans le diagramme ne peut donc que diminuer ou rester stable.

Théorème. *La condition « $\sum_{(i,j)\in D} d_{ij} \geq 0$ pour tout diagramme de Young D » est nécessaire et suffisante pour que le remplissage équilibré soit réalisable.*

Montrer que la condition est suffisante est plus difficile. Pour cela, on donne une méthode pour équilibrer les réservoirs lorsque cette condition est satisfaite. On commence par traiter le cas d'une grille de 3 cases par 3, puis on généralisera le résultat.

4.2. Étude du cas 3×3

La méthode consiste à traiter le problème colonne par colonne en commençant par la gauche. Après avoir traité les deux premières colonnes, on sera donc dans une situation où il reste une seule colonne à traiter. On commence par décrire ce cas-là car il est plus simple.

Cas d'une colonne

Examinons dans un premier temps le cas d'une colonne de 3 réservoirs $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Avec les mêmes notations que précédemment, la condition donne $d_1 \geq 0$ et $d_1 + d_2 \geq 0$ (ainsi que $d_1 + d_2 + d_2 \geq 0$, mais cette somme est forcément nulle par construction). Dans cette situation, on vide l'excès du réservoir 1, donc la quantité d_1, dans le réservoir 2, puis l'excès du réservoir 2 dans le réservoir 3. En raisonnant sur les déficits, on a :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1} \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 + d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 + d2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on observe que la condition reste vérifiée à chaque étape.

Revenons au cas d'une grille 3×3.

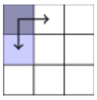
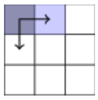
Première étape

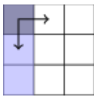
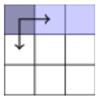
La première étape consiste à équilibrer le réservoir dans la première colonne en haut à gauche. Il s'agit de répartir l'excès d_{11} entre une quantité a vers la droite et le reste $d_{11} - a$ vers le bas :

$$\begin{tikzcd} d_{11} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d_{11} - a"'] & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{tikzcd}$$

Il faut choisir a de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- $0 \leq a \leq d_{11}$ par définition du problème,
- toutes les sommes de Young de la nouvelle configuration sont positives (pour pouvoir poursuivre le raisonnement), c'est-à-dire :

$d_{21}+d_{11}-a\geq 0$  $d_{12}+a\geq 0$ 

$d_{21}+d_{31}+d_{11}-a\geq 0$  $d_{12}+d_{13}+a\geq 0$ 

les autres sommes de Young étant identiques à celles du cas initial.
On doit donc avoir :

$$\begin{array}{cc} 0\leq a & a\leq d_{11} \\ -d_{12}\leq a & a\leq d_{11}+d_{21} \\ -d_{12}-d\,13\leq a & a\leq d_{11}+d_{21}+d_{31} \end{array}$$

Pour justifier que cet encadrement de a ne contient pas de contradiction, on peut observer que si l'on retranche n'importe lequel des minorants à n'importe lequel des majorants, on obtient une somme de Young pour la configuration initiale, donc une valeur positive, ainsi tous les minorants sont inférieurs à tous les majorants. On peut donc choisir

$$a=min\{d_{11,}\,d_{11}+d_{21,}\,d_{11}+d_{21}+d_{31}\}$$

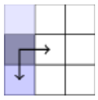
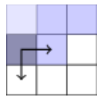
Deuxième étape
On est maintenant dans une configuration où toutes les sommes de Young sont positives et où la valeur de la case supérieure gauche est déjà la bonne et on cherche à s’occuper de la deuxième case de la première colonne :

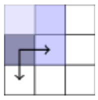
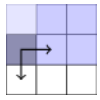
$$\begin{tikzcd} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d_{11}-a"'] & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{tikzcd}$$

Il faut que la configuration obtenue satisfasse la condition du théorème, on va donc chercher quelles sont les inégalités que a doit satisfaire. Seules les cases (2,1), (2,2) et (3,1) changent de valeur, donc les diagrammes de Young qui ne contiennent aucune de ces trois cases ne changeant pas de valeur satisfont toujours la condition. De même, les diagrammes qui contiennent ces trois cases satisfont toujours la condition parce que la quantité totale d’eau qu’ils contiennent ne change pas.

Les inégalités à satisfaire pour que la configuration soit correcte sont donc les suivantes :

$0 \leq a \leq d_{21}$ par la règle du jeu

$d_{31} + d_{21} - a \geq 0$  $d_{12} + d_{13} + d_{22} + a \geq 0$ 

$d_{12} + d_{22} + a \geq 0$  $d_{12} + d_{13} + d_{22} + d_{23} + a \geq 0$ 

Il faut donc avoir

$$\begin{array}{rr} 0 \leq a & \\ -d_{12} - d_{22} \leq a & a \leq d_{21} \\ -d_{12} - d_{13} - d_{22} \leq a & a \leq d_{21} + d_{31} \\ -d_{12} - d_{13} - d_{22} - d_{23} \leq a & \end{array}$$

À nouveau, retrancher l'un quelconque des minorants à l'un quelconque des majorants donne une somme de Young donc une valeur positive, par conséquent tous les minorants sont inférieurs à tous le majorants. On peut donc choisir

$$a = min\{d_{21}, d_{21} + d_{31}\}$$

Étapes suivantes

Pour la troisième case de la première colonne, on se contente de verser l'excédent dans la case de droite et on vérifie facilement que la configuration obtenue satisfait toujours la condition. On se retrouve alors dans une configuration où la première colonne est équilibrée, on peut traiter la deuxième colonne comme la première et ainsi se ramener au cas d'une seule colonne, qui est déjà traité.

4.3. Résolution générale

On considère maintenant une grille de dimensions quelconques $m \times n$ et on suppose que toutes les cases ne sont pas à l'équilibre. Soit (I,J) la première case telle que $d_{IJ} \neq 0$, en parcourant colonne par colonne en partant de la gauche puis de haut en bas, de sorte que $d_{ij} = 0$ pour tout $i<I$ et pour $i=I$ et $j<J$. On cherche à équilibrer la case (I,J) en versant a vers la droite et $d_{IJ} - a$ vers le bas.

Une stratégie de résolution

Les observations précédentes permettent de décrire l'algorithme suivant :

Calculer la moyenne m des v_{ij}.
Pour chaque i et j, poser $d_{ij} = v_{ij} - m$.
Pour chaque j de 1 à n :
  pour chaque i de 1 à m :
    calculer $a = \min\{\sum_{x=i}^{k} d_{xj} \mid i \leq k \leq n\}$
    si $a < 0$ alors le problème est insoluble
    sinon poser $d_{i,j+1} \leftarrow d_{i,j+1} + a$, verser a de (i,j) dans $(i,j+1)$,
      poser $d_{i+1,j} \leftarrow d_{i+1,j} + d_{ij} - a$, verser $d_{ij} - a$ de (i,j) dans $(i+1,j)$,
      poser $d_{ij} \leftarrow 0$.

Les arguments précédents dans le cas 3×3 suggèrent que l'algorithe fait ce que l'on attend, et c'est ce que l'on va maintenant démontrer. En effet,
– à chaque étape, toutes les sommes de Young restent positives;
– à chaque étape la case (i,j) est mise à 0, donc en fin de boucle toutes les cases sont à 0.
Comme le problème est insoluble dès qu'une somme de Young de la configuration initiale est strictement négative, on sait que dans ce cas l'algorithme va nécessairement aboutir à $a < 0$, puisque par construction chaque transvasement produit par l'algorithme est correct et la situation finale est équilibrée si la condition $a < 0$ ne se produit jamais.
Le coût en temps de l'algorithme est en $O(m \times n^2)$ puisque chacune des $m \times n$ cases est visitée une fois et que, pour chaque case, le calcul de minimum se fait en au plus n étapes.

Justification d'une étape

En transposant les observations précédentes, on pose

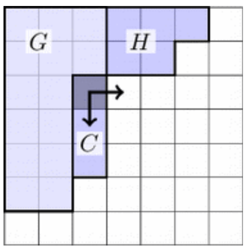
$$a = min \left\{ \sum_{i=I}^{k} d_{iJ} \right\}_{I \leq k \leq n}$$

donc le minimum des sommes de Young obtenues en considérant isolément la colonne J.
Notons (d'_{ij}) la matrice des différences obtenue après transvasement de a vers la droite et $d_{IJ} - a$ vers le bas, on a donc

$$d'_{IJ} = 0$$
$$d'_{I+1,J} = d_{I+1,J} + d_{IJ} - a$$
$$d'_{I,J+1} = d_{I,J+1} + a$$
$$d'_{ij} = d_{ij} \text{ dans les autres cas.}$$

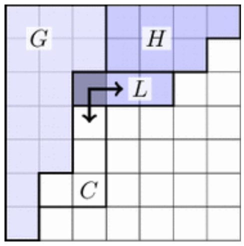
On veut montrer que la configuration d' n'a que des sommes de Young positives. Pour cela on considère un diagramme de Young D arbitraire et on raisonne par cas. Pour alléger les notations, si A est un ensemble de cases, on note $d(A)$ la somme $\sum_{(i,j) \in A} d_{ij}$.

- Si D ne contient pas (I,J) alors il ne contient pas non plus $(I+1,J)$ ni $(I,J+1)$ et par conséquent $d'(D) = d(D) \geq 0$.
- Si D contient (I,J) mais ni $(I+1,J)$ ni $(I,J+1)$ alors on a $d'(D) = d(D) - d_{IJ} = d(D \setminus \{(I,J)\})$ or $D \setminus \{(I,J)\}$ est un diagramme de Young donc sa somme est positive et $d'(D) \geq 0$.
- Si D contient $(I+1,J)$ et $(I,J+1)$ alors il contient aussi (I,J) et les variations de valeurs sur ces trois cases se compensent donc on a $d'(D) = d(D) \geq 0$.
- Si D contient $(I+1,J)$ et pas $(I,J+1)$, alors il contient (I,J) et on a une situation de la forme suivante :



On décompose D en $G \cup H \cup C$ où

- G est la partie du diagramme à gauche de la colonne J et au dessus de case (I,J) dans la colonne J,
- H est la partie du diagramme à droite de la colonne J, nécessairement au dessus de la ligne I,
- C et la partie du diagramme qui contient la case (I,J) et les cases sous elle dans la colonne J.
  Alors $G \cup H$ est un diagramme de Young et sa valeur est inchangée donc on a $d'(G \cup H) = d(G \cup H) \geq 0$. D'autre part on a $d'(C) = d(C) - a$, or par définition a est la plus petite valeur obtenue pour une somme $d_{IJ} + \cdots + d_{kJ}$, or $d(C)$ est une telle somme donc $a \leq d(C)$ d'où $d'(C) \geq 0$ et par conséquent $d'(D) = d'(G \cup H \cup C) \geq 0$.
- Si D contient $(I,J+1)$ et pas $(I+1,J)$, alors il contient (I,J) et on a une situation de la forme suivante :



On décompose maintenant D en $G \cup H \cup L$ où

- G est la partie du diagramme à gauche de la colonne J et au dessus de case (I,J) dans la colonne J,
- H est la partie du diagramme à droite de la colonne J et au dessus de la ligne I,
- L et la partie du diagramme qui contient la case (I,J) et les cases à sa droite dans la ligne I.

On a $d'(D) = d(D) - (d_{IJ} - a)$. La valeur a est la plus petite valeur obtenue en sommant des cases de la colonne J en partant du haut, elle correspond à un ensemble de cases $\{(i,J) \mid i \leq k\}$ pour un certain $k \geq I$. Notons C l'ensemble $\{(i,j) \mid i \leq k, j \leq J\}$. On fait alors les observations suivantes :

- C est un diagramme de Young donc $C \cup D$ également et par conséquent $d(C \cup D) \geq 0$.
- On a $d(C) = a$ puisque toutes les cases dans les colonnes à gauche de J sont nulles par hypothèse.
- La seule case non nulle dans $C \cap D$ est (I,J) donc on a $d(C \setminus D) = d'(C) - d_{IJ} = a - d_{IJ}$.

Par conséquent on a $d(C \cup D) = d(D) + d(C \setminus D) = d(D) + a - d_{IJ} = d'(D)$. Comme $d(C \cup D) \geq 0$ on en déduit $d'(D) \geq 0$.

Ainsi tous les diagrammes de Young de la nouvelle configuration sont positifs.

Annexe. Une production d'étudiants[2] : un algorithme de pavage (correct)

A(1,1)	A(1,2)	...	A(1,n–1)	A(1,n)
A(2,1)	A(2,2)	…	A(2, n–1)	A(2, n)
…	…	…	…	…
A(n–1, 1)			A(n–1, n–1)	A(n–1, n)
A(n, 1)			A(n, n–1)	A(n, n)

Explication :

On note m = somme des A(i,j) / n*n (la moyenne, que l'on doit avoir dans chaque case à la fin de l'algorithme)

1) a. **Si** A(1,1) < m
   b. **Alors** il n'y a pas de solution STOP.

2) On remplit la première ligne en commençant par la case la plus à droite (A(1,n)) jusqu'à la case A(1,2)

3) a. **S**i A(1,k) n'est pas remplie jusqu'à m et A(1,k-1) possède suffisamment de surplus
   Alors on transfert de A(1,k-1) vers A(1,k) le manque nécessaire
   b. **Sinon**
      i. **si** il y a du surplus on transfert sa totalité vers A(1,k)
      ii. **Sinon** on regarde la case A(1,k-2) de la même manière, et cela jusqu'à la case A(1,1) si nécessaire.
   c. **Si** la case A(1,k) est toujours pas remplie (<m)
   d. **Alors** il n'y a pas de solution STOP

4) Ici toute la ligne est remplie. On transfert tous les surplus : A(i,k) vers A(i+1,k)

5) On répète le même algorithme sur chaque ligne de 2 à n.

Algorithmique :

```
Pour i de 1 à n-1
        Pour j de n à 1
                Si A(i,j)<m
                Alors k=i-1

                        Tant que k>=1 et A(i,k)>m
                                Si      A(i,j)<m et A(i,k)<m(m-A(i,j))
                                Alors   A(i,j) <-- A(i,j) + A(i,k) – m
                                        A(i,k) <-- m
                                        K <-- k-1
                                Sinon   A(i,k) <-- A(i,k) – (m-A(i,j))
                                        A(i,j) <-- m
                                        K <-- 0
                        Fin tant que

                Si A(i,j) <m
                Alors il n'existe pas de solution
        Fin Pour
        Pour j de 1 à n
        Si      A(i,j) > m
        Alors   A(i+1,j) <--A(i+1,j) + (A(i,j) –m)
                A(i,j) <-- m
        Fin Pour
Fin Pour
```

2 Lucie Croisier, Claudia Durand, Hugo Novet

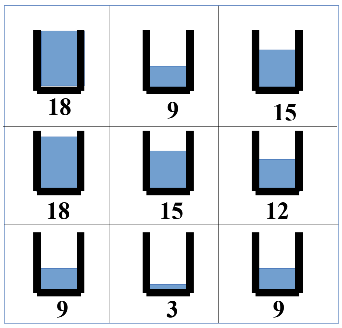
fiche-élève

Remplissage de châteaux d'eau

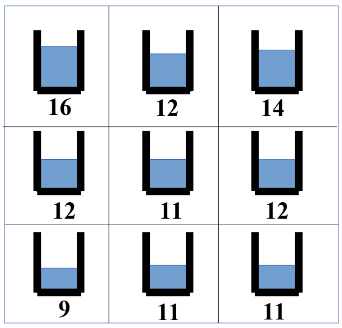
Sur une grille rectangulaire, on a disposé dans chaque case un château d'eau contenant une certaine quantité d'eau. On cherche à aboutir à une situation où tous les châteaux d'eau contiennent la même quantité d'eau, en procédant selon la règle suivante : à chaque étape, on choisit un des châteaux d'eau et on déverse tout ou partie de son contenu dans le château d'eau situé immédiatement à sa droite ou dans celui situé immédiatement en dessous, éventuellement dans les deux. On peut verser les quantités que l'on souhaite.

Est-il possible de résoudre ce problème quelles que soient les quantités initiales ?
Lorsque c'est possible, donner un procédé qui permet d'aboutir à l'équilibre recherché.

Voici deux exemples de situations initiales, avec neuf châteaux disposés dans un carré (les quantités sont indiquées en dessous).

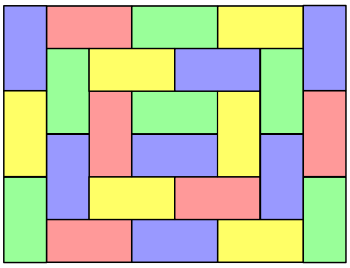


Exemple 1



Exemple 2

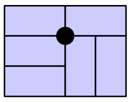
Pavages parfaits par des tatamis



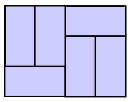
Pour une autre présentation du problème avec une analyse mathématique, on pourra se reporter à l'article *Paver avec des tatamis* de Jean-Paul Delahaye dans Pour la Science [1]. Il s'agit d'un problème classique de combinatoire sur lequel des articles de recherche ont été publiés[2].

1. Le problème

Dans les règles classiques de l'aménagement intérieur au Japon, le sol d'une pièce est toujours recouvert de tapis, appelés tatamis, qui ont une taille de 1 unité par 2 unités. Pour des raisons de rigidité autant que d'esthétique, il ne faut pas que quatre tatamis se rencontrent en un même point. Par exemple, le plan suivant n'est pas conforme :



Pour une telle pièce, le pavage suivant est autorisé :



Pouvez-vous trouver un pavage (autorisé) pour un rectangle de dimensions 5 par 6 ?
On se demande pour quelles tailles de rectangle il est possible de résoudre le problème.

2. Méthodes de construction de pavages parfaits

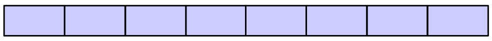
On commence par établir des méthodes systématiques pour produire des solutions pour certaines tailles. La première observation concerne la parité : puisque les tatamis sont de surface 2, il est impossible de paver tout rectangle dont les deux côtés sont de longueur impaire. Une fois cette observation faite, on cherche des méthodes pour construire des pavages dans certains cas particuliers. Désormais, par « pavage » on désignera toujours des pavages par des tatamis respectant les règles du problème, encore appelés « pavages parfaits ».

1 Jean-Paul Delahaye. *Paver avec des tatamis.* Pour la Science, 460, février 2016.
2 Frank Ruskey et Jannifer Woodcock. *Counting fixed-height tatami tilings.* Electronic journal of combinatorics, 16, 2009.

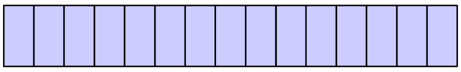
Bandes

On peut commencer par se poser la question des rectangles de tailles (m, n) pour de petites valeurs de m. Les premiers cas sont abordables par des élèves de tous niveaux.

Cas m=1. Il est facile de montrer que tous les pavages sont obtenus par juxtaposition horizontale de tatamis, il y a donc une solution (unique) pour tout rectangle de dimensions $(1, 2n)$:

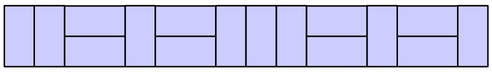


Cas m=2. Ici on peut trouver une solution simple pour n'importe quelle longueur n :

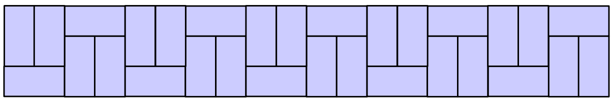


On peut faire le constat que l'on obtient tous les pavages par juxtaposition des deux briquettes de base suivantes :

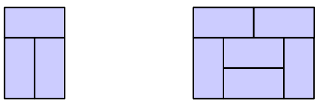
avec la contrainte que deux briquettes horizontales ne peuvent pas être juxtaposées dans le même sens (on aurait alors un point de concours de quatre tatamis). On peut ainsi construire de nombreuses solutions pour une même taille :



Cas m=3. Ici encore, on peut trouver une solution pour toute longueur paire, en répétant un même motif :



En étudiant les différents situations possibles, on peut constater que tout pavage d'une bande de largeur 3 sera composé des deux briquettes suivantes, éventuellement retournées :



On peut rassembler ces constatations dans le premier énoncé suivant :

Il existe un pavage pour tout rectangle de taille

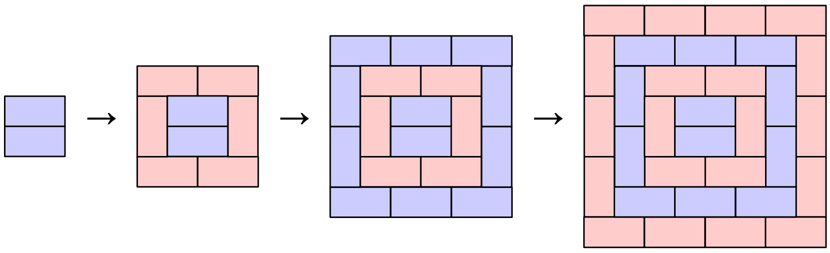
- $(1,n)$ *avec n pair,*
- $(2,n)$ *avec n quelconque*
- $(3,n)$ *avec n pair.*

Comme les autres cas ($(1,n)$ et $(3,n)$ avec n impair) sont impossibles du fait de la parité, on a en fait établi une caractérisation simple des cas où une solution existe pour le problème de dimension (m,n), avec $m \leq 3$.

Pour pousser la réflexion plus loin avec des élèves, on peut organiser un défi entre de petits groupes en demandant d'établir des résultats de la même teneur pour $m = 4, 5, 6, 7$, et éventuellement de voir ce que l'on peut déduire sur le nombre de solutions en fonction de n, pour des valeurs particulières de m. On constatera rapidement qu'il est difficile de progresser sans une méthode plus précise.

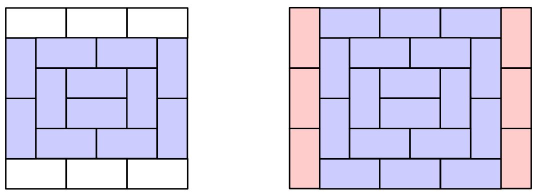
Méthode de l'escargot

Une autre approche, tout aussi naturelle, consiste à partir d'un carré initial de côté 2 puis le faire grossir en ajoutant des couches successives, en procédant en « escargot » :



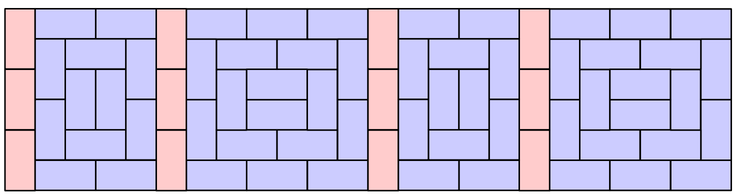
On peut ainsi paver tous les carrés de côté pair.

En observant les bords de ces carrés, on constate qu'il y a toujours deux bords opposés constitués de tatamis tous rangés dans le même sens le long du bord (en haut et en bas, sur la figure précédente). En supprimant une ou deux de ces rangées, on peut obtenir un pavage valide d'un rectangle non carré. De même, en partant du carré, on peut ajouter une ou deux bandes le long des deux autres bords opposés :



Pour tout n pair, il est possible de paver les rectangles de tailles $(n,n–1)$, $(n,n–2)$, $(n,n+1)$ et $(n,n+2)$.

Les pavages obtenus ainsi peuvent également se juxtaposer pour former des bandes.



3. Éléments didactiques

Le problème est facile à résoudre pour les petites dimensions. Il y a beaucoup de solutions dans les premiers cas que l'on étudie, on est donc naturellement conduit à conjecturer qu'il est toujours possible de résoudre le problème.

Le premier contre-exemple (d'un rectangle d'aire paire qu'il est impossible de paver selon les règles) n'est pas facile à trouver même pour l'enseignant qui explore le problème, de plus il est assez difficile de justifier son impossibilité dans ce cas de façon détaillée.

Quelles sont les mathématiques mobilisées ici ? Il s'agit d'un problème de pavage, sujet assez classique en géométrie combinatoire (même s'il est peu abordé dans les cursus généraux), mais avec des contraintes inhabituelles.

Au collège, l'emploi de dominos semble particulièrement adapté. Les élèves peuvent trouver tous les pavages possibles pour $m \times n$ avec $m \leq 3$ et peut-être même pour des valeurs plus grandes de m. Ils peuvent aussi découvrir la « méthode de l'escargot », qui consiste à commencer par un carré 2×2 puis tourner autour en ajoutant des couches successives. Tout ceci leur fait faire des raisonnements inductifs dans un cadre particulièrement ludique.

Au lycée, on peut aller bien au-delà. C'est un excellente occasion de montrer aux élèves qu'il faut bien sûr suivre son intuition mais qu'elle a ses limites et qu'il faut donc garder un regard critique. En effet, ce n'est pas parce qu'un résultat a été vérifié pour de petites valeurs des paramètres qu'il peut être généralisé.

Les méthodes de construction systématiques à partir de motifs simples font intervenir un raisonnement par récurrence. Les cas d'impossibilité reposent sur un raisonnement par l'absurde. En effet, même si le nombre de cas à étudier est fini pour chaque dimension, il est suffisamment grand pour nécessiter un certain niveau d'abstraction. On ne peut pas s'attendre, même au lycée, à ce que la réponse complète au problème soit trouvée.

4. Compte-rendus d'expérimentations

En classe de Première technologique

Le problème a été étudié par un groupe de quatre élèves de classe de Première technologique, dans le cadre d'un stage Hippocampe[3]. Pour des rectangles de petites dimensions, des solutions ont été trouvées rapidement, puis des méthodes systématiques ont été énoncées avec précision en exploitant le pavage de carrés : d'une part le remplissage d'une bande par répétition d'un motif carré avec rotation d'un quart de tour, d'autre part le remplissage d'un carré de côté pair quelconque, par la « méthode de l'escargot ».
Au delà de la question des dimensions pour lesquelles un remplissage est possible, le groupe s'est aussi intéressé à compter le nombre de pavages possibles pour des bandes de largeurs 2 et 3. Ils se sont aussi penchés sur des questions liées à la coloration des pavages obtenus, sans rapport avec le sujet développé ici. En revanche, les élèves n'ont pas trouvé de cas d'impossibilité.

3 Stage d'initiation à la recherche en mathématiques, voir en annexe pour une explication du dispositif et un exemple de prodution.

Avec des élèves de seconde dans le cadre d'un stage C2+ [4]

L'expérience a porté sur deux groupes d'une vingtaine d'élèves chacun sur une séance d'une heure un quart. Une dizaine de dominos en bois ainsi que des feuilles à petits carreaux avaient été disposés sur des tables de quatre. Après une rapide présentation du jeu, il leur a été demandé s'il y avait un moyen de paver un rectangle de 5 unités par 6 (5×6). Les élèves ont d'emblée cherché et trouvé des solutions pour $m \times n$ avec $m \leq 4$:

- $1\times2n$, $2\times n$, 3×2n quel que soit l'entier $n\geq1$,
- 4×4.

Les enseignants ont alors tracé un tableau (1..10)×(1..10) qu'ils sont venus remplir au fur et à mesure des résultats obtenus par leur groupe (dessin validé par la classe puis un O dans la case correspondante ou une croix en cas d'impossibilité justifiée).
L'impossibilité de paver dans le cas impair×impair a été trouvée même si elle n'a pas été toujours très bien formulée avec un argument d'aires. Des méthodes de juxtaposition de motifs de base sont apparues.
Comme il n'y a plus eu assez de dominos, certains élèves en ont découpé dans les feuilles de papier, d'autres ont su travailler directement sur les feuilles quadrillées et ainsi garder une trace de leurs résultats.

Par des moyens empiriques, un pavage du 5×6 est sorti. Il n'était pas question de s'arrêter en si bon chemin. Certains groupes avaient rempli 5×6 en commençant par le bord. Ils ont voulu généraliser la méthode mais pour certains rectangles, il restait des trous 1×1. L'idée est alors venue de « commencer par le centre » avec l'espoir d'avoir un « centre de symétrie » ! Ce n'est pas si simple, néanmoins commencer par un carré 2×2 puis tourner autour en ajoutant des couches successives (méthode « de l'escargot ») s'avère très fructueux.
Les cas 5×8, 5×10, 6×9, 6×10 ont été résolus par juxtaposition.

La case restante était 7×10. Les élèves ont voulu continuer à chercher, sûrs de trouver un pavage, en invoquant, en dépit de l'attitude dubitative de leurs enseignants, une forme de « récurrence », la « régularité » des mathématiques … La séance étant terminée, ils sont repartis du stage avec des pistes, données par les enseignants, pour démontrer cette impossibilité, la démonstration n'étant pas évidente mais compréhensible à ce niveau.

5. Résolution mathématique

Plusieurs publications sur le sujet, plutôt en combinatoire, décrivent aussi le nombre de solutions. L'article de Jean-Paul Delahaye donne une présentation plutôt « grand public ».
Ici, on s'intéresse principalement au problème de décision, c'est-à-dire à savoir s'il est possible ou non de paver un rectangle donné, sans chercher à savoir de combien de façons différentes.

4 Stage organisé par le rectorat, les élèves proviennent de lycées différents et ont été sélectionnés au vu de leur motivation.

5.1 Synthèse des méthodes de construction

Pour synthétiser les résultats obtenus dans la première analyse, dressons un tableau des tailles de rectangles possibles, en notant les cas où nous avons une méthode de construction et les cas où nous avons l'impossibilité du fait de la parité de la surface :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		1		1		1		1		1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3		1		1		1		1		1		1
4	1	1	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4
5		1		3		3						
6	1	1	1	3	3	2	3	3			4	4
7		1		4		3		3				
8	1	1	1	4		3	3	2	3	3		
9		1		4				3		3		
10	1	1	1	4				3	3	2	3	3
11		1		4		4				3		3
12	1	1	1	4		4				3	3	2

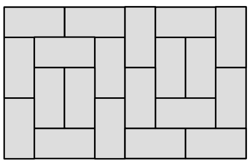
Les numéros renvoient aux propositions qui donnent des solutions :

1. bandes de largeur au plus 3
2. carrés pairs
3. carrés pairs plus ou moins une ou deux rangées
4. bandes de carrés

Présenter des résultats partiels dans un tableau de cette forme pendant l'exploration du problème présente plusieurs intérêts :

- dans une première phase, on peut voir apparaître les premiers motifs
- une fois que les premières méthodes systématiques sont trouvées, cela permet de rassembler les résultats et de voir éventuellement si certaines méthodes sont redondantes;
- les cas les plus petits non encore atteints par les méthodes déjà établies sont mis en évidence.

Pour ce dernier aspect, dans les résultats établis jusqu'à présent on constate que le rectangle de plus petite taille pour lequel la question n'est pas encore résolue est (5,8), en effet c'est trop large pour être une bande de petite taille mais « trop carré » pour être obtenu comme une bande de motifs carrés. On peut en fait trouver une solution :



On constate un motif qui peut se répéter, et ainsi donner un pavage pour tous les rectangles de dimensions (5,4n).

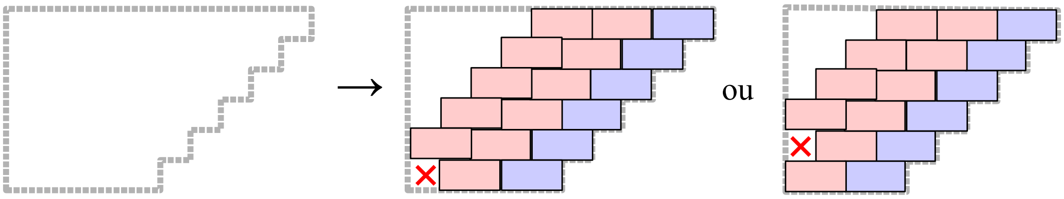
5.2. Cas d'impossibilité

Jusqu'ici nous avons toujours trouvé des façons de paver les rectangles dès que leur surface était paire. En sera-t-il toujours ainsi ? Plutôt que d'avancer de manière empirique, nous allons maintenant chercher ce qui pourrait nous empêcher de paver.

Convention. Dans les remarques suivantes, on considérera toujours le pavage d'un rectange de taille (m,n) avec $m \leq n$, où m désigne la hauteur et n la largeur. On désigne par « horizontale » la direction parallèle au côté de longueur n et par « verticale » celle paralllèle au côté de longueur m.

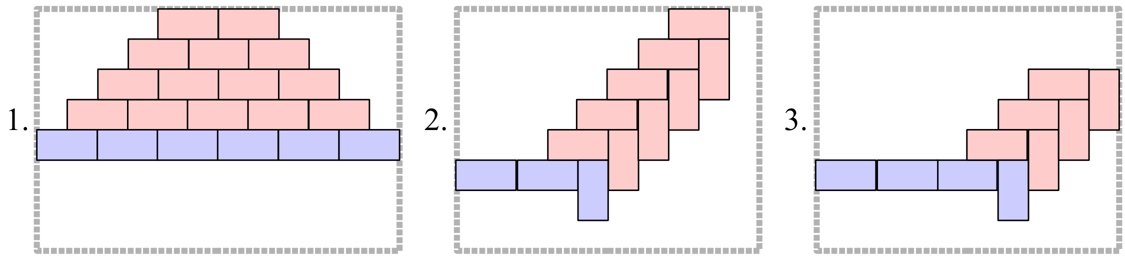
Des obstructions : les escaliers

Commençons par remarquer qu'il n'est pas possible de paver une région « en escalier » de la forme suivante :



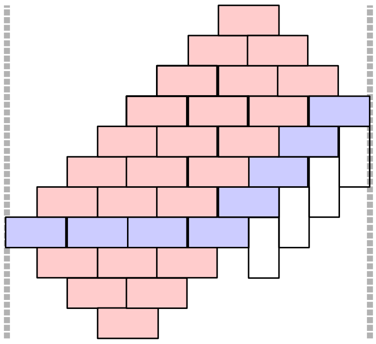
En effet, en considérant les possibilités de pavages en partant du haut, on constate que chacun des tatamis horizontaux représentés dans la figure sont imposés (ceux de la rangée de droite, puis des autres rangées successivement), ce qui mène à une situation contenant une case isolée dans le coin opposé au point de départ ou juste au dessus.

De cette observation, on peut déduire qu'un tatami horizontal ne peut toucher le bord gauche que dans un coin. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait l'une des situations suivantes (à symétrie près) :



Dans le cas 1, du fait de la convention $m \leq n$, la rangée horizontale qui touche le bord décompose le rectangle en deux parties dont au moins une est de hauteur inférieure ou égale à $m/2$ et l'empilement en pyramide dans cette partie mènera à former deux escaliers, ce qui rend le pavage impossible.

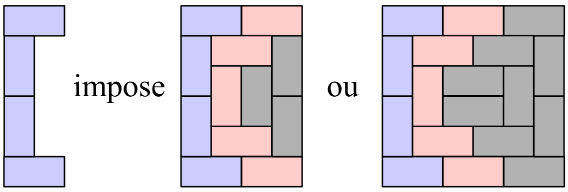
Dans les cas 2 et 3, la présence du « chevron » (un tatami horizontal suivi d'un vertical) impose que ce motif doit se répéter jusqu'à un bord. Le cas 2 correspond à la situation où c'est un bord horizontal qui est atteint, on a alors à nouveau un escalier qui rend le pavage impossible. Dans le cas 3, c'est le bord de droite qui est atteint, on peut alors raisonner de la façon suivante :



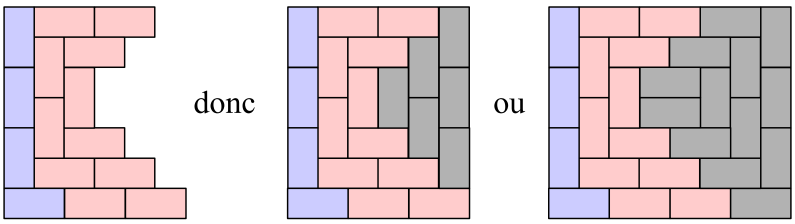
La présence de la rangée horizontale et des chevrons jusqu'au bord droit impose la présence d'un ensemble d'autres tatamis horizontaux, au dessus et en dessous, ce qui forme une sorte de parallélogramme de largeur n et de hauteur $n-1$, à moins qu'un bord haut ou bas ne soit atteint, ce qui formerait une région en escalier. Comme la hauteur m du rectangle à paver est par hypothèse inférieure ou égale à n, cette figure atteint nécessairement le bord haut ou le bord bas, ce qui fait à nouveau apparaître un escalier.

Les motifs de base

Ces observations permettent de classifier les pavages possibles en fonction de la configuration sur le bord gauche. Dans le cas où m est pair, le bord gauche peut soit être constitué uniquement de tatamis verticaux (ce qui forme un rectangle de taille $m\times 1$) soit contenir un tatami horizontal en haut et un en bas. Dans ce cas, il y a toujours deux façons (et pas plus) de poursuivre le pavage jusqu'à obtenir un rectangle. Par exemple,



La seule possibilité pour poursuivre le pavage sur la droite est d'avoir une rangée de tatamis verticaux, puis des motifs similaires. Dans le cas où m est impair, il y a une seule configuration possible sur le bord gauche à symétrie près par rapport à un axe horizontal :



On obtient donc des régions rectangulaires de tailles $(m,m-1)$ et $(m,m+1)$. Pour poursuivre le pavage sur la droite, il est nécessaire de reprendre l'un de ces deux motifs, mais renversé, avec le tatami horizontal de gauche placé en haut.

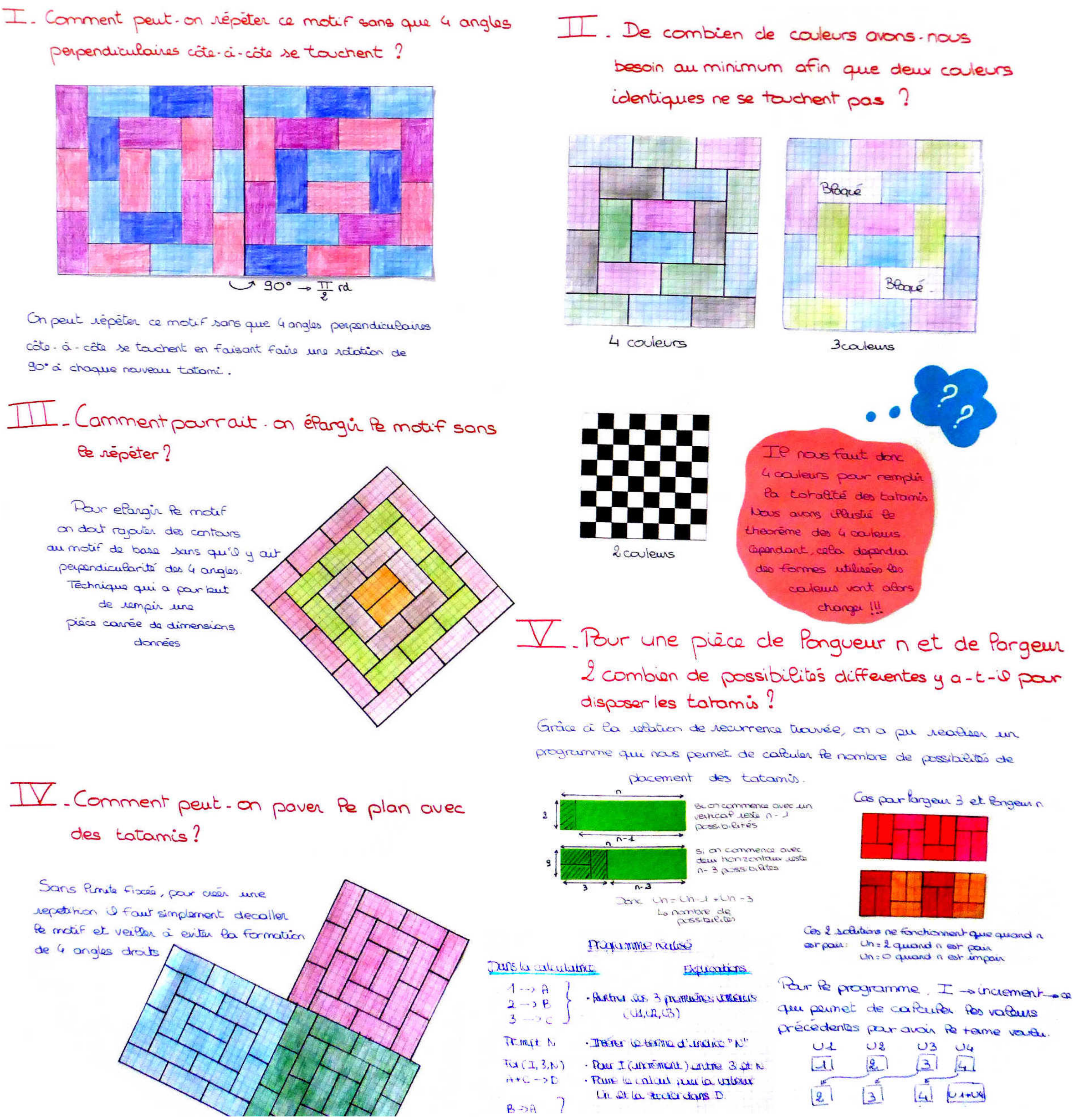
Pour un m donné, on peut donc maintenant déterminer quelles sont les valeurs de n pour lesquelles il est possible de paver le rectangle $m \times n$. Avec les méthodes de construction étudiées jusqu'à présent, on pourra paver tous les rectangles $m \times n$ d'aire paire avec $m \leq 6$ (pour de petites valeurs de n, les solutions peuvent être trouvées à la main). Le premier cas d'impossibilité d'aire paire est le rectangle 7×10. En effet, si un tel pavage était possible, le premier motif rectangulaire serait de taille 7×6 ou 7×8 et il devrait donc être suivi d'un autre motif de taille 7×6 ou 7×8, ce qui ferait dépasser la longueur 10.

Quelques questions pour aller plus loin

- Montrer que, de façon générale, la configuration au pourtour d'un rectangle détermine entièrement le pavage (s'il existe).
- Compter le nombre de façons différentes de paver un rectangle de taille donnée. De premiers résultats sont accessibles pour les rectangles de hauteur 2 ou 3.
- Déterminer combien de couleurs sont nécessaires pour colorier un pavage de sorte que deux tatamis qui se touchent aient toujours des couleurs différentes.

Annexe : une production d'élèves

Un stage Hippocampe consiste à placer une classe de lycée ou fin de collège en immersion pendant trois jours consécutifs à l'université. Les élèves travaillent en groupes (3 à 5) sur des questions mathématiques assez ouvertes avec l'aide d'encadrants universitaires et présentent leurs résultats en fin de stage sous forme d'affiches qu'ils expliquent à des chercheurs. L'image ci-dessous est la production d'un groupe de quatre élèves de première technologique, cf. http://hippocampe.irem.univ-mrs.fr/Stages/2016-01-23.

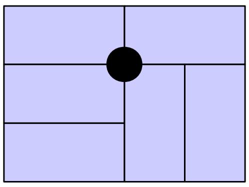


fiche-élève

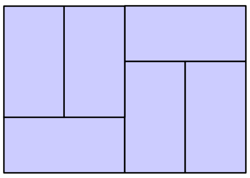
Pavages parfaits avec des tatamis

Le problème

Dans les règles classiques de l'aménagement intérieur au Japon, le sol d'une pièce est toujours recouvert de tapis, appelés tatamis, qui ont une taille de 1 unité par 2 unités. Pour des raisons de rigidité autant que d'esthétique, il ne faut pas que quatre tatamis se rencontrent en un même point. Par exemple, le plan suivant n'est pas conforme :



Pour une telle pièce, le pavage suivant est autorisé :



Une première question

Pouvez-vous trouver un pavage autorisé pour un rectangle de dimensions 5×6 ?

Plus généralement

On peut se demander pour quelles tailles de rectangle il est possible de résoudre le problème.