Chapitre La fonction exponentielle 1ère

PARTIE 1/ Existence et unicité

Théorème (admis) : Il existe une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle. Notation : $\exp$.

Remarques pour le professeur :
1) Des raisons nous amènent à penser que la notation e^x est à éviter dans un premier temps. Risque de ne pas voir la fonction mais un calcul de puissance, aucune justification n'est possible à ce stade, pour parler de fonction puissance, et des élèves (test QCM dans une classe) pensent majoritairement que *e* est une variable. Risque de confusion entre (base e, variable *x*) et (base *x*, variable *e*) et (variable *e*, variable *x*). Enfin, nous avons constaté ce genre de simplification (en barrant les *e*) en terminale : $\frac{e^x}{e^y} = \frac{x}{y}$
2) une démonstration.

On fixe $x \in \mathbb{R}$.
$u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ Cette suite est fournie par la méthode d'Euler.
Il faut alors introduire la suite $v_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^{-n}$.
On utilise l'Inégalité de Bernoulli.

On démontre que les deux suites sont adjacentes pour n>|*x*| et on appelle leur limite exp(x).
Démontrer que la suite (u_n) est croissante n'est pas simple.

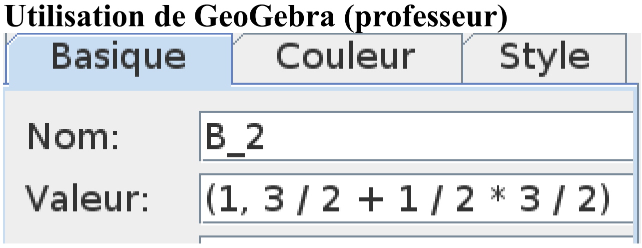
Nous avons vu (activité de découverte) que l'allure de la courbe d'une telle fonction pourrait être :

DESSIN

Remarques pour le professeur :
Il semble important ici de proposer une recherche de la courbe par la méthode d'Euler. Notre expérience assez négative dans une telle recherche trop guidée par le professeur nous a conduit à penser que dans un premier temps, la recherche de exp(1) serait une étape suffisante. Du côté des élèves, on peut se limiter à une discrétisation de [0,1] de la forme [0,1/2,1] puis [0,1/4,1/2,3/4]. Cet exercice est intéressant puisqu'il revient sur une approche par tangentes déjà travaillée dans des chapitres précédents. En faisant le choix d'un traitement géométrique du problème.

Approcher exp(1).

Utilisation de GeoGebra (professeur)

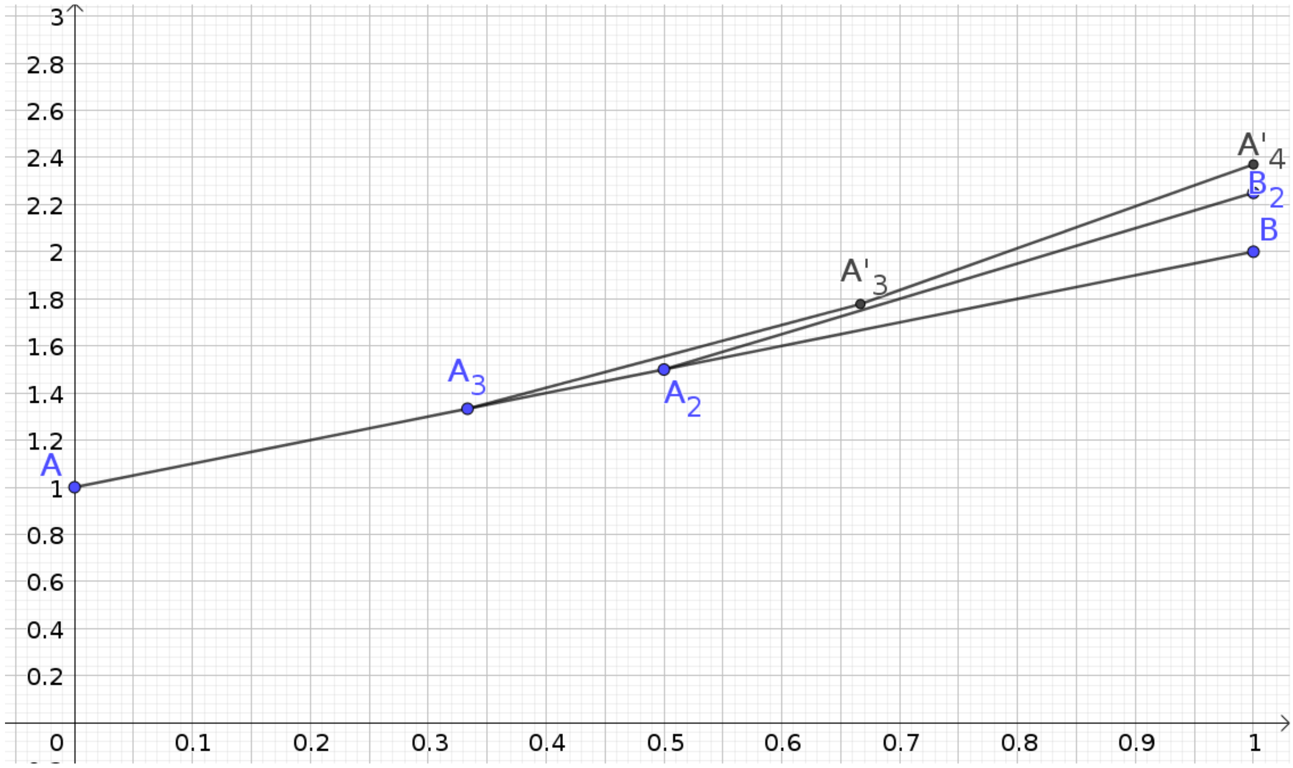


On tape dans la ligne de saisie pour montrer la procédure et éviter des calculs fastidieux.

Puis surtout pour montrer (structural) la formule réitérée !

A’_3=(2 / 3, y(A_3) + y(A_3) * 1 / 3)
A'_4=(1,y(A'_3)+y(A'_3)*1/3)

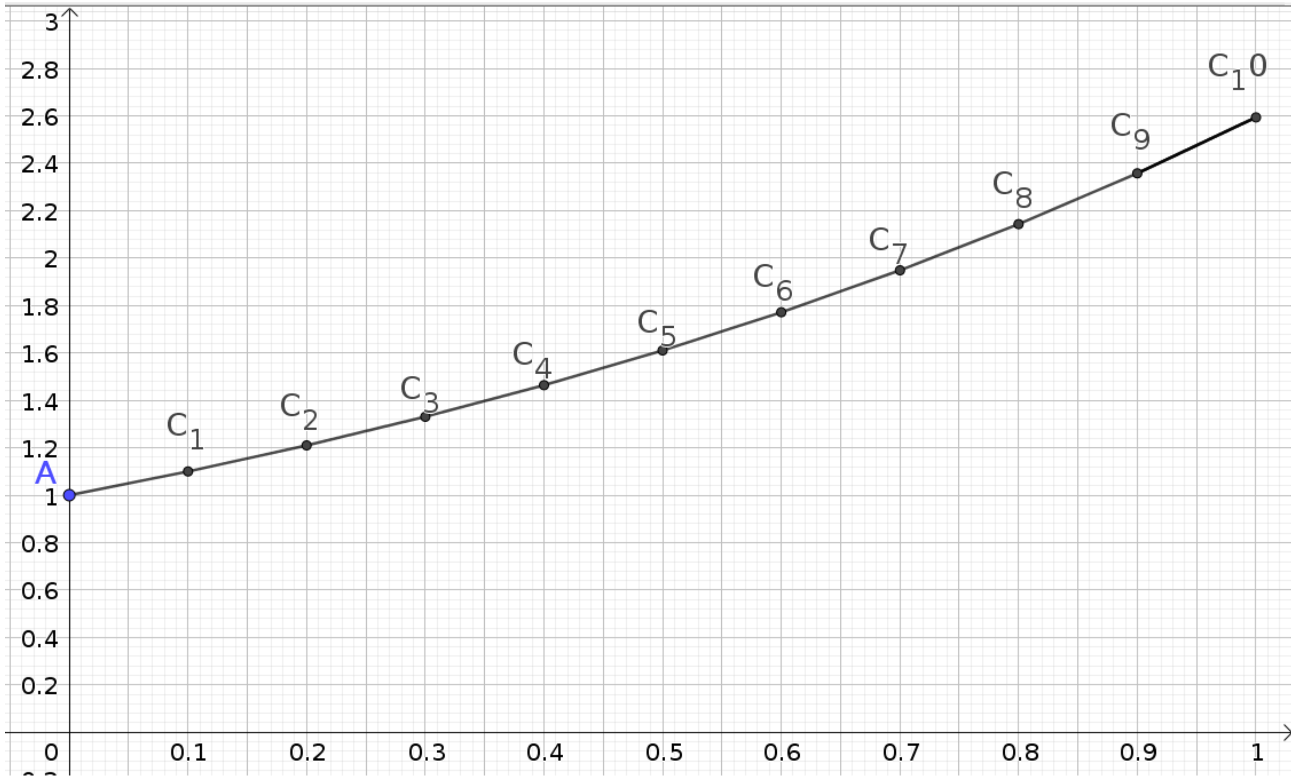
On obtient à ce stade :



S’impose la recherche d’une formule. (Ici, changement de traitement par l’algèbre tout en gardant le géométrique)

$(0,\frac{1}{n})$ - $(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n})$ - … - $(1,y(n-1)+y(n-1)\times\frac{1}{n})$ où $y(n-1)$ désigne à la fois l’ordonnée et la pente de la tangente au point d’abscisse $\frac{n-1}{n}$.

On peut alors proposer de 0,1 en 0,1 en faisant le copier-coller et modifiant que les indices.
C_2=(0.1,y(C_1)+y(C_1)*0.1)
On obtient y(C_10) → 2,59.



Nous obtenons : $e \approx 2{,}6$.

Pour poursuivre, nous pouvons donner aux élèves la suite numérique $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et demander aux élèves, à l'aide de la calculatrice, de donner la valeur affichée de u_{100} .
L'idée, graphiquement, on « vise » par la tangente à la courbe en 0 pour atteindre le point le plus proche possible de la courbe en abscisse $\frac{1}{n}$. Ce point a pour ordonnée $1+\frac{1}{n}$ puis on réitère comme précédemment. Des calculs montrent que l'on obtient la suite (u_n) .

Théorème : cette fonction est unique.

*Démonstration :

Cette démonstration n'est pas naturelle, c'est à dire, il serait étonnant qu'un élève la propose sans que le professeur la guide. Les élèves auront plutôt l'idée d'écrire $h = f - g$ avec f et g deux fonctions qui vérifient $f\,' = f$, $g\,' = g$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.

Cependant, on peut amener que deux nombres non nuls sont égaux si leur quotient est égal à 1.
(Penser quotient n'est pas le plus naturel)
Il faut alors commencer par s'assurer que par exemple g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Posons $h(x) = g(x) \times g(-x)$.
On arrive à $h\,'(x) = 0$. Donc h est une fonction constante. (Ici, il faut lire que la fonction est nulle pour toutes les valeurs données à x. Ce n'est pas évident pour les élèves qui ont une vision ponctuelle.)
Or, $h(0) = 1$. Donc, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$.
Autrement dit, il **n'existe pas** de $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$.

On pose maintenant $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Puis on procède comme avant.
(Il devient envisageable de laisser la suite de la démonstration à la charge des élèves).

Théorème : La fonction exponentielle est strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. (attention c'est particulier ici !)

Exercices

> Exercice du type : dériver $f(x)=(x-7)\exp(x)$ et variations de *f.*

> Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

on utilise $h(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$ et cela revient à une démo déjà vue.

> Tracer par symétrie la fonction f(x)=exp(-x). Déterminer le dérivée de *f* graphiquement puis algébriquement. (Travail sur les deux registres : deux paradigmes AG et AC)

> ne pas parler de l'équation fonctionnelle, éviter les exercices $\exp(3)\times\exp(5)=\exp(8)$.

PARTIE 2 Recherche d'une nouvelle notation

Théorème : La fonction exponentielle est une fonction puissance, une fonction qui vérifie, pour toute valeur donnée à *x* et *y*, l'égalité $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

*Démonstration :

Soit $y\in\mathbb{R}$ un nombre fixé.
On pose $h(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. (déjà vu $\exp(y)\neq 0$)
h est dérivable sur $\mathbb{R}$, $h'(x)=\dfrac{\exp(x+y)'}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=h(x)$.

De plus, $h(0)=1$.
Par unicité, la fonction *h* est la fonction exponentielle.

Ainsi, $h(x)=\exp(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Ce qui donne, $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

Notation : l'image de 1 par la fonction exponentielle est notée **e**.

On peut écrire que $\exp(2)=\exp(1+1)=\exp(1)\times\exp(1)=e\times e=e^2$ …
De plus, $\exp(-1)\times\exp(1)=\exp(-1+1)=f(0)=1$ d'où $\exp(-1)=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$.

3/ Fonctions de la forme $f(x)=e^{ax+b}$

COURBES

Exercice : $e^{2x}=e^x\times e^x$ **en déduire la dérivée de** $f(x)=e^{2x}$
$e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ $(e^{-x})'=\dfrac{-1}{e^x}$

Théorème : La dérivée de la fonction $f(x)=e^{ax+b}$ **,** où $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ est $f'(x)=ae^{ax+b}$ **.**