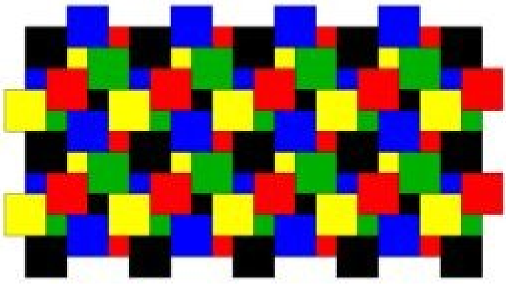
Le carré insécable



Introduction

L'activité a été construite et expérimentée à tous les niveaux du secondaire et à l'université par le groupe SiRC de l'IREM de Grenoble.

Le problème général

Il s'agit de paver des grilles carrées de côté n unités (où n est un entier), nous dirons de taille n, avec des carreaux de forme carrée de tailles entières strictement plus petites que n, de manière à ce qu'il n'existe aucune droite horizontale ou verticale traversant la grille sans intersecter au moins un carreau du pavage. Un tel pavage sera dit insécable.

On se pose les deux problèmes suivants :

P1. Pour quelles tailles de grille peut-on construire un pavage insécable ?

P2. Quel est le nombre maximal de carreaux permettant d'obtenir un pavage insécable d'une grille de taille n ?

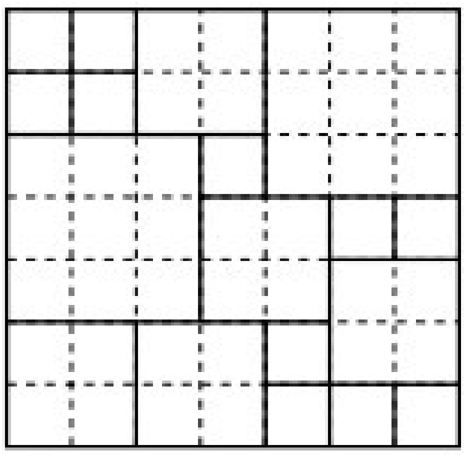


Figure 1: Un exemple de pavage insécable :
la grille de taille 7 pavée avec 18 carreaux (deux de taille 3, 5 de taille 2 et 11 de taille 1)

Matériel pour la situation

Il se compose d'un plateau carré gradué et de carreaux de tailles 1 à 9 en nombre suffisant.

Organisation didactique

La résolution du problème P1 peut faire l'objet d'une activité d'une heure à une heure et demie. Le problème P2 pourra être abordé dans une seconde séance.

Gestion

On peut répartir les élèves en petits groupes de 3 ou 4 par plateau. Il n'est pas inutile de prendre le temps de s'assurer que la notion de pavage insécable a été comprise. Un pavage insécable ne peut, contrairement à une tablette de chocolat classique (carrée), être cassé sur toute une longueur. Signalons une façon de gérer qui a toujours son succès : l'animateur trace deux colonnes au tableau, l'une pour la taille de la grille, l'autre pour le nombre de carreaux utilisés ou la réponse « impossible » selon les cas. Les élèves viendront remplir ces colonnes à chaque résultat obtenu. Cela suscite à coup sûr une émulation entre les groupes.

Cheminement expérimental

Pour se familiariser avec la situation, on peut commencer par s'intéresser aux grilles de taille 7 et 8. Celles-ci admettant plusieurs pavages insécables, il est relativement facile d'en trouver un. Une fois mis en commun les résultats obtenus par les élèves, on leur demande de trouver des solutions pour les autres tailles de grille entre 2 et 10. Puis, pour des tailles plus grandes, on pourra leur suggérer de s'inspirer de ce qu'ils ont produit pour chercher des généralisations. Pour les tailles jusqu'à 4, on constatera qu'il n'existe pas de pavage insécable. Cela peut se justifier par exhaustivité des cas, l'énumération de cas pouvant être simplifiée par l'observation suivante : pour un pavage insécable de taille n, il n'est pas possible d'utiliser des carreaux de tailles $n-1$ ou $n-2$. Il arrive fréquemment que cette observation soit faite par les élèves. Pour le problème P2, en cas de blocage, on peut orienter le cheminement des élèves en leur suggérant de réaliser des pavages avec des carreaux de tailles les plus petites possibles.

Résolution mathématique

Problème 1

On peut construire un pavage insécable pour toute grille de taille au moins 5. Pour les grilles de taille au plus 4, on ne peut pas. Pour le cas $n \geq 5$, on remarque d'abord qu'il existe exactement deux grilles insécables pour la taille $n=5$, symétriques l'une de l'autre, comme illustré en figure 2.

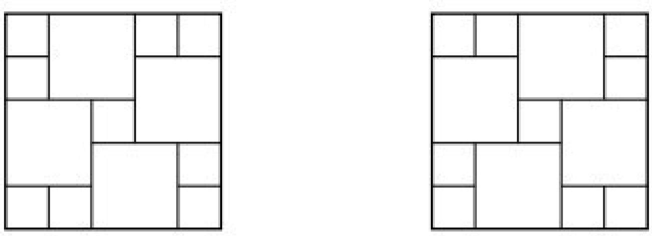


Figure 2: Les deux pavages de la grille de taille 5

Plusieurs raisonnements permettent de construire un pavage insécable pour tout $n \geq 5$: par récurrence (figure 3 gauche) ou par implication directe (figure 3 droite).

À partir d'une grille insécable de taille n, on peut aussi construire par homothéties des grilles insécables de toutes tailles multiples de n. On obtient ainsi des pavages utilisant tous le même nombre de carreaux.

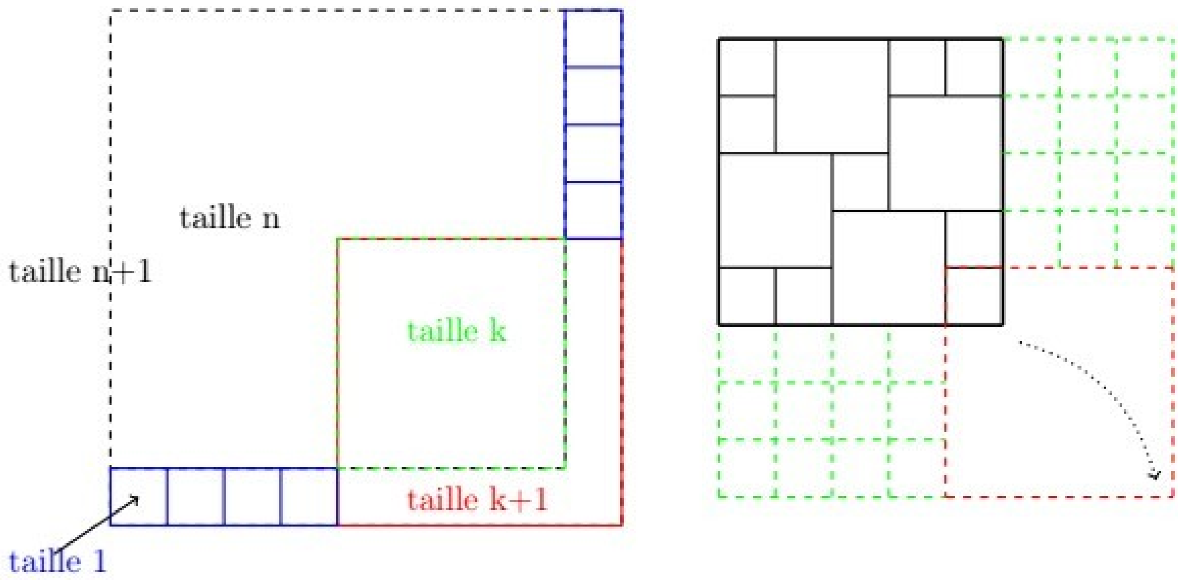


Figure 3: Deux méthodes pour agrandir une solution

Pour traiter le cas $n \leq 4$, on commence par observer la propriété suivante : dans un pavage insécable d'une grille carrée de taille n, il n'y a pas de carreaux de taille $n-1$ ou $n-2$. En effet, les trois positions possibles d'un carreau de taille $n-2$, à symétrie près, sont représentées dans la figure 4. Dans chaque cas, le pavage ne peut être complété en pavage insécable.

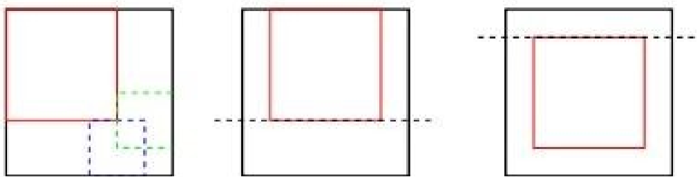


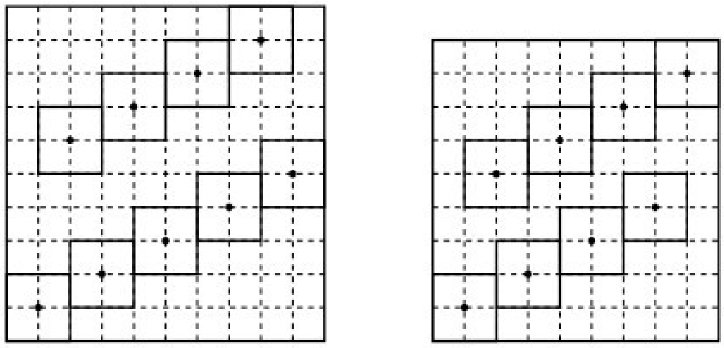
Figure 4

Ainsi, pour $n \leq 4$, on ne devrait utiliser que des carreaux de taille 1, ce qui donnerait des pavages sécables.

Problème 2

Un pavage insécable d'un carré de taille n contient au plus n^2-3n+3 carreaux. Cette borne est atteinte pour tout $n \geq 5$ par au moins un pavage.

On peut toujours construire un pavage insécable formé uniquement de carreaux de taille 1 et 2, comme l'illustre la figure 5. On bloque toutes les sécantes horizontales et toutes les sécantes verticales du carré initial avec $n-1$ carreaux de taille 2. On peut maintenant, sans mettre en danger l'insécabilité, compléter le pavage par $n^2-4(n-1)$ carreaux de taille 1. On a donc au total n^2-3n+3 carreaux. Ceci démontre que le nombre de carreaux est au moins n^2-3n+3. La démonstration que ce nombre est bien le maximum se trouve dans la brochure (cf. bibliographie).



Cas n pair. Cas n impair.

Figure 5. Une construction pour maximiser le nombre de carreaux.

Résultats expérimentaux

Pour P1, les élèves trouvent assez facilement des pavages insécables des carrés pour les tailles de 6 à 10 (limite du matériel). Pour $n=5$, il existe une solution unique à symétrie près. De ce fait, elle est difficile à trouver et certains élèves vont même conjecturer qu'il n'y en a pas. Quand on pose la question des pavages pour des carrés de taille plus petite, la non-existence est facile à établir pour les tailles 2 et 3. Pour la taille 4, on peut démontrer par exhaustivité des cas et arguments de symétrie qu'il n'existe pas de pavage insécable. L'argument de l'exhaustivité des cas n'est pas toujours formulé.

Les pavages pour $n>10$ peuvent être traités ensuite si le temps le permet. Les élèves peuvent choisir de continuer à résoudre P1 dans le cas général. Mais ils peuvent aussi faire le choix de passer à P2.

P2 est un problème d'optimisation discrète : il s'agit de maximiser le nombre de pavés. Certains élèves vont utiliser assez naturellement des carreaux de taille 2×2. La stratégie consiste alors à construire un pavage en s'assurant de l'insécabilité locale au fur et à mesure que l'on place les pavés. Les élèves identifient bien qu'il vaut mieux ne pas mettre deux carreaux 2×2 sur la même ligne et la même colonne. Cette idée d'adaptation locale est parfois vraie et peut être discutée.

Les pavages proposés ne sont pas forcément optimaux. Ils donnent un minorant du nombre cherché. Établir qu'on a bien trouvé le maximum est plus difficile. À partir d'un pavage, on peut être amené à modifier complètement le motif pour réussir à ajouter un ou plusieurs petits carreaux.

Dans cette situation, obtenir la solution n'est pas l'unique objectif ni l'unique résultat intéressant, la recherche de résultats partiels induit une activité mathématique suffisante.

De manière générale, les arguments de symétrie sortent facilement dans les deux problèmes. Le fait qu'on ne peut pas mettre de carreau de taille $n-1$ apparaît souvent, un peu moins pour le carreau de taille $n-2$.

Connaissances et compétences

Connaissances mobilisées et visées

exploration du carré ; notions de pavage et de pavage insécable ; symétries et homothéties (agrandissements) ; notion d'aire ; dénombrement ; notions de minoration et de maximum

Compétences mobilisées

- Chercher : expérimenter sur des cas particuliers, résoudre des petits cas, conjecturer et émettre des hypothèses pour les plus grands cas
- Raisonner : généraliser en explorant des figures, exploiter l'exhaustivité des cas, raisonner par récurrence ou par implication directe (déconstruction et reconstruction des objets)

- Représenter : se représenter le carré avec une grille intérieure, anticiper les conséquences de la position d'un carreau à un endroit précis, garder en mémoire les solutions trouvées (écrire, faire des dessins…)
- Communiquer : travailler en groupe, restituer par voie orale voire par rapport de recherche écrit, choisir le vocabulaire adapté, expliquer avec des figures

Bibliographie

- Brochure de l'IREM de Grenoble (2017): Situations de Recherche pour la classe pp 53-68.

  https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877

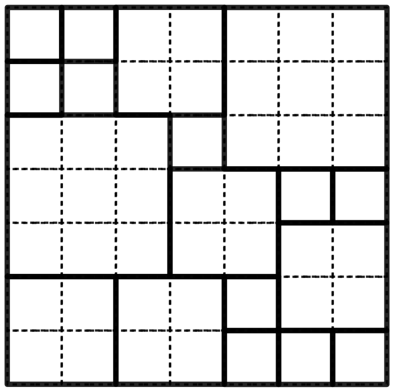
  On y trouvera, entre autres, une approche du problème du nombre minimal de carreaux nécessaires pour paver une grille de taille n.
- Revue Petit x,IREM de Grenoble, n° 109, pp. 46-48. Et si on remplaçait les carrés par des cubes?

Le carré insécable

On propose de paver une grille carrée avec plusieurs carreaux eux-mêmes carrés, de telle manière qu'il ne soit pas possible de la couper horizontalement ou verticalement sans couper un carreau. Un tel pavage est appelé insécable.

Exemple.

Voici une grille carrée 7×7 pavée par 18 carreaux (deux carreaux 3×3, cinq carreaux 2×2 et onze carreaux 1×1). Vous pouvez vérifier que toutes les droites horizontales ou verticales rencontrent un carreau du pavage.



Essayez de paver des grilles carrées de différentes tailles.

On pose deux questions :

Question 1. Pour quelles tailles de grille peut-on construire un pavage insécable ?

Question 2. Pour une grille d'une taille donnée, quel est le plus grand nombre de carreaux que l'on peut utiliser pour faire un pavage insécable ?

Matériel : un plateau avec des dessins de grilles carrées et des carreaux de différentes tailles.