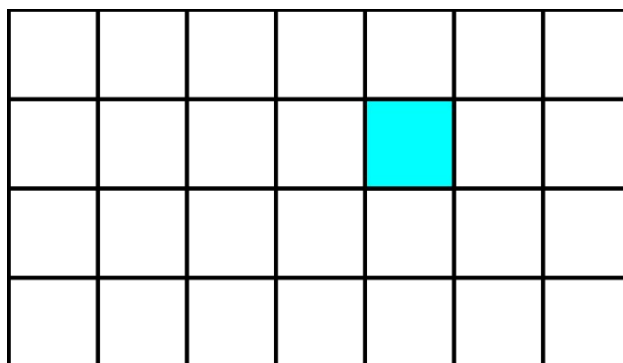


Jeu du chocolat

L'objectif de cette situation de recherche pour la classe est d'établir une stratégie gagnante pour un jeu à deux joueurs (ou deux équipes de joueurs).

Le problème général

On joue sur une grille rectangulaire à mailles carrées, de dimensions entières quelconques, représentant une tablette de chocolat dans laquelle un des carreaux est remplacé par un morceau de savon. Chaque joueur, à tour de rôle, doit casser la tablette en deux, en une seule fois, soit horizontalement soit verticalement, puis prendre l'un des deux morceaux. Le perdant est celui qui se voit contraint de prendre – sinon de manger – le carreau de savon ! La question est de trouver s'il existe une stratégie gagnante, c'est à dire qui assure de gagner quel que soit le jeu de l'adversaire – pour toutes les dimensions de la tablette, et toutes les positions du carreau de savon.



Matériel pour la situation

Des stylos (de deux couleurs différentes) et des feuilles de papier quadrillées voire des ardoises quadrillées.

Organisation didactique

La résolution du problème général est complexe et nous proposons les versions suivantes. Il est conseillé de les traiter dans l'ordre.

- **Version A1.** Tablette de dimensions quelconques $M \times N$, carreau de savon dans un coin.
- **Version A2.** Tablette de dimensions $1 \times N$, carreau de savon n'importe où.
- **Version B.** Tablette de dimensions $M \times N$, M et N impairs et carreau de savon au centre.
- **Version C.** Tablette de dimensions $2 \times N$, carreau de savon n'importe où.

D'autres situations, avec des détails de résolution, sont données dans la brochure en référence à la fin de la fiche.

D'un point de vue pratique, la version A1 est abordable dès le CE2 et peut faire l'objet d'une séance d'une heure à une heure et demie. En fonction de l'avancement on pourra même envisager de finir avec la version A2. Il faudra au moins une séance supplémentaire pour espérer s'attaquer aux versions B et C. Ces deux dernières sont d'ailleurs plutôt à envisager en fin de collège ou en lycée.

Gestion

Nous proposons que les élèves soient répartis en petits groupes (de deux à quatre) pour favoriser le travail collaboratif. Des mises en commun sont à prévoir aux étapes clés de la situation.

Il nous semble important de **faire jouer les élèves** entre eux et même avec les encadrants ! Si chaque joueur utilise un stylo de couleur différente cela permet de suivre plus facilement l'évolution du jeu. Une numérotation des lignes de coupe peut aussi être envisagée.

Enfin, l'enseignant peut préciser que les feuilles de papier quadrillées permettent de tracer au choix des tablettes de tailles différentes.

Cheminement expérimental et éléments de résolution mathématique

Nous ne détaillons ici que le cheminement pour les deux premières versions. Les autres demandent une étude plus approfondie mais plus de détails peuvent être trouvés dans la brochure IREM en référence à la fin de cette fiche.

Assez vite, les notions importantes à dégager sont celles de **position gagnante** et de **position perdante**.

Plus précisément, on peut classer toutes les positions possibles du jeu en deux types, les positions gagnantes et les positions perdantes :

- une position est **gagnante** s'il existe un coup qui ramène le jeu dans une position perdante ;
- une position est **perdante** si tout coup à partir de cette position amène à une position gagnante.

La **stratégie gagnante** consiste alors à jouer, à partir d'une position gagnante, un coup donnant une position perdante. Elle peut être explicitée sous forme d'un mini algorithme (« si la tablette est de cette taille avec le carreau de savon à cet endroit, alors je joue comme ceci »).

On pourra amener ces notions en posant des questions du type : « pour quelles tailles de tablette n'avez vous pas du tout envie de commencer à jouer ? A l'inverse, quelles sont les tablettes sur lesquelles vous avez très envie de commencer à jouer ? » L'enseignant peut expliciter alors les significations de « il existe » et « pour tout ». En fonction du niveau, il peut aussi introduire les symboles des quantificateurs associés.

Version A1

En jouant, les élèves arrivent assez vite, parce que beaucoup de parties se terminent ainsi, à une première affirmation : « pour gagner, il faut arriver à donner à l'adversaire un carré 2x2 contenant le carreau de savon ». Souvent, en jouant à nouveau, ils arrivent ensuite à l'affirmation : « pour gagner, il faut donner un carré 3x3 à l'adversaire, ainsi on pourra le coup suivant lui donner un carré 2x2 ». En fait, ces deux affirmations sont fausses, on peut gagner sans passer par ces étapes, mais elles participent à l'élaboration de la stratégie gagnante.

Finalement, il apparaît que pour gagner à coup sûr, il faut donner, à chaque coup, un carré à l'adversaire. Autrement dit, la stratégie gagnante consiste à reconstruire un carré pour le donner à l'adversaire, quelle que soit sa dimension. On arrive ainsi à une tablette 1x1 ne contenant que le carreau de savon !

La démonstration de la stratégie gagnante est basée sur la propriété géométrique fondamentale suivante.

Lorsqu'on coupe un carré suivant une de ses dimensions, on obtient un rectangle non carré. D'autre part, on peut toujours couper un rectangle non carré suivant une de ses dimensions pour obtenir un carré.

Ainsi, si le rectangle n'est pas un carré, la position est gagnante. Le coup gagnant consiste à couper afin de donner un carré à l'adversaire. En revanche, si le rectangle est un carré, la position est perdante car le joueur est forcé de donner un rectangle non carré à l'adversaire.

Version A2

Les positions perdantes sont celles où le nombre de carreaux à gauche du savon est égal au nombre de carreaux à droite. Toutes les autres positions sont gagnantes. On pourra ici faire le parallèle entre cette version et la version A1 qui sont en fait équivalentes et se modélisent de la même façon : les positions peuvent être codées par un couple de nombres entiers.

Les versions B et C sont détaillées et analysées dans la brochure IREM. La version générale nécessite une modélisation du jeu et la notion de Nim-somme.

Connaissances et compétences

Compétences développées

- **Chercher.** C'est une activité de recherche qui demande d'expérimenter plusieurs parties pour essayer de dégager une stratégie gagnante.
- **Raisonner.** Lorsqu'on leur demande d'établir une stratégie gagnante, les participants mettent en place des raisonnements mathématiques de nature algorithmique.
- **Modéliser / Représenter.** Cette compétence est sollicitée lorsqu'on demande aux participants de travailler sur des tablettes de tailles quelconques ou lorsqu'ils sont amenés à faire le parallèle entre les situations A1 et A2. Dans les versions plus complexes, on peut modéliser les tablettes par des triplets ou des quadruplets.
- **Communiquer.** Celle-ci est développée par le travail en groupe et de possibles présentations des participants lors de mise en commun.

Connaissances mobilisées

- **Rectangle / carré.** Les notions de carré et rectangle et leur distinction sont cruciales dès la compréhension de la stratégie gagnante de la version A1 du problème.
- **Symétries axiale** (versions A1 et A2) **et centrale** (version B).

Connaissances visées

- **Stratégie gagnante.** C'est la notion centrale de l'activité. Elle se rapproche fortement de la notion d'algorithme.
- **Position gagnante / perdante.** Définies précédemment et fondamentales ici.
- **Récurrence.** Notion abordée lors des preuves que les stratégies sont effectivement gagnantes.

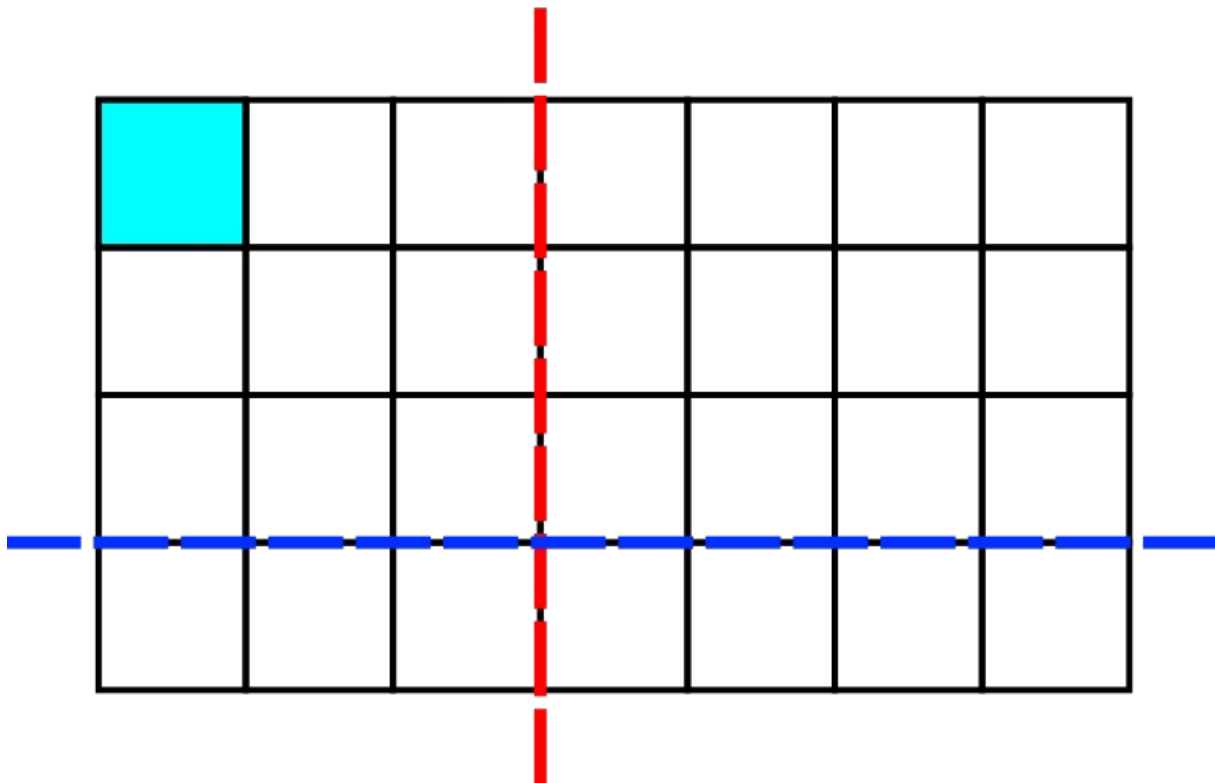
Pour aller plus loin

Brochure IREM

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=1530538318049>

Jeu du chocolat

Vous avez une tablette de chocolat de dimensions quelconques dont un carreau dans un coin est remplacé par du savon.



Chaque joueur doit, à tour de rôle, « couper » la tablette le long d'une ligne de coupe verticale ou horizontale et garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carreau de savon a perdu.

Existe-t-il une stratégie pour être sûr de gagner ?

Jeu du chocolat (2)

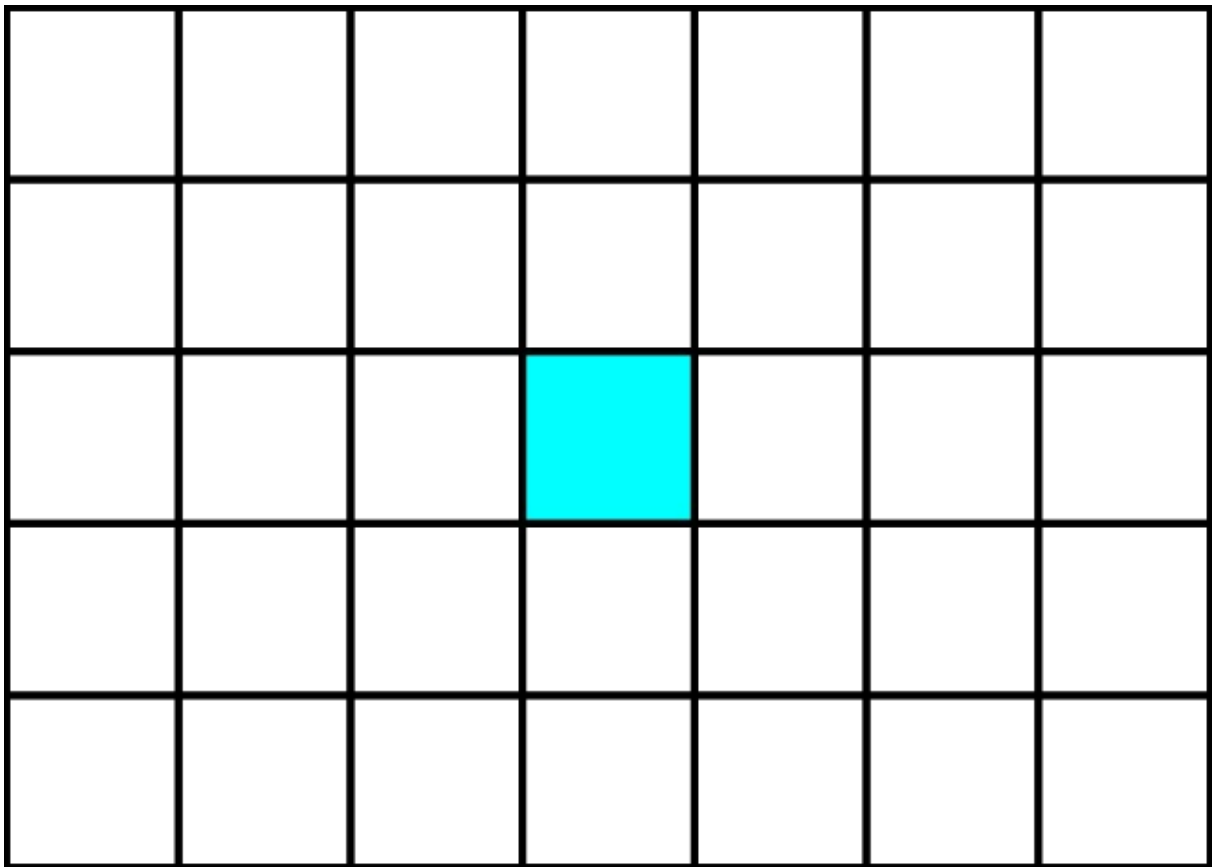
Le jeu est le même mais maintenant vous disposez d'une tablette d'une seule rangée de longueur quelconque mais cette fois le carreau de savon peut être n'importe où.



Existe-t-il une stratégie pour être sûr de gagner ?

Jeu du chocolat (3)

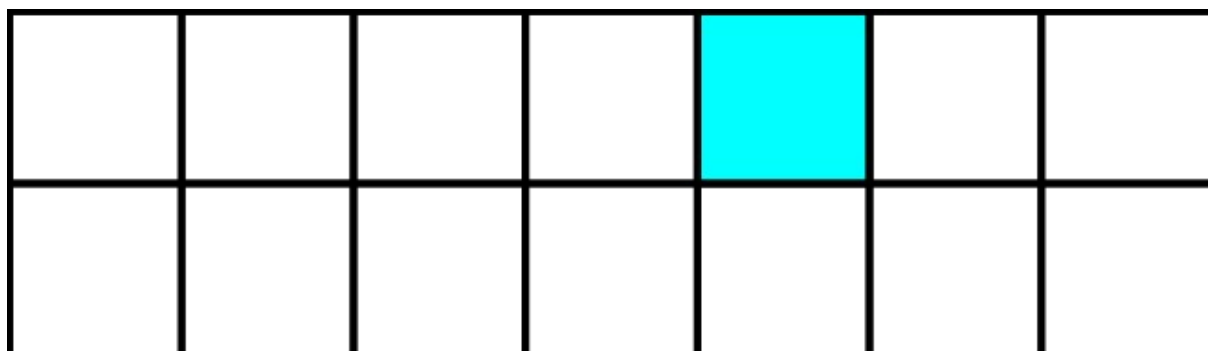
Maintenant la tablette est rectangulaire de dimensions impaires et le carré de savon est au centre de la tablette.



Existe-t-il une stratégie pour être sûr de gagner ?

Jeu du chocolat (4)

Dans cette version du jeu, la tablette rectangulaire a deux rangées de longueur quelconque. Le carreau de savon peut être n'importe où.



Existe-t-il une stratégie pour être sûr de gagner ?