REPERES - IREM. N° 36 - juillet 1999

LES SUJETS DE MATH DU BACCALAUREAT ES : LE JOUR DU BAC, TU FAIS LE CON

Martin ZERNER

1. Un accident ?

Juin 1996, sujet national, série ES, problème, partie C :

> "Une entreprise fabrique x milliers d'objets ($0 < x < 4$). Le coût de fabrication de tous ces objets, en milliers de francs, est supposé égal à f(x), où f désigne la fonction étudiée précédemment.
> Le coût moyen de fabrication d'un objet est, en francs : $m(x) = \frac{f(x)}{x}$."

Il n'y a donc pas de doute, f est bien le coût total. Son graphe a d'ailleurs été donné au début de l'énoncé et on y lit clairement que la fonction est strictement décroissante sur un intervalle [β,4], β valant environ 2,7. Fabriquer 3000 de ces objets coûte environ 6700 F, fabriquer 4000 des mêmes coûte deux fois moins cher. Ajoutons, pour faire bonne mesure, que la question finale demandait de rendre maximum le coût moyen. L'intérêt de le minimiser est discutable. Mais le rendre maximum ne peut strictement servir à rien. Sauf bien entendu dans le cadre d'un concours de connerie.

La première réaction de tout individu sain d'esprit est bien sûr de rigoler. Mais ce sujet a été choisi par une commission composée d'un enseignant chercheur des universités, président (il est vrai que celui-ci a vraisemblablement considéré qu'il était là pour la décoration), d'un IPR et de plusieurs professeurs enseignant en terminale ES. Il a ensuite été fait par un "professeur-cobaye", lui aussi enseignant en terminale ES. Enfin, il a été vérifié par un inspecteur général. Il faut croire que personne n'a tiré la sonnette d'alarme. Pour aggraver la chose, il n'y a pas eu, autant que je sache, de réaction après l'examen. La thèse de l'accident est décidément à rejeter.

On m'a dit, et on me dira sans doute encore, qu'après tout il n'y a pas grand mal. Les candidats et, chose plus importante, les futurs candidats qui feront ce problème en cours d'année savent depuis belle lurette que les mathématiques n'ont pas de rapport avec la réalité et que rien n'est étonnant quand on "est en mathématique". C'est apparemment aussi l'avis des auteurs de sujets de baccalauréat comme le montrera l'étude des sujets ordinaires, c'est-à-dire moins visiblement absurdes, à laquelle nous allons nous livrer. Mais alors, qu'est-ce que c'est que ces fameuses "mathématiques appliquées à l'économie et aux sciences sociales" ?

Tout enseignement contribue à la formation des acteurs de la vie sociale. De ce point de vue, ce sujet me paraît moins nocif que le sujet de statistique donné la même année. C'est un exercice sur la droite de régression, un des exercices types les plus souvent posés au baccalauréat et qui mériterait en tant que tel une étude à part. Ici les données sont les montants de la dette du tiers monde pour cinq années s'échelonnant de 1978 à 1992. Dernière question :

"2.c) Estimer, à 1 milliard de dollars près, le montant prévisible de la dette des pays du Tiers Monde en 2000."

Le problème est ici que si un expert s'aventurait à avancer une estimation aussi précise pour l'an prochain, on lui conseillerait, amicalement et avec tous les ménagements possibles, de se reposer et si ça ne passe pas, de se faire soigner. Le danger est que de faire des exercices pareils aide à s'imaginer que les économistes professionnels peuvent vraiment faire des prévisions fiables de ce type.

Assez paradoxalement, le risque semble particulièrement grand pour ceux qui feront de l'économie par la suite, comme on peut en juger, par exemple, par un récent article du *Monde* (13/11/98, p. 14) dû à un M. Salin, professeur d'économie à Dauphine. Il n'est pas possible ici d'analyser les fautes grossières de raisonnement et de faits qu'on y trouve. Contentons nous de dire que quand il parle des principes admis par tous les économistes, il s'agit en fait des "orthodoxes" qui se rattachent plus ou moins à l'école néoclassique. Il existe encore heureusement des économistes professionnels qui refusent de se couler dans ce moule. Et résumons l'article en trois phrases. Il faut faire payer les pauvres. Ils s'en trouveront plus riches. Quiconque met en doute les deux affirmations précédentes fait preuve d'obscurantisme. Le tout sur un ton d'une arrogance rare.

Les enjeux étant ainsi posés, nous allons nous lancer dans une étude un peu plus précise des sujets à prétention économique et sociale. Au préalable, un petit détour théorique s'impose.

2. Mathématisations et habillages

Contrairement à l'usage, j'éviterai de parler de modélisation. Il s'agit d'un néologisme apparu dans les années 1970 dans un contexte fortement idéologique. L'idée implicite est qu'il existe une méthode générale d'application des mathématiques au réel. Pour prendre les deux domaines-clefs, la démarche serait la même en physique et en économie, ce qui est complètement faux, quelle que soit l'école d'économistes considérée. Néologisme pour néologisme, parlons plutôt de mathématisation, acte de faire du mathématique avec du non mathématique. Et employons le pluriel pour éviter de confondre des types de mathématisations différents.

En gros, et sans que les frontières soient toujours très nettes, nous sommes amenés à en distinguer trois. Il y a d'abord les mathématisations directes, celles qui ne demandent, en dehors des mathématiques nécessaires, que des connaissances communes. Exemple : quelles sont les dimensions exactes d'une feuille de papier A4 dite 21×29 ? (données : la feuille A0 a une surface de 1m^2, la feuille A(k + 1) s'obtient en coupant la feuille Ak en deux, et enfin les feuilles Ak sont toutes semblables, de sorte qu'on peut par exemple en photocopier une sur une autre avec réduction ou agrandissement selon le cas). Il y a ensuite la mathématisation des sciences expérimentales, un long processus historique dont la physique est, c'est bien connu, le cas le plus achevé. Il y a enfin la mathématisation des doctrines informes (1), typiquement les sciences sociales, économie comprise. Le risque est ici énorme qu'une mathématisation prématurée masque le flou des concepts, voire leur caractère fantasmagorique (2). Faire ces distinctions, c'est faire apparaître dans tous les cas la nécessité de connaissances et d'une réflexion spécifiques sur l'objet à mathématiser. C'est faire apparaître aussi que la compréhension des concepts mathématiques est plus importante que la technique (les fameux savoir-faire).

L'habillage est en quelque sorte l'opération inverse de la mathématisation. On part cette fois d'une situation mathématique et on lui cherche une contrepartie concrète, un peu comme un peintre qui, ayant peint dans son atelier un paysage partirait avec son tableau à la recherche du paysage qu'il a peint (l'image est je crois d'Hadamard). Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci exprimée en termes de générations de petits lapins. L'habillage peut être un outil d'enseignement précieux à deux conditions l'une et l'autre indispensables. La première est que la situation plus ou moins concrète fasse sens, c'est-à-dire qu'elle parle à l'imagination des élèves. La deuxième est que son caractère fictif ne fasse de doute pour personne.

L'habillage est en général mal adapté à la situation d'examen. Les candidats sont pressés par le temps et peu en état de réfléchir à une situation nouvelle. Les situations mathématiques à habiller se réduisent le plus souvent à un petit nombre d'exercices types. Quelques formules rituelles jouent alors le rôle de poteaux

(1) L'expression vient de Canguilhem G. (sous la direction de) (1972) *La Mathématisation des Doctrines informes*, Hermann, Paris. Ce sont les actes d'un colloque portant le même titre.

(2) Je me permets de renvoyer ici à l'exposé que j'ai fait à la 8e école d'été de didactique des mathématiques : M. Zerner (1996) "Explication d'un modèle économique". *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

indicateurs sur lesquels on lit la formule à appliquer. Sans compter qu'il se crée assez vite un petit stock d'habillages standard. Il est bon d'ajouter qu'il est souvent difficile, à la lecture d'un sujet, de décider s'il s'agit d'une mathématisation manquée ou d'un habillage. Prenons comme exemple un type d'exercice de probabilité fréquemment proposé au baccalauréat. Début d'un exercice posé en juin 97 dans les centres étrangers (groupe 1) :

> "Dans une classe de 30 élèves, 14 sont des filles. Par ailleurs 8 filles et 4 garçons sont internes. Les autres élèves sont externes. On choisit un élève au hasard dans cette classe."

Voilà certes une expérience aléatoire correctement décrite (et on sait trop bien que ce n'est de loin pas toujours le cas). Mais pourquoi diable a-t-on décidé de choisir un élève au hasard ?

Un autre genre à la fois utile et dangereux est le problème d'application à données fictives. Les conditions indispensables sont ici que l'auteur ait une idée claire de ce qu'il veut faire comprendre et que les données y soient appropriées. On verra dans une annexe comment le problème national de juin 98 violait ces conditions et aurait pu aisément satisfaire au moins la deuxième.

3. Retour aux sujets de baccalauréat : un tour d'horizon

Les programmes des classes de première et terminale ES comportent donc en lieu et place de mathématiques des "mathématiques appliquées à l'économie et aux sciences sociales". Quoi que cette expression veuille dire (par exemple rien), les auteurs de sujets de baccalauréat l'ont prise au sérieux.

Recensons les sujets donnés dans les cinq groupes d'académies en juin 95 en y ajoutant les "annales 0". Dans tous, les candidats avaient à traiter au moins un exercice ou un problème à prétention d'application économique ou sociale.

Sur 8 exercices de probabilité, 3 peuvent relever de l'économie, de la gestion ou de la sociologie si ce ne sont pas de simples habillages. 4 exercices et un problème de statistique ont été donnés ; 3 portent sur des calculs de droites de régression ; 1 relève de la démographie, 3 de l'économie ou de la gestion' 1 à la fois de la sociologie et de l'économie (crise de la presse écrite). Le problème (Etranger, juin 95), soit dit en passant, serait à considérer comme un monument à la stupidité humaine si on oubliait un seul instant que l'auteur collectif s'est soucié comme d'une guigne du sens de ce qu'il écrivait [3]. On trouve 1 exercice

(3) Ce problème demande d'étudier un équilibre de marché. La théorie correspondante est la suivante. On suppose une fonction d'offre : elle donne en fonction du prix proposé la quantité totale que les producteurs sont disposés à vendre à ce prix. On suppose aussi une fonction de demande : ce que les acheteurs sont disposés à acheter. Il y a équilibre lorsque ces deux quantités sont égales. Ces notions n'ont donc de sens qu'à l'échelle d'un ensemble économique assez vaste. Dans ce problème le prix d'équilibre est 1,10 F/kg et la quantité produite environ 1700 kg ! Tout lecteur qui ne serait pas encore persuadé de l'absurdité de la chose est invité à faire l'exercice suivant. On suppose que les 1700 kg sont la production quotidienne (l'énoncé ne le dit pas et l'unité de temps généralement utilisée dans ce contexte est l'année). Combien peut-on payer de salariés au SMIC (déclarés à la sécu) avec le produit de la vente ?

et 2 problèmes d'analyse avec prétention d'application à l'économie ou à la gestion (4) dont 1 sur une fonction coût de production. Enfin il y a un exercice de calcul d'intérêt.

J'ai complété ce recensement par l'examen d'*Annabac Hatier 98* en me limitant aux sujets dont je pouvais être sûr qu'ils avaient effectivement été retenus pour le baccalauréat (les annales d'Hatier sont assez mal faites de ce point de vue). L'aspect général se confirme avec deux nuances. Il y a toujours au moins un sujet à prétention économique ou sociale. Les exercices de probabilité sont toujours très nombreux, mais parmi eux la prétention à une application économique ou sociale est plus fréquente. Suivent par ordre décroissant les exercices de statistique. Parmi eux les calculs de droites de régression sont en majorité écrasante (5). Enfin parmi les problèmes et exercices d'analyse avec application, les études de fonctions coût de production sont en grande majorité.

En somme deux séries de sujets types se dégagent : les calculs de droites de régression et les études de fonction coût de production. C'est sur ces dernières que nous concentrerons principalement notre intérêt.

4. Du côté des sciences économiques et sociales (SES)

Il paraît naturel de confronter l'enseignement de "mathématiques appliquées à l'économie et aux sciences sociales" à celui des dites sciences. Le programme de terminale (6), beaucoup plus bref que celui de mathématiques, se présente comme on peut le voir page suivante.

Le programme de spécialité ajoute l'étude d'un ou plusieurs auteurs sur chacune de ces questions, quatre sociologues et onze économistes. Le spectre de ces auteurs est très large, de Karl Marx à Milton Friedman.

C'est donc un programme ambitieux et remarquablement dégagé de l'idéologie économique lourdement dominante (le courant néoclassique et ses dérivés). Ce deuxième point nous amène à penser que l'économie mathématisée y joue au plus un rôle très effacé. Impression confirmée du fait que ni Cournot ni Jevons ni Walras ne figurent au programme de spécialité. En effet les économistes de ce courant sont ceux qui poussent le plus loin la mathématisation de l'économie. Cette mathématisation est d'ailleurs un puissant outil de mystification. Le commun des mortels étant incapable de lire leurs articles (même ceux qui ont un bagage très raisonnable de théorie économique) ne peut pas comprendre leurs hypothèses et leurs raisonnements. Il en est réduit à leur faire confiance sur parole et sur leur qualité d'experts (7). Il faut préciser que, à l'exception importante près des sujets de statistiques, les énoncés de mathématique à prétention économique se situeront à peu près automatiquement dans l'ambiance

(4) Economie : étude de la production, de la circulation et de la consommation des biens à l'échelle de la société. Gestion : ensemble de techniques qui permettent de prendre des décisions à l'échelle d'une entreprise.

(5) Rien d'étonnant à cela puisque ces exercices consistant essentiellement en calculs simples et mécaniques sont excellents pour les statistiques (des résultats du bac).

(6) Il se peut qu'il y ait eu une modification très récente dont je n'ai pas connaissance. De toute façon le programme ici considéré correspond aux mêmes années que les sujets de mathématique.

(7) Je me permets ici encore de renvoyer à l'exposé que j'ai fait à la 8e Ecole d'été de didactique des mathématiques (note 2).

Introduction générale : indicateurs et tendances

– L'évolution à long terme de la production, de la consommation et du niveau de vie.
– L'évolution à long terme de la population active et des structures sociales.

Les facteurs économiques de la croissance et du développement

1. *Les hommes*

– Population et travail
– Travail et emploi

2. *L'accumulation : investissement et capital*

3. Progrès technique et innovations

4. L'ouverture internationale

– Libération des échanges et développement.
– Protectionnisme et développement.
– Le règlement des échanges et l'endettement.

Les processus du changement social

1. *Changement et solidarités sociales*

– Division sociale du travail et intégration.
– Lien social et exclusion.

2. *Changement et conflits*

– La transformation des forces productives et les conflits sociaux.
– La diversité et l'institutionnalisation des conflits.

3. *Changement et valeurs*

– Systèmes de valeurs et sociétés modernes.
– L'émergence et l'apprentissage des valeurs.

4. *Démocratie et inégalités*

– Idéal égalitaire et inégalités économiques et sociales.
– La stratification et la mobilité sociales.

Crises, régulation et dynamique du développement

1. *Crises et politiques économiques et sociales dans les pays développés*

– Fluctuations et crises.
– Les analyses de la crise.
– Les politiques.

2. *Mutations et spécificités dans les pays en développement*

– La dimension internationale de la crise dans les PED.
– Les spécificités socio-politiques de la crise.

néoclassique. Il serait trop long d'en développer les raisons dans le cadre de cet article mais l'examen des sujets le confirme (aux fonctions de coût de production, il faut ajouter celles d'offre et de demande).

Cela dit, ce programme est un squelette. Pour me rendre compte de ce qu'il y avait autour, j'ai encore recouru aux sujets de baccalauréat (*Annales bac 98*, Vuibert). Les candidats ont le choix entre une dissertation et une "question de synthèse". Les sujets sont très généraux : "Vous analyserez les effets de la division technique du travail." (dissertation), "Montrez que le progrès technique peut avoir des effets négatifs, mais aussi positifs sur l'emploi." (question de synthèse), "Après avoir présenté les transformations de la famille depuis une trentaine d'années, vous montrerez qu'elle reste un facteur essentiel d'intégration sociale." (question de synthèse)...

Mais chaque sujet est appuyé sur une série de documents. La question de synthèse comprend une première partie qui consiste en une série de questions posées sur les documents et destinées à préparer la synthèse proprement dite.

Parmi les documents présentés l'un au moins, souvent plusieurs, présentent des données quantitatives sous forme graphique ou numérique. Certains de ces graphiques et tableaux m'ont d'ailleurs paru de lecture un peu difficile. On peut en déduire facilement les capacités plus ou moins mathématiques qui peuvent aider de très très loin le mieux le candidat dans son épreuve de SES. Ce sont l'étude qualitative mais détaillée d'une série de nombres ou d'un graphe, la recherche des recoupements qui permettent de vérifier la compréhension qu'on en a, celle des calculs simples qui permettent de dégager des indicateurs significatifs. Malheureusement les sujets de mathématiques qui les favorisent sont rarissimes (par exemple l'exercice de statistique pour non spécialistes donné en juin 97 en Amérique du Nord [(8)]) et un certain nombre contribuent à les tuer, par exemple le sujet de juin 98 étudié en annexe.

5. Les fonctions coût de production

Et nos chères fonctions coût de production ? Elles figurent au programme de SES de première ES où elles semblent jouer un rôle très effacé. Je ne les ai retrouvées dans aucun des 16 sujets de baccalauréat dont j'ai vu le corrigé et je ne vois pas comment elles pourraient intervenir dans l'un quelconque des 7 dont je n'ai que l'énoncé.

Au fait, de quoi s'agit-il ? La question peut paraître stupide, puisque chacun comprend la phrase : "Le coût de production de tant d'objets dans telle usine [(9)] est tant." Les choses se compliquent dès qu'on se pose la question : pourquoi étudier une fonction coût de production.

La première question à se poser est :

(8) Malheureusement ce sujet demande aux candidats de longues manipulations graphiques et numériques pour 4 malheureux points. C'est un problème général puisqu'une étude statistique un peu sérieuse demande des séries assez longues, tellement longues qu'il est peu raisonnable de demander de les étudier dans un examen. Une solution (d'ailleurs partiellement employée dans ce sujet) serait de fournir aux candidats les résultats des opérations les plus longues (nuage de points, moyennes, variances).

(9) "usine" : les énoncés de math emploient là le mot "entreprise", plus chargé idéologiquement et inexact ; une entreprise peut avoir plusieurs usines où les coûts de production sont différents.

est-ce à des fins de gestion ou de théorie économique ? Si c'est à des fins de théorie économique on se trouve automatiquement dans le cadre du courant néoclassique ou d'un de ses dérivés (10). Il est vrai que ce courant, qui sert fort souvent à justifier les politiques économiques ultra-libérales, domine largement les institutions universitaires, gouvernementales et internationales (*cf.* l'article du *Monde* déjà cité). Jusqu'à plus ample informé, cela ne donne pas plus de scientificité à ses hypothèses de base et, quoi qu'il en soit, on vient de voir qu'il n'a qu'une part limitée dans le programme de SES. La lecture des sujets de mathématique portant sur une fonction coût de production et de quelques autres entraîne la conviction que leurs auteurs ignorent la distinction entre gestion et économie. Ceux qui donnent la précision parlent d'application en économie. Ils se placent ainsi (sans le savoir bien sûr) dans le cadre d'une de ces hypothèses de base du courant néoclassique. L'étude de l'économie est basée sur celle du comportement individuel des agents économiques (11) ; et le fait que chacun de ces agents poursuit ses propres intérêts assure au mieux le bien être général.

Une deuxième question est liée à une autre hypothèse de base de l'économie néoclassique, celle des rendements décroissants à l'échelle. Cette hypothèse est que les fonctions coût de production sont convexes. En d'autres termes, le coût marginal (coût entraîné par la fabrication d'une unité supplémentaire du produit) augmente avec la quantité produite La question qui se pose est : s'agit-il d'une production en cours ou d'un projet ? Dans le premier cas l'hypothèse est plausible : par exemple, une production plus intense peut entraîner une usure plus rapide des machines et l'obligation de payer des heures complémentaires (la fonction coût de production ne sera alors pas dérivable). Dans le deuxième cas, elle peut être lourdement fausse. On s'en rend aisément compte en pensant à deux procédés de production dont l'un assure un coût unitaire plus bas moyennant un investissement plus élevé. Si C_1 et C_2 sont les fonctions coût de production correspondant à ces deux procédés, la fonction à considérer sera $C = \min.(C_1,C_2)$. On aura $C_1(0) > C_2(0)$, $C_1' < C_2'$ et C ne sera pas convexe en général.

La plupart des sujets de coûts de production que j'ai vus (5 sur 7) violent l'hypothèse des coûts décroissants à l'échelle. Nous allons voir que la raison pour laquelle elles le font manifeste une fois de plus le profond mépris de leurs auteurs pour le sens de leurs données (fictives). Un point est indiscutable : les fonctions coût de production sont strictement positives à l'origine. C'est-à-dire que même si la production s'arrête, il faut amortir locaux et machines, les entretenir, payer du personnel permanent... Dans les 5 sujets ci-dessus mentionnés la fonction coût de production s'annule à l'origine. Deux d'entre eux demandent de calculer le coût moyen minimal et un, comme il a été dit au début de cet article, le coût moyen maximal. Si C est la fonction coût de production, le coût moyen est $C(x)/x$ (la pente de la droite joignant le point du

(10) La meilleure initiation à l'économie néoclassique que je connaisse est B. Guerrien (1989) *L'économie néoclassique*, Paris : La Découverte. Une satire facile à lire et amusante est R. Passet (1995) *Une Economie de Rêve*, Paris : Calmann-Lévy. Toutefois le lecteur risque de la trouver exagérée... sauf s'il connaît un peu l'économie néoclassique et y a réfléchi.

(11) C'est ce qu'on appelle l'individualisme méthodologique.

graphe à l'origine), et si C est convexe et nulle à l'origine, il est facile de vérifier qu'il est croissant, donc minimum en zéro et maximum à l'extrémité droite de l'intervalle permis. Contre-épreuve : les deux autres fonctions coût de production sont à la fois strictement positives à l'origine et convexes.

On trouvera une étude plus détaillée d'un de ces problèmes en annexe.

6. Des remèdes ?

Il y a un remède évident : donner aux enseignants de mathématique, au moins à ceux qui enseignent dans la série ES, une assez forte formation en économie et sciences sociales. Martin réveille toi, tu es en France et nous sommes en 1999. As-tu oublié le silence radio de l'Inspection Générale quand tu leur as suggéré qu'on pourrait mettre un enseignant de SES dans la commission de choix des sujets ?

Il faut donc faire avec les moyens du bord. Marginalement, on peut participer à une commission de choix de sujet (encore faut-il que l'occasion se présente), organiser des stages de formation continue (pas facile) et des activités d'IREM (je suis à votre disposition). Lorsque c'est possible, le travail avec un ou plusieurs collègues de SES peut naturellement être très fructueux, à condition qu'ils ne soient pas eux-mêmes frappés des maladies de la mathématisation irréfléchie et du tout néoclassique qui vont ensemble.

Il ne saurait être question d'éliminer les exercices de statistique (et un petit nombre d'exercices de probabilité) portant sur des sujets économiques et sociaux. Encore faudrait-il chaque fois réfléchir aux questions posées et se débarrasser du fétichisme du coefficient de corrélation. Je rappelle l'importance de la réflexion qualitative sur un tableau de données numériques ou un graphique. L'étude critique de sujets peut être très instructive. Je suggère par exemple un travail sur l'évolution des prestations sociales pour laquelle un exercice donné à Paris en juin 97 fait faire un ajustement affine qui paraît excellent (12) ; faites quand même refaire tout l'exercice avec un ajustement exponentiel.

Pour le reste, il est grand temps de se limiter à des sujets de mathématique sans prétention d'application à l'économie ou aux sciences sociales. Et tant que ce n'est pas fait, il est impératif de donner aux élèves la consigne : le jour du bac, tu fais le con.

(12) En particulier, la différence entre les données ajustées et les données réelles sont toujours négligeables devant la dette patronale à la sécu.

Annexe : deux problèmes commentés

Les défauts de ces problèmes sont peut-être un peu plus gros que d'habitude, mais ils sont typiques.

Sujet national, juin 1998

"Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985."

Nous sommes prévenus : il s'agit de données concoctées *ad hoc*, sinon on nous dirait quel pays.

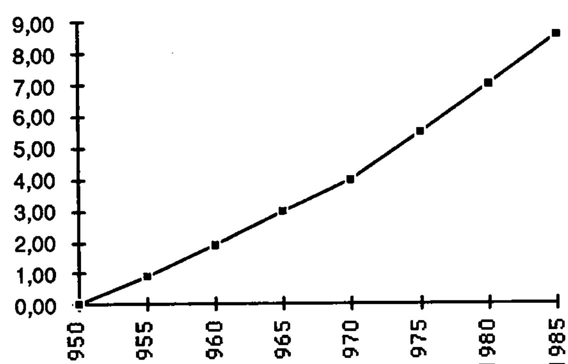
"t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Rang t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

A. Exploitation des données - Recherche d'un modèle."

Cet énoncé est novateur : c'est le premier qui fait un grand usage du jargon de la modélisation ("modèle" 3 fois, "modélisation" et "modéliser" une fois chacun). Sur le fond, aucune phase de la modélisation n'est demandée aux candidats.

La question A1 dit au candidat de représenter le nuage de points. Rien ne sera fait ensuite de ce nuage. Le voici (l'échelle n'est pas celle de l'énoncé et les ordonnées ont été diminuées de 8 par commodité, peu importe) :



Comme toujours, s'agissant d'une série chronologique, il ne ressemble en rien à un nuage. Il ne ressemble pas non plus au graphe (décalé vers le bas) d'une exponentielle. Mais il ressemble vraiment beaucoup à deux segments de droite (13). Ce qui pose deux questions intéressantes (on oublie en ce moment que les données sont fictives). D'abord pourquoi l'évolution est-elle affine pendant chacune des deux périodes ? Grossièrement, sur le court terme et en l'absence de choc démographique important (guerre, progrès médical exceptionnel, etc.) l'accroissement de la population est exponentiel. Il est facile d'en comprendre la raison. D'ailleurs les candidats l'ont étudié en SES et ceux qui ont pris SES comme spécialité connaissent Malthus. L'autre question est : que s'est-il passé autour de 1970 qui a modifié les caractéristiques de la population ? C'est le genre de questions que les candidats devraient se poser dans un sujet de SES.

La recette pour obtenir une série chronologique à peu près exponentielle était pourtant simple : $p_i = 8 \exp(0{,}02t_i + z_i)$ où z_i est pris par exemple entre -10^{-2} et 10^{-2} à l'aide de votre programme de suite pseudo-aléatoire préféré. Revenons à notre énoncé.

"2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points.
On pose : $y_i = \ln p_i$."

Les élèves connaissent la loi exponentielle de la population. Mais il vaut mieux faire confiance aux experts qui modélisent. A propos, les experts réels, communément appelés démographes, s'y prennent tout autrement en tenant compte de la structure de la population par âge et sexe et des taux de natalité et de mortalité ; ça ne les empêche pas de se planter à l'occasion. On aurait pu écrire : "On cherche à approcher cette évolution par une exponentielle en posant : $y_i = \ln p_i$."

Maintenant les candidats sont sur les rails. Coefficient de corrélation à 10^{-3} près par défaut : 0,999. Impressionnant n'est-ce pas ? Si on avait arrondi, on aurait d'ailleurs trouvé 1. Si l'étude du "nuage" avait été correctement faite, on aurait pu en tirer une conclusion importante : un coefficient de corrélation très proche de 1 ne suffit pas à lui seul à assurer la pertinence d'un ajustement affine, surtout pour des séries courtes. Corollaire : presque tous les exercices sur la régression linéaire comportent une lourde erreur de raisonnement, erreur qu'on habitue les élèves à faire systématiquement.

Le calcul des coefficients de la droite de régression est demandé avec arrondi à 10^{-3} près, puis :

(13) Il peut être prudent de vérifier qu'il ne s'agit pas d'un effet visuel illusoire en calculant les différences successives.

"[A.2.]c. En déduire la population p en fonction du rang t de l'année
B. Etude du modèle exponentiel.
On admet que la fonction f définie sur [0,35] par : $f(t) = 8e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985."

Qu'est-ce que c'est que cette population p ? Il s'agit au mieux d'une approximation de la population. Quoi qu'il en soit le résultat est $8{,}01e^{0,021t}$. Il était sans doute de bonne guerre d'éviter de le donner exactement dans la question suivante. Mais de bons candidats ne seront-ils pas gênés par cette différence ?

Après avoir fait étudier le tableau de variations de f, l'énoncé demande :

"Construire soigneusement la courbe représentative de f, notée (C), dans le repère du A. Qu'observe-t-on ?"

Oh ce "Qu'observe-t-on ?" ! Qu'est-ce que le correcteur veut que j'observe ? Que la courbe ne passe pas très loin du "nuage" ? Ou que les différences d'ordonnées sont beaucoup plus importantes à droite qu'à gauche, ce qui est très mauvais signe pour la qualité prédictive de l'ajustement (et nous on sait pourquoi).

La suite est standard et n'appelle pas de nouveau commentaire important du point de vue qui est ici le nôtre, celui des applications à l'économie et aux sciences sociales.

Pondichéry juin 95

On ne répétera pas à propos de ce problème les observations déjà faites plus haut.

"Une entreprise fabrique des objets P."

Cette notation P ne sera jamais utilisée. L'énoncé parle par la suite d'objets tout court. Mais ça fait mathématique.

"On note x le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers. Pour des raisons d'approvisionnement, x appartient à l'intervalle [0 ;3,5]. On note $C(x)$ le coût de fabrication exprimé en millions de francs. On définit une fonction "coût marginal" M par $M(x) = C'(x)$, où C' désigne la dérivée de C. On définit une fonction "coût moyen" C_m par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
Partie A
On suppose que pour cette production, le coût marginal est défini par $M(x) = 1 + \dfrac{x-3}{8} e^x$."

Comme dans la plupart de ces problèmes, on ne saura jamais quels sont ces mystérieux objets *P*. Il est bien étonnant que le coût moyen augmente de 70% quand on passe de 3000 à 3500 objets. Comme dans *tous* ces énoncés, on ne sait pas de quelle période de production il s'agit. S'il s'agit de l'année, il y a moins de 18 salariés, sauf emploi de précaires sous payés ; on fait ce genre de calculs dans de si petites entreprises ?

La partie A étudie la fonction *M* en terminant par le calcul de la primitive qui s'annule pour $x = 0$. La partie B commence par définir $C(x) = x + \frac{x-4}{8} e^x + \frac{1}{2}$ et faire vérifier $C'(x) = M(x)$ (mais pas $C(x) = 0$). Les trois premières questions de la partie C portent sur une étude graphique du coût moyen.

Vient ensuite :

"4. On sait en économie que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal."

C'est une merveilleuse illustration du principe dénoncé à juste titre par Bkouche : on évitera de faire des mathématiques. Les fonctions coût moyen et coût marginal ont été définies mathématiquement dans le préambule. Leurs propriétés sont donc des propriétés mathématiques, découlant de celles de la fonction coût de production à partir de laquelle elles ont été définies. Nous avons déjà vu certaines des propriétés que les économistes lui imposent : convexité et stricte positivité à l'origine. Ils y ajoutent en général la dérivabilité, douteuse mais qui facilite l'étude du coût marginal. Sous ces hypothèses, un point où le coût moyen est égal au coût marginal est un minimum, c'est un théorème et par conséquent ça se démontre mathématiquement. Quoi qu'on en dise dans des cours d'économie qui font autorité, un tel point n'existe pas toujours (voyez $\sqrt{1+x^2}$).