ÉCONOMIE ET MATHÉMATHIQUES QUELQUES ÉLÉMENTS DU DÉBAT

Groupe Mathématiques-Économie
de l'IREM de Strasbourg

Introduction

A la suite de la mise en place des nouveaux programmes de Mathématiques en Première ES et Terminale ES, un groupe de Recherche-Formation s'est constitué en 1993 à l'initiative d'animateurs de l'I.R.E.M. de Strasbourg. Ce groupe est constitué par 8 enseignants en lycée d'enseignement général (4 en sciences économiques et sociales et 4 en mathématiques) et un enseignant en mathématiques à l'Université.

Notre réflexion a débouché sur la nécessité de concevoir des activités pluridisciplinaires.

En novembre 1996 le groupe a publié une brochure (1), destinée à des enseignants de lycée aussi bien en mathématiques qu'en sciences économiques et sociales. Celle-ci a pour ambition de susciter un travail interdisciplinaire dans les établissements concernés en proposant quelques pistes de réflexion et des exemples de travaux, déjà expérimentés, à réaliser avec des élèves.

Les deux articles qui suivent sont deux parties du premier chapitre : "Informations et réflexions à l'usage des enseignants". Ils ont été en partiellement réécrits en vue de la présente publication.

Le premier article, intitulé "Economie et mathématiques, quelques éléments du débat", donne un rappel historique puis expose les termes actuels du débat à propos de la place des mathématiques en économie et sciences sociales. L'intention des auteurs est d'attirer l'attention sur ce

(1) *Mathématiques et Sciences économiques et sociales au lycée*, I.R.E.M. de Strasbourg, Brochure N°170.

débat qui n'est pas clos et ne peut être esquivé.

Le second article, intitulé "La fonction de coût : un exemple de formalisation" est une réponse à la question suscitée par la présence dans les manuels de mathématiques et d'économie, de nombreux exercices dans lesquels les fonctions de coût sont des fonctions du troisième degré.

1. L'USAGE DES MATHÉMATIQUES EN ÉCONOMIE

" Proposition 8 : le but de la pratique scientifique n'est pas de connaître la réalité mais de construire sa compréhensibilité.
Proposition 11 : les sciences sociales sont des disciplines à l'intérieur desquelles il y a lutte entre des théories contradictoires "

Di RUZZA Renato, *Eléments d'épistémologie pour économistes*, Grenoble, 1988, PUG.

"Comment donc connaître rationnellement l'irrationnel, comment concevoir des modèles d'une réalité irrationnelle sur lesquels on puisse raisonner ?"

GRANGER G.G., Epistémologie, *Encyclopaedia Universalis*

Stanley JEVONS (1888) (2), l'un des fondateurs de l'économie mathématique au 19e siècle, faisait remarquer que l'économie devait être une science mathématique du simple fait qu'elle traite de *quantités* et se prête donc naturellement au traitement mathématique.

Dans ce sens, les tentatives les plus anciennes de décrire et d'expliquer la création de richesses ont toujours plus ou moins fait appel à la mesure et au calcul. Citons ainsi la tentative de François QUESNAY (Le tableau économique, 1758) de rendre compte à l'aide d'un *tableau chiffré* de la genèse et de la circulation de la richesse nationale.

Mais dans les années 1870, l'usage des mathématiques en économie va prendre une dimension nouvelle, à tel point que l'on parle à ce propos de *révolution marginaliste.* En effet de façon quasi simultanée trois auteurs, Stanley JEVONS et Carl MENGER en 1871, Léon WALRAS en 1874 (fondateurs du courant néoclassique) ont fait appel au calcul pour élaborer leur théorie de la valeur :

– la valeur des choses leur vient de la satisfaction apportée par leur consommation, appelée leur utilité ; celle-ci est essentiellement un sentiment propre à chacun et donc non mesurable
– quand la quantité d'un bien, consom-

(2) JEVONS W. S., *The theory of Political Economy*, 1888, cité par MEIDINGER Cl., *Science économique : questions de méthode*, Paris, 1994, Vulbert.

mée par une personne, augmente, l'utilité d'une unité supplémentaire consommée est de plus en plus faible : pour chaque individu *l'utilité marginale* d'un bien diminue quand la consommation de ce bien augmente
– on peut alors utiliser le calcul différentiel pour raisonner mathématiquement sur des grandeurs qui échappent à la mesure. On montrera ainsi que pour deux biens donnés, le rapport des prix est égal au rapport des utilités marginales.

C'est bien là que l'on peut parler de révolution : les mathématiques sont maintenant au cœur du *raisonnement* économique.

Le courant de l'économie mathématique s'est peu à peu imposé au dépens de l'économie "littéraire", mais son hégémonie aujourd'hui n'est pas sans susciter un grand nombre de critiques. Aussi est-il intéressant de rappeler les arguments toujours actuels en faveur de l'usage des mathématiques en économie :

– on a souvent reproché à l'économie et à ses modèles leur abstraction. Celle-ci est cependant légitime et même nécessaire à la compréhension d'une réalité complexe. Simplifier en forçant certains traits pertinents, c'est construire un *idéal-type* au sens de Max WEBER. C'est le propre de toute démarche scientifique – la démarche hypothético-déductive a révolutionné la physique autant que l'économie. La discussion des hypothèses et les problèmes posés par la vérification constituent de nouvelles questions à résoudre, mais ne remettent pas en cause la méthode elle-même
– l'utilisation du langage mathématique rend la théorie économique accessible à tous ceux qui maîtrisent suffisamment ce langage. En effet, si le vocabulaire et la syntaxe des mathématiques sont communes à tous les mathématiciens, on ne peut pas en dire autant de la langue littéraire, chaque auteur pouvant utiliser les mots dans un sens particulier et propre à sa théorie. Gérard JORLAND (1995) (3) remarque ainsi que c'est à partir du moment où la théorie de MARX a été formalisée en langage mathématique qu'elle est devenue l'objet d'un débat scientifique plutôt que polémique.

2. La critique de l'usage des mathématiques

Utilisées par une multitude de disciplines scientifiques et notamment par la « science économique », les mathématiques permettent de mettre en évidence la cohérence du discours théorique, de confronter les théories qui ont pu être formalisées et de faire des vérifications (et des prévisions) grâce à l'économétrie.

L'utilisation des mathématiques est cependant critiquée tant par des économistes que par les spécialistes d'autres sciences sociales.

Dès la fin du 19e siècle, lorsque L. WALRAS présente ses travaux d'économie mathématique, on lui objecte que « l'économie politique est une science morale qui a pour point de départ et pour point d'arrivée l'homme ». L'économie mathématique est considérée par les économistes contemporains de Walras comme une

(3) JORLAND G., *Les paradoxes du Capital*, Paris, 1995, Ed. Odile Jacob.

simple *quantification* et non comme une *formalisation,* et le rejet qu'elle inspire provient de la crainte de voir *mesurer* les sentiments, les passions et les comportements humains.

Alain BIENAYME (1994) [(4)] présente les risques que comporte, selon lui, l'outil mathématique en raison de la " manière dont il est souvent utilisé " :

– l'outil mathématique peut conduire à des " excès de langage " lorsque l'on néglige " ce que les conclusions doivent aux prémisses " ; ainsi certains théorèmes sont toujours retenus (et enseignés) alors que les transformations du monde éloignent de plus en plus la réalité des hypothèses (parfois nombreuses) du modèle ; il peut en résulter une " vision erronée du monde " ;

– l'outil mathématique peut créer des " illusions de la logique ", lorsque les connaissances mathématiques dictent le choix des hypothèses les plus commodes pour la formalisation, sans que leur pertinence ne soit suffisamment examinée. L'emploi des mathématiques peut conduire " à des déformations de la vision " et à des conclusions contraires à certaines expériences : " sauf à considérer que la fécondité d'un théorème se juge à sa capacité de focaliser réfutations et controverses, on peut déplorer que notre science ait pris de nos jours un tour aussi biscornu et sinueux pour se rapprocher de la vérité " ;

– les mathématiques ne permettent pas dans chaque cas de départager les théories et les explications qu'elles proposent, mais ce sont celles qui se prêtent le mieux à la mesure qui risquent d'être privilégiées et retenues : ainsi la " domination excessive du mesurable " constitue un troisième danger d'autant plus que de nombreux phénomènes ne sont pas mesurables, ce qui peut expliquer le peu d'intérêt qu'ils ont suscité malgré leur importance pour la compréhension de la réalité.

" Ce qui précède ne constitue en rien le procès d'une discipline fort utile à l'économiste, mais celui d'une spécialisation qui [...] devient oublieuse de l'objet principal dont elle traite "

Jean-Pierre DUPUY (1994) [(5)] considère que " le savoir de la science économique est un savoir faux ", non pas parce qu'il n'est pas en parfaite adéquation à la réalité - ce qui ne peut pas être son objectif - mais parce que cette science " s'interdit dès le départ de prendre en compte ces influences mutuelles " que sont " la contagion des désirs, des sentiments et des passions ". L'existence de ce savoir contribue cependant à façonner la réalité sociale et économique qui " tend à ressembler au modèle théorique, mais ce n'est pas pour autant [...] que celui-ci dit la vérité au sujet du réel ".

Ces remarques rejoignent d'une certaine façon la critique de Serge LATOUCHE (1994) [(6)] : " Tout l'édifice du calcul rationnel repose sur le postulat métaphysique de l'existence du sujet rationnel, l'homo œconomicus, c'est à dire d'une machine à calculer simple et unique [...] ".

(4) *In* HURIOT J.-M. (éd.), *Economie, mathématiques & méthodologie*, Paris, 1994, Economica.

(5) DUPUY J.-P., Lettre de l'AFSE, n° 23, juillet 1994, *in : Problèmes économiques*, n° 2444-2445, 1-8 nov. 1995, pp 4-5.

(6) LATOUCHE S., "Le rationnel et le raisonnable. A qui se fier ?", *Confiance, interaction et théorie des jeux. La revue du M.A.U.S.S.*, n°4, 2e semestre 1994, Editions de la Découverte.

3. Éléments pour une conclusion

Pourquoi le débat sur l'utilisation des mathématiques reste-t-il aussi animé, alors que nul n'en conteste l'usage dans d'autres sciences ? On peut avancer des raisons de nature politique, sociologique et méthodologique qui sont liées.

WALRAS s'est heurté à l'opposition des libéraux français de son époque qui, le considérant comme "socialiste", l'ont rejeté et, avec lui, l'économie mathématique. Même si de nos jours tous les théoriciens, quelle que soit leur appartenance doctrinale, utilisent les mathématiques, l'excès de cet usage est surtout reproché aux développements de la théorie néoclassique, celle de *l'équilibre général par le libre jeu des marchés*, fondée sur une approche individualiste et l'hypothèse de rationalité de l'acteur.

Faut-il condamner l'outil parce qu'il est utilisé par des économistes dont on ne partage pas les options politiques ou parce que l'hypothèse de l'homo œconomicus est contestable ?

La compétition au sein de la communauté scientifique des économistes favoriserait "l'hypermathématisation" (7) dans la mesure où les recherches ont d'autant plus de chance d'être publiées qu'elles font davantage appel aux mathématiques.

L'outil mathématique fait-il progresser la connaissance économique ou ne constitue-t-il qu'un moyen de la concurrence à l'intérieur de ce "champ" ?

Les sciences sociales s'intéressent à des faits chargés de sens et il semble difficile de constituer des modèles abstraits (et mathématiques) qui considèrent ces faits comme des objets sans renoncer à l'essentiel : aux significations.

Les modèles mathématiques sont nécessairement réducteurs et comporteraient deux risques :

– celui de faire croire qu'ils représentent la réalité
– celui de produire effectivement les comportements qu'ils modélisent à partir d'hypothèses simplificatrices.

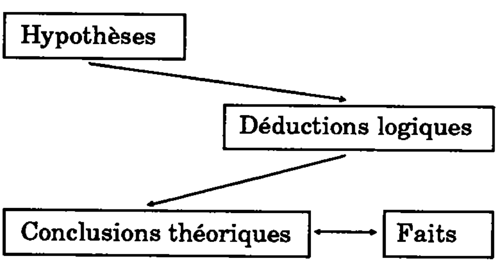
Ces quelques commentaires n'ont pas la prétention d'être exhaustifs tant les arguments des différents camps sont variés. Les textes cités en référence permettront à ceux qui le souhaitent d'approfondir la réflexion.

(7) *In* HURIOT J-M (éd.), *op. cit.*

LA FONCTION DE COÛT : UN EXEMPLE DE FORMALISATION

L'Economie a recours aux Mathématiques pour le traitement des données numériques et pour la construction de modèles formels. La fonction coût relève de ce second cas de figure. Son élaboration est un bon exemple de la méthode de recherche adoptée par les économistes à la fin du XIX^{e} siècle : la méthode hypothético-déductive.

Celle-ci associe des hypothèses à un raisonnement mathématique. Les hypothèses sont énoncées en langage mathématique ce qui permet de faire appel ensuite au raisonnement mathématique. Les conclusions sont confrontées aux faits.



Dans une première partie nous donnerons quelques définitions et expliciterons certaines notions pour bien comprendre en quoi consistent les hypothèses formulées en économie au sujet de la fonction coût.

Dans une deuxième partie nous dégagerons les propriétés que doit vérifier une fonction de coût répondant à ces hypothèses. Nous montrerons pourquoi certaines fonctions polynômes du troisième degré conviennent pour illustrer le modèle décrit dans la première partie. Nous en donnerons un exemple numérique dans la troisième partie. Enfin dans une quatrième partie nous montrerons l'intérêt de ces fonctions pour des élèves de la classe de Première.

1. Hypothèses économiques de base

La formalisation de la fonction de coût s'appuie sur une théorie des coûts de production et donc sur un certain nombre de notions et d'hypothèses, notamment la loi des rendements décroissants.

– *Les facteurs de production et la fonction de production.*

La production de biens par une entreprise exige l'utilisation de ressources diverses appelées facteurs de production : d'une part le travail, d'autre part les matières premières, l'énergie, les machines et les installations qui forment le capital.

La théorie économique retient généralement deux facteurs de production : le travail et le capital. Un niveau de production donné peut être obtenu par des combinaisons différentes de ces deux facteurs ; c'est ce qu'exprime la fonction de production qui peut s'écrire sous la forme générale : $Q = f\ (L,K)$, où Q, L et K désignent respectivement la production, le travail et le capital.

Lorsque la production d'une quantité Q peut être réalisée par des techniques différentes, certaines utilisant beaucoup de capital et peu de travail, d'autres nécessitant peu de capital mais beaucoup de travail, on dit que les facteurs de production sont substituables.

– *Le coût de production* est la valeur (par exemple en francs) des facteurs de production utilisés, au cours d'une période donnée, pour réaliser une production déterminée. Il dépend des quantités de facteurs utilisées et de leurs prix. L'étude des coûts au niveau de l'entreprise peut répondre à des préoccupations différentes : connaissance des coûts de manière prévisionnelle (sur une période courte, le trimestre par exemple), *a posteriori* (à la fin de l'année, par exemple) ou encore à long terme et à partir d'hypothèses (pour évaluer, par exemple, les effets d'un projet d'investissement).

– *La fonction de coût total* exprime la relation entre la valeur totale des facteurs de production et la production, par exemple *CT*, fonction de *Q*, quantité produite.

Dans les modèles suivants, la fonction de coût retenue est celle qui fait dépendre le coût total de l'importance de la production en courte période. Le court terme se définit, selon A. MARSHALL (8), comme la période de temps au cours de laquelle la firme ne peut rien changer à certaines de ses conditions de production en raison des engagements pris, mais peut modifier certains facteurs de production de manière à accroître le volume de sa production. On peut imaginer, par exemple, que les installations et équipements sont donnés, mais qu'il est possible d'utiliser plus ou moins de travail et de matières premières.

– *La loi des rendements décroissants.* Un accroissement de certains facteurs de production par rapport à d'autres doit normalement permettre l'augmentation de la production. On considère en général qu'il existe un premier intervalle de rendements croissants (croissance accélérée), suivi d'un intervalle de rendements décroissants (croissance décélérée). En effet la loi des rendements décroissants (9) affirme qu'à partir d'un certain point, des doses additionnelles identiques de ces facteurs (les autres restant constants) provoquent des augmentations de plus en plus faibles de la production (croissance décélérée).

Cette diminution des rendements supplémentaires résulte du fait que les ressources variables se combinent avec des parts relatives de plus en plus faibles des ressources constantes.

– *Le coût total est la somme de " coût fixes " et de " coûts variables ".*

L'existence, en courte période, de facteurs fixes entraîne des coûts fixes (par exemple les loyers ou les amortissements), c'est à dire indépendants du niveau de la production ; les coûts variables sont liés aux facteurs dont l'emploi croît avec la production. Selon le principe des rendements décroissants, ces coûts variables progressent, au-delà d'un certain seuil, nécessairement plus rapidement que la quantité produite.

La fonction de coût total de courte période CT est croissante et comporte un point à partir duquel sa croissance "s'accélère". Dans la plupart des modèles, ce point est un point d'inflexion.

(8) Alfred MARSHALL (1842-1924), économiste britannique, fondateur de l'Ecole de Cambridge.

(9) Loi déjà formulée par TURGOT (1727-1781), économiste français et Contrôleur général des finances (1774-1776).

2. Le modèle

Dans une optique didactique, il est intéressant d'avoir une représentation graphique et si possible une expression algébrique d'une fonction de production vérifiant les hypothèses de la théorie. D'une représentation graphique de la fonction de production on déduit les propriétés des dérivées partielles premières et secondes puis une représentation graphique de la fonction coût (10).

La fonction de production est une fonction à deux variables : $Q = f(L,K)$ où Q est la quantité produite.

L'impossibilité de produire sans travail se traduit par $f(0,K) = 0$.

L'impossibilité de produire sans capital se traduit par $f(L,0) = 0$.

De plus, les quantités produites et les quantités de facteurs de production étant positives, la fonction Q est définie sur $IR^+ \times IR^+$ et prend ses valeurs dans IR^+.

Graphiquement l'hypothèse des rendements décroissants se traduit par les courbes ci contre (11).

Ces deux courbes représentent des fonctions croissantes et possèdent chacune un point d'inflexion. Il est donc naturel de s'intéresser au signe des dérivées secondes ainsi qu'à celui des dérivées premières.

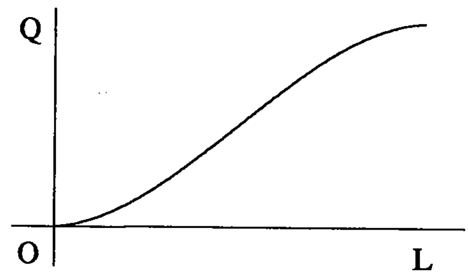


Fig. 1 : Quantité produite en fonction du travail, le capital étant fixe, égal à K_0
$Q = f(L,K_0) = f_{K_0}(L)$

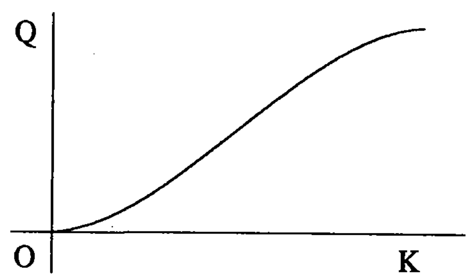


Fig. 2 : Quantité produite en fonction du capital, le travail étant fixe égal à L_0
$Q = f(L_0,K) = f_{L_0}(K)$

Soit λ la valeur qui annule $f'_{K_0}(L)$ et κ celle qui annule $f'_{L_0}(K)$.

On peut alors dresser les tableaux de variation de ces deux fonctions.

(10) Dans les travaux de recherche économique, on s'attache surtout à définir des conditions donnant l'allure d'une courbe (dérivées première, seconde, partielles selon le cas).

(11) L et K varient sur des intervalles bornés.

Valeurs de L	0 λ
signe de $f''_{K_0}(L)$	+ 0 −
signe de $f'_{K_0}(L)$	+ +
variations de $f_{K_0}(L)$	0

Valeurs de K	0 κ
signe de $f''_{L_0}(K)$	+ 0 −
signe de $f'_{L_0}(K)$	+ +
variations de $f_{L_0}(K)$	0

Nous avons exprimé **les quantités produites en fonction des quantités de facteurs** de production utilisées.

Nous voulons exprimer **les coûts de production en fonction des quantités produites.**

Cela est possible car il existe une relation simple entre la quantité de facteur de production utilisée et le coût de celui-ci.

On note P_L le prix d'une unité de travail et P_K le prix d'une unité de capital.

En considérant que dans le court terme, la quantité de capital utilisé est fixe (égale à K_0), alors le coût total en fonction des quantités produites est donné par

$$CT(Q) = P_K \times K_0 + P_L \times f^{-1}(Q)$$

où $P_K \times K_0$ sont les coûts fixes.

La représentation graphique de la fonction coût CT présente l'allure de la figure 3.

Soit μ la valeur qui annule $CT''(Q)$

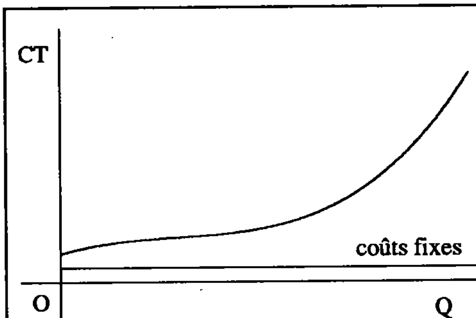


Fig. 3 : Coût total en fonction de la quantité produite : $CT(Q)$

On peut alors dresser le tableau de variation de la fonction CT

Valeurs de Q	0 μ
signe de $CT''(Q)$	− 0 +
signe de $CT'(Q)$	+ +
variations de CT	CF

Le modèle d'une fonction coût est donné par ce tableau.

3. Une expression algébrique de la fonction coût

Certaines fonctions du troisième degré répondent aux critères du modèle.

La dérivée seconde est d'abord strictement négative puis s'annule en μ (μ étant strictement positif), puis elle est strictement positive. Parmi les fonctions répondant à certaines conditions et qui peuvent convenir la plus élémentaire est une fonction affine.

Posons

$$CT''(Q) = aQ + b \text{ avec } a > 0 \text{ et } b < 0.$$

Une primitive CT' est telle que

$$CT'(Q) = \frac{a}{2}Q^2 + bQ + c.$$

Comme $\frac{a}{2} > 0$, on choisira le coefficient c tel que le discriminant du polynôme du second degré CT' soit strictement négatif, c'est-à-dire $c < \frac{b^2}{2a}$. On aura alors

$$CT'(Q) > 0.$$

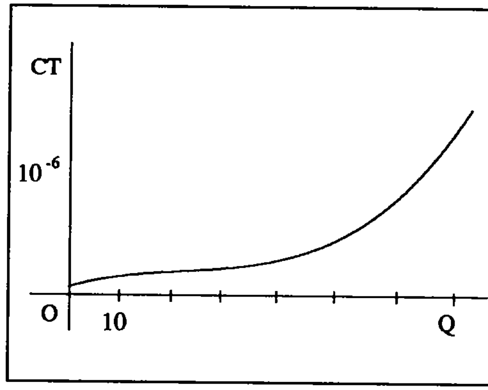
Une primitive CT est telle que

$$CT(Q) = \frac{a}{6}Q^3 + \frac{b}{2}Q^2 + cQ + d.$$

On choisira $d > 0$ car les coûts fixes sont positifs et $d = CF$.

Prenons par exemple

$$\boxed{CT(Q) = Q^3 - 60Q^2 + 1500Q + 5000}$$



On aurait pu choisir d'autres fonctions pour la dérivée seconde (exemple fonction logarithme) puisque c'est l'allure de la courbe qui importe. Mais ce serait compliquer les choses !

4. Intérêt pédagogique de l'étude d'une fonction de coût

La fonction de coût traduit la relation entre les coûts de production minimaux et l'ensemble des niveaux de production au cours d'une période donnée. Mais, il est évident qu'une seule quantité sera produite au cours de cette période et qu'elle correspondra à un seul coût. La structure des coûts de production se modifiant constamment dans le temps, cette fonction n'a pas de représentation possible dans le temps. Elle ne peut être déduite de l'étude de données statistiques historiques d'une entreprise. *La fonction de coût ne peut être que la représentation d'un modèle théorique.*

Malgré son aspect théorique et détaché de la réalité, la fonction de coût offre deux intérêts :

– elle sert à montrer les mécanismes d'équilibre du marché.

Rappelons qu'elle s'appuie sur l'hypothèse des rendements décroissants dont une conséquence est l'existence d'un minimum pour les coûts. Si les coûts étaient constamment décroissants, alors toutes les entreprises auraient intérêt à produire de plus en plus pour obtenir des coûts de production unitaires de plus en plus faibles. Ceci entraînerait un déséquilibre permanent du marché.

– elle permet dans nos classes un travail pluridisciplinaire fécond :

- dans le cours de mathématiques elle permet de donner du sens autre que mathématique au concept de dérivation et à la lecture de la courbe,
- dans le cours de sciences économiques et sociales elle permet aux élèves d'appréhender une fonction particulière et conduit à des prolongements sur l'analyse des fonctions de coûts moyen et marginal. C'est la seule occasion qu'auront les élèves de mettre en évidence les propriétés que l'on ne peut trouver qu'à ce moment là.

Certains exercices des manuels d'économie ou de mathématiques proposent de construire la fonction coût à partir de données chiffrées. Cette démarche peut présenter un intérêt pédagogique mais ne correspond à aucune situation réelle. C'est ce que l'on peut appeler du "faux concret pédagogique"

En revanche, partir d'une fonction de coût, c'est proposer aux élèves l'étude d'une modélisation.

C'est sur la base de ce modèle qu'a été réalisée l'activité n°1 "Coûts et bénéfices : étude de courbes" qui figure dans la troisième partie de la brochure citée en introduction de ces articles.