REPERES - IREM. N° 36 - juillet 1999

LE PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES DOIT-IL ENSEIGNER LA MODÉLISATION ?

Jean Claude GIRARD
Irem de Lyon

Qu'y a-t-il de commun entre l'élève de Quatrième qui mesure sur la figure géométrique pour "démontrer" que deux droites sont parallèles, celui de Première qui n'admet pas que Pile et Face ont une probabilité de 1/2 car, prétend-il, la pièce peut aussi tomber sur la tranche, le candidat au Bac qui donne une prévision avec deux chiffres après la virgule (!) du nombre d'habitants d'un pays en l'an 2.000 après avoir calculé une droite de régression sur 5 ans et enfin, l'enfant d'école primaire qui calcule la taille qu'aura à 20 ans, son frère qui mesure actuellement 1,30 m à l'âge de 10 ans ?

La réponse est à chercher du côté du rapport entre les mathématiques et la réalité (1), plus précisément de la confusion entre modèle et réalité. Il ne sert à rien de se désespérer que l'élève de Quatrième n'ait pas compris en quoi consistait une démonstration, de se désoler que celui de Première fasse preuve d'originalité (voire de réflexion ou de provocation) ni d'inciter les deux derniers à "vérifier leur résultat" car cela renvoie généralement à la vérification des calculs mathématiques et non au choix du modèle ou à l'interprétation des résultats.

Le débat se situe à un autre niveau. Doit-on entraîner nos élèves à critiquer les résultats que donnent les mathématiques, voire même à se poser la question de la pertinence de certaines applications des mathématiques et pas seulement les entraîner à exécuter docilement certains

(1) Remarque (suggérée par Marc Legrand). Dans tout ce texte, nous utilisons l'expression "la réalité" pour parler de ce réel que nous cherchons tous à étudier et à comprendre, mais nous sommes bien conscients que le "la" est abusif en ce sens que rien n'est plus difficile à connaître effectivement que ce réel qui se présente à nous dans une fausse simplicité. D'où tout ce travail de modélisation effectué dans les différentes sciences pour parvenir à saisir avec quelque pertinence et quelque objectivité ce réel qui nous échappe "en réalité" !

programmes de calculs dans des situations construites pour garantir que l'on puisse les faire ? Le professeur de mathématiques est placé devant un dilemme. Doit-il rester dans l'abstraction, au risque d'enfermer les mathématiques dans leur tour d'ivoire, de les couper des autres domaines du savoir et de revenir aux années 70, c'est-à-dire enseigner des modèles décontextualisés applicables en principe à tout mais à condition d'en avoir saisi le sens ? Doit-il "illustrer" les mathématiques par des habillages artificiels pour qu'elles soient plus "concrètes" dans le but de les rendre plus compréhensibles, au risque de rajouter d'autres difficultés dont il n'est pas toujours conscient ? En d'autres termes, le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation ou seulement des modèles ?

1. Qu'est-ce qu'un modèle ?

Modéliser, c'est simplifier la réalité pour qu'elle rentre dans un cadre connu, c'est-à-dire dans lequel on sait opérer un traitement des informations disponibles. Le modèle obtenu peut être mathématique ou non. Modéliser n'est donc pas (toujours) mathématiser bien que ce soit souvent le cas.

> *"Un modèle mathématique est un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité"* (2).

Il n'y a d'ailleurs aucune raison que cette "application" soit bijective. En effet, deux réalités peuvent être modélisées par le même outil mathématique et la même réalité peut se modéliser de différentes façons (3).

Voici comment le biologiste V. Voltera (4) présente la modélisation mathématique de la réalité :

> *"Etudier les lois suivant lesquelles varient les grandeurs susceptibles de mesure, les idéaliser en les dépouillant de certaines propriétés ou en leur en attribuant d'autres de façon absolue, et établir une ou plusieurs hypothèses élémentaires qui régissent leurs variations simultanées et complexes, c'est là l'indice du moment où se jettent réellement les bases sur lesquelles on pourra construire l'édifice analytique tout entier.*
>
> *Et c'est alors qu'éclate la puissance des méthodes que les mathématiques mettent largement à la disposition de ceux qui savent s'en servir.* [...]
>
> *Donc établir des concepts de façon à pouvoir introduire la mesure et par des mesures découvrir des lois, remonter de celles-ci aux hypothèses, en déduire au moyen de l'analyse une science raisonnant de manière rigoureusement logique sur des êtres idéaux, en comparer les conséquences à la réalité, rejeter ou transformer, dès que se présente une contradiction entre les résultats du calcul et le mode réel, les hypothèses fondamentales déjà utilisées, et parvenir ainsi à deviner des faits nouveaux et des analogies nouvelles, ou encore à déduire de l'état présent ce que fut ce passé et ce*

(2) G. Israël, *La mathématisation du réel*, Science ouverte, Le Seuil, Paris 1996.

(3) Les résultats (différents) obtenus par un ministre et un prix Nobel de physique au sujet de boules de pétanque et de balles de tennis pour savoir si elles tombent à la même vitesse ou pas, le montrent bien !

(4) Cité par G. Israël, *op. cit.*

que sera l'avenir ; voilà, aussi brièvement que possible, comment on peut résumer la naissance et l'évolution d'une science ayant le caractère mathématique."

Mais, parle-t-on de modèle dans l'enseignement des mathématiques ?

2. Où l'on fait de la modélisation sans le dire (et-ou sans le savoir)

2.1. En géométrie

D'un certain point de vue, faire de la géométrie consiste à construire l'espace mathématique à partir de l'espace sensible [(5)], du moins lors des premiers apprentissages, à l'école et au collège. Cela revient donc à modéliser la réalité.

L'objet géométrique se situe dans le Monde des Idées car, dans l'enseignement secondaire au moins, on ne fait pas de la géométrie pour une utilisation concrète (dessin, architecture...) mais surtout comme formation à un mode de pensée dans lequel le raisonnement déductif tient une place prépondérante.

Quand l'énoncé précise "soit un carré" c'est d'un carré idéal qu'il s'agit, d'une modélisation définie par certaines propriétés mathématiques de tout ce qui dans la réalité a une forme appelée naïvement "carré". On ne saurait donc rencontrer un carré mathématique et tout dessin d'un carré n'est pas plus un carré que le dessin d'une pipe n'est une pipe !

Le dessin qui décrit une situation géométrique n'est qu'un représentant possible mais imparfait de la figure géométrique que détermine l'énoncé mathématique.

L'élève qui ne comprend pas que le dessin n'est pas la figure ressemble aux prisonniers de la caverne de Platon qui prennent les ombres qu'ils voient pour la réalité.

Le contrat didactique en géométrie, à partir du collège, est que l'on ne raisonne pas sur le dessin (perceptible, manipulable, concret) mais sur la figure (abstraite, idéale) qui est une construction mathématique.

Encore faut-il en être conscient c'est-à-dire savoir si le problème est posé à l'intérieur des mathématiques ou dans une réalité complexe qui nécessite le passage à une description simplifiée exploitable mathématiquement. Par exemple, quand Eratosthène (3^{e} siècle av. J.-C.) calcule la ciconférence de la terre, c'est clairement dans un modèle qu'il traduit son problème (la surface de la terre est représentée par une sphère, les rayons du soleil par des parallèles...) dans lequel il applique les théorèmes sur les angles alternes-internes pour ensuite revenir à sa préoccupation très "terre à terre" !

2.2. La proportionnalité

"La proportionnalité, telle qu'elle est enseignée en mathématiques, se veut avant tout un outil de modélisation devant servir à résoudre de nombreux problèmes de type proportionnalité auxquels nous pouvons être confrontés.

Elle constitue la première notion mathématique qui est explicitement

(5) Y. Chevallard, *Petit x*, n°27, IREM de Grenoble.

présentée comme un outil de modélisation" (6).

La proportionnalité, premier exemple de modélisation : ceci reste à voir !

Maints problèmes dits de proportionnalité nécessitent pour être résolus que l'on "suppose" que l'application de la proportionnalité soit pertinente. On trouve, par exemple, dans de nombreux livres, des problèmes du type suivant : si on a utilisé 2 litres de peinture pour peindre 8 m^2, combien doit-on acheter de peinture pour pouvoir terminer les 15 m^2 qui restent ? On "suppose" alors que le passage de la peinture est régulier, que le support est le même partout, que l'on est toujours dans la première couche, etc. En d'autres termes, on suppose que le modèle de proportionnalité peut s'appliquer. En réalité, il ne s'applique qu'approximativement. La réponse que l'on va obtenir à l'intérieur du modèle (et pour laquelle on ne peut que vérifier l'exactitude des calculs) donnera une idée de la réponse dans la réalité si les hypothèses ne sont pas totalement fausses (et là, c'est la validité du modèle qu'il faut tester, ce qui ne peut se faire, souvent, qu'*a posteriori*) (7).

La seule façon de savoir si un modèle est adapté est de le confronter avec la réalité. S'il donne des résultats aberrants, alors on doit le rejeter. S'il donne des résultats cohérents avec la réalité, il sera déclaré valable sans qu'on sache dans quelles limites il l'est, ni s'il n'y en a pas un meilleur. Par exemple, le système de modélisation astronomique de Ptolémée (2e siècle après J.-C.) était en accord avec ce que les astronomes pouvaient observer à l'époque. Il plaçait la terre fixe au centre du monde et,

"Par une combinaison complexe et ingénieuse de mouvements circulaires parvenait à prédire la position des planètes avec une précision de 1 degré. Aucun progrès notable ne sera fait pendant 14 siècles." (Ivar Ekeland (8))

Pour cette raison, c'était un bon modèle bien que l'hypothèse de départ soit fausse.

La proportionnalité est souvent admise comme un bon modèle bien qu'elle ne soit qu'approximativement valable mais on n'a pas les moyens (en particulier dans le cadre des problèmes scolaires) de le vérifier (9).

D'autre part, ce modèle (s'il est présenté comme tel) reste longtemps le seul disponible et ceci dispense de réfléchir pour savoir s'il n'en existe pas de meilleur.

2.3. En probabilités

Les probabilités constituent un autre domaine des mathématiques où l'on prend beaucoup d'exemples tirés de la réalité avec le risque que "ça ne marche pas !" ou avec le danger de confondre réalité et modèle.

La première difficulté peut être d'avoir conscience que l'on travaille dans un

(6) Jean Julo, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, 1995.

(7) Voir l'article de J.-C. Girard et B. Parzysz "Les maths, c'est pas la réalité !", Bulletin de l'APMEP n°418, septembre-octobre 1998.

(8) Ivar Ekeland, *Le calcul, l'imprévu*, Editions du Seuil, Paris, 1984.

(9) A part, bien sûr, pour des problèmes comme celui de la taille cité en introduction !

modèle. Par exemple, le choix de l'ensemble E des résultats possibles d'une épreuve aléatoire est lié à l'usage que l'on veut en faire. Si on lance une pièce, on prend généralement E = {Pile, Face} en éliminant la possibilité pour la pièce de tomber sur la tranche, d'être désintégrée ou satellisée ! L'ensemble E = {Pile, Face} suffit pour modéliser la réalité.

Une autre difficulté réside dans le choix du modèle de résolution (pour simplifier ou tout simplement pour pouvoir faire le problème). Par exemple, de nombreux sujets de baccalauréat doivent se traiter avec un modèle binomial alors que la réalité décrite ne rentre pas du tout dans ce cadre là (tirages sans remise, par exemple) (10). Il me semble que, pour le moins, on pourrait se donner comme objectif de faire prendre conscience à un élève que l'on a choisi le modèle binomial non parce que c'est le seul modèle connu mais par approximation (dans un cas où c'est raisonnable) d'un modèle hypergéométrique plus conforme à la réalité.

Le temps consacré aux probabilités pourrait alors être une occasion privilégiée pour illustrer comment on passe de la réalité d'un problème à son traitement mathématique, les choix que cela implique et les différents modèles entre lesquels il faut se déterminer.

Les trois domaines abordés dans ce paragraphe (géométrie, proportionnalité, probabilités) illustrent le fait que l'on modélise (mais pas toujours de façon explicite) dans le cours de mathématique. Il est alors temps de s'interroger s'il existe, dans d'autres cas, une réelle activité de modélisation.

3. Quelques essais d'explicitation de la modélisation dans l'enseignement

3.1. Au niveau primaire

Le projet Charpak (appelé également "la main à la pâte") fut inspiré d'une expérimentation menée aux Etats-Unis dans les quartiers défavorisés de Chicago. Après une phase expérimentale, il attend toujours sa généralisation. Il se propose de développer les sciences à l'école primaire et met en avant l'apprentissage de la méthode scientifique. Les enfants sont conduits à faire des observations (physiques, biologiques, astronomiques...) à en rédiger des compte rendus et à analyser les résultats obtenus. Ce travail vise donc à développer leurs compétences dans l'observation, la rédaction mais aussi leurs capacités à émettre des hypothèses, à les mettre à l'épreuve de l'expérience en isolant les paramètres sur lesquels on peut agir et à tirer des conclusions qui peuvent être des lois générales même si elles restent très modestes à ce niveau. Il s'agit donc bien là d'une réelle activité scientifique qui peut déboucher sur une modélisation de la réalité.

> *"La vérité du discours scientifique émane de la nature. Elle est objective, mais aussi provisoire. Nos théories (aujourd'hui, nous parlons plus modestement de " modèles "), qui doivent demeurer réfutables, ne fournissent que des représentations, des " images " de la réalité."* (11)

(10) Voir l'article de J.-C. Girard et B. Parzysz "Les maths, c'est pas la réalité !", Bulletin de l'APMEP n°418, septembre-octobre 1998.

(11) *La main à la pâte. Les sciences à l'école primaire.* Présenté par Georges Charpak, Flammarion, Paris.

3.2. Au niveau du collège

Rien (ou presque !) et c'est infiniment regrettable. Mettre un problème (faussement) concret en équation n'est pas faire de la modélisation. La réalité a déjà été simplifiée et les difficultés ne sont pas soulevées. Le choix du modèle n'est pas envisagé et la seule difficulté est le passage du texte de l'énoncé à son écriture dans le registre algébrique (12).

A l'opposé, l'enseignement des statistiques, souvent laissé de côté, serait une bonne occasion de familiariser les élèves avec les situations aléatoires (si le sujet n'était pas tabou avant d'avoir étudié les probabilités). On pourrait montrer la différence entre ce qui est observé (donc du domaine de la réalité, comme les fréquences de certains événements) et ce qui fait partie d'une construction théorique (c'est-à-dire relevant d'un modèle comme la probabilité attribuée à un événement à partir de l'observation de fréquences).

Pour prendre un exemple simple (mais pas trop) on pourrait s'intéresser à la somme des points obtenus en lançant deux dés bien équilibrés. Après avoir conjecturé les résultats possibles et les fréquences prévisibles c'est-à-dire avoir construit un modèle (la distribution théoriques des fréquences est-elle uniforme ? symétrique ? avec un maximum ? etc.), on pourrait le confronter à la réalité c'est-à-dire aux résultats d'une expérience. Il serait alors possible, en faisant la part de la variabilité des résultats d'une expérience à l'autre, de critiquer certains modèles et de voir ceux qui sont acceptables et ceux qui ne le sont pas (13). Ceci suppose une démarche expérimentale qui pourrait être le prolongement d'activités initiées à l'école primaire (du type "main à la pâte") et fournir l'occasion de rencontres (malheureusement trop peu développées) avec le hasard et ses lois (14).

3.3. Au lycée

L'élève de lycée est rarement confronté, en classe, à des situations "concrètes". Par conséquent, il lui est rarement donné l'occasion de réfléchir sur l'activité de modélisation. On peut le regretter !

Le programme de seconde précise cependant : *"on exploitera largement des situations issues de l'algèbre, de la géométrie, des sciences et techniques et de la vie économique et sociale en marquant les différentes phases : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats"*.

Le problème de la modélisation n'y est donc pas explicitement posé. La "réalité" (économique, technique...) est mise sur le même plan que l'algèbre et la géométrie ! Il n'est pas dit que la réalité en question doive être "interprétée" pour se soumettre à un traitement mathématique. Encore moins comment on peut contrôler et exploiter les résultats.

Les programmes de Première et de Terminale suggèrent (respectivement) de proposer des *"exemples d'études numéri-*

(12) Pour plus de détails à ce sujet, voir l'article de Jean-Claude Duperret et Jean-Claude Fénice "L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège", *Repères-IREM*, n° 34, Janvier 1999.

(13) Voir par exemple, J.-C. Girard , "Modélisation et simulation" dans la brochure de la commission Inter-Irem "Statistique et Probabilités" *Enseigner les probabilités au lycée*, Octobre 1997.

(14) Voir l'article de Michel Henry dans ce numéro.

ques et graphiques de problèmes de programmation linéaire à deux variables d'origine économique et sociale" (1re ES) et des *"exemples d'étude de phénomènes exponentiels discrets"* (pour l'apprentissage des suites géométriques) *"ou continus"* (pour l'apprentissage des fonctions exponentielles) *"issus de situations économiques, sociales ou scientifiques"* (Terminale S).

Là encore, il s'agit plus d'illustrations "concrètes" de modèles mathématiques que d'activité de modélisation. Autrement dit, les élèves se verront proposer des situations plus ou moins concrètes présentées de façon qu'elles se prêtent docilement à une application du modèle. On espère ainsi que l'élève comprendra "à quoi ça sert" et "pourquoi on fait ça". Ne risque-t-il pas alors de réduire l'activité de modélisation aux approximations que l'on peut être amené à effectuer dans un calcul ?

Il est dommage de se priver de l'activité qui consisterait, non pas à appliquer le modèle qui vient d'être étudié, mais à chercher, parmi les modèles connus, celui qui s'applique le mieux à la situation et à vérifier les conséquences de ce choix.

Ceci suppose qu'en partant de la réalité, après sélection des variables pertinentes et en faisant des hypothèses sur les relations qui les lient, on aboutisse à la mathématisation faisant intervenir le concept visé.

"Acquérir une connaissance mathématique de cette manière, c'est-à-dire comme un outil de modélisation, permet de satisfaire à deux conditions essentielles du point de vue de l'appropriation du savoir : l'une qui concerne la base opératoire sur laquelle doit reposer, nécessairement, cette appropriation et l'autre qui concerne l'ensemble des situations et des représentations particularisées auxquelles la connaissance a été associée. C'est en ce sens que l'on peut considérer que les processus de modélisation participent directement du processus plus général de conceptualisation." (15)

4. En conclusion

Le bilan concernant l'activité de modélisation dans l'enseignement peut paraître bien pauvre. Pourtant proposer des situations de modélisation comme le suggère J. Julo et comme le projet Charpak le met en place pourrait donner du sens aux connaissances que nous enseignons à nos élèves. D'autre part, ne pas expliciter que l'on est dans un modèle en faisant croire (ou en laissant supposer) que l'on est dans la réalité relève de l'escroquerie intellectuelle et conduit aux dysfonctionnements cités dans l'introduction (comme en géométrie ou en probabilités).

Les activités géométriques mais aussi les problèmes "concrets" en tout genre, en particulier dans le domaine des probabilités et des statistiques, peuvent être, comme on l'a vu, l'occasion de modéliser, et ceci à différents niveaux d'abstraction. Ceci peut entrainer les élèves à résoudre des problèmes de façon réfléchie plutôt que servile mais à condition d'être clair sur le moment où nous abandonnons la réalité pour faire des calculs ou des raisonnements de type mathématique et celui où nous revenons à la réalité.

En effet, modèle ou réalité, le statut

(15) J. Julo, *op. cit.*

d'une affirmation n'est pas toujours clairement explicité. Un journal de vulgarisation scientifique pour adolescents posait récemment [16] la question : "Les équations du second degré, où les trouver dans la nature ?". Des équations, sûrement nulle part ! Tout au plus des morceaux de réalité que l'on pourrait décrire approximativement par des équations du second degré, en attendant mieux.

Ainsi, les autres disciplines scientifiques devraient être également plus explicites à ce sujet : l'atome de Bohr est-il un modèle ou une réalité observée ? Les théories de Wegener sur la tectonique des plaques ou de Darwin sur l'évolution sont-elles des évidences avec lesquelles on ne peut qu'être d'accord et qui nous auraient échappé pendant des siècles ou des théories discutables et de toute façon perfectibles ? etc.

N'oublions pas, en effet, que la meilleure des modélisations ne saurait, de toute façon, qu'être imparfaite car ce que nous percevons de la réalité n'est pas La réalité.

> *"Je me figure toujours que la nature est un grand spectacle qui ressemble à celui de l'opéra. Du lieu où vous êtes à l'opéra, vous ne voyez pas le théatre tout à fait comme il est ; on a disposé la décoration et les machines pour faire de loin un effet agréable, et on cache à votre vue ces roues et ces contrepoids qui font tous les mouvements."* Fontenelle, *Entretiens sur la pluralité des mondes (1686).*

(16) *Science et Vie Junior*, numéro spécial, décembre 1998.