L'ACCÈS AU LITTÉRAL ET À L'ALGÉBRIQUE : UN ENJEU DU COLLÈGE

Jean-Claude DUPERRET,
Jean-Claude FENICE
IREM de Reims

"Le calcul algébrique est un outil. Pour quoi faire ? L'idéal serait que cet outil n'apparaisse pas comme un carcan rigide ne servant à rien d'autre qu'à s'enrichir lui-même et fonctionnant à vide, mais au contraire comme un moyen de simplifier les problèmes. Bref, que cet outil soit construit comme réponse à des classes de problèmes."

(Conclusion d'un groupe de travail IREM animé par F. COLMEZ).

"L'usage de symboles et de lettres a mis longtemps à se dessiner. Cependant le calcul algébrique a été possible sans recours aux symboles et aux lettres, ce qui a été néanmoins un obstacle à son développement. Notons que pour certains, les symboles n'étaient pas nécessairement une aide. Si Herigone, vers 1645, écrit : "J'ai inventé une nouvelle méthode pour formuler des démonstrations, résumée et intelligible, sans usage de quelque langage", Hobbes, le philosophe, rétorque vers la même époque : "Les symboles sont pauvre mesquinerie, même en tant que nécessaire échafaudage de démonstration. Les symboles, même s'ils raccourcissent l'écriture, ne font pas comprendre plus vite que si c'était écrit en mots... car il y a un double travail de l'esprit, l'un de réduire les symboles en mots qui sont eux-mêmes symboles, l'autre d'atteindre aux idées dont elles sont le signe".

Peut-on gommer de notre enseignement les errements historiques et faire comme si l'usage des lettres et du symbolisme allait de soi ?"

(Chevallard)

Algèbre : approche historique et épistémologique (1)

Au début étaient les problèmes !

Que ce soit au 18^e siècle avant Jésus Christ, à Babylone, ou au 3^e siècle avant Jésus Christ, avec Euclide, ou au 3^e siècle après Jésus Christ, avec Diophante, on retrouve dans l'histoire le rôle fondamental des mathématiques : résoudre des

(1) Cette partie sur l'aspect historique s'appuie beaucoup sur le travail de Jean-Paul GUICHARD (IREM de Poitiers) et a pu bénéficier de remarques et compléments éclairés d'Evelyne BARBIN et de Henri PLANE (IREM de Paris VII).

problèmes. Si à chacune de ces époques on assiste à une résolution essentiellement géométrique, on voit aussi poindre les algorithmes qui nous emmèneront vers les équations. Diophante va déjà loin dans cette voie, en utilisant explicitement "un nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités" dénommé "arithme".

Puis vint Al Khwarizmi !

C'est toujours à des problèmes de toutes sortes (problèmes d'héritage entre autres) que se consacrent les mathématiciens arabes au 9e siècle. Mais l'un d'entre eux, Al Khwarizmi, originaire de Bagdad, va introduire une rupture fondamentale : en regroupant différentes sortes de problèmes qui se résolvent par le même algorithme, il déplace l'objet d'étude qui devient la résolution d'équations.

Nous allons rapidement examiner deux aspects de sa "méthode" : tout d'abord les transformations de base qui permettent de ramener tout problème à une forme canonique ; ensuite la validation des algorithmes de résolution par la géométrie. Pour aider à la lecture, nous traduisons son texte en utilisant des "lettres", mais nous insistons sur le fait qu'il n'y a pas de x et de x^2 chez lui, ce qui montre bien la distinction essentielle entre l'algèbre et la littéralité.

Les transformations de base :

– ***"al jabr"*** (d'où vient le mot algèbre), qui peut se traduire par *compensation, restauration, remplissage, reboutement...* (au 16e siècle, en Espagne, un "algébriste" était un rebouteux !)

Exemple : "Si 3 choses diminuées de 5 valent 2 choses, je compense avec 5 ; alors 3 choses diminuées de 5 et augmentées de 5 valent 2 choses augmentées de 5 ; 3 choses valent donc 2 choses et 5."

Traduction moderne :

$$3x - 5 = 2x$$
$$3x - 5 + 5 = 2x + 5 \quad \text{al jabr}$$
$$3x = 2x + 5$$

Il s'agit de supprimer les "–".

– ***"al-muqabala"*** qui peut se traduire par *mise en opposition, confrontation, balancement* :

Exemple : "Si 3 choses valent deux choses et 5, alors 1 chose vaut 5."

Traduction moderne :

$$3x = 2x + 5$$
$$x = 5 \quad \text{al muqabala}$$

Il s'agit de regrouper les termes semblables dans un même membre (celui où elles sont en nombre positif, car il n'y a pas de négatif chez Al Khwarizmi).

"al-hatt"

Exemple : " Si 2 carrés et 42 valent 20 choses, alors 1 carré et 21 valent 10 choses."

Traduction moderne :

$$2x^2 + 42 = 20x$$
$$x^2 + 21 = 10x \quad \text{al hatt}$$

Autre exemple : " Un demi-carré vaut 5 choses et 3, alors 1 carré vaut 2 fois 5 choses et 2 fois 3 "

Traduction moderne :

$$\tfrac{1}{2}x^2 = 5x + 3$$
$$x^2 = 2 \times 5x + 2 \times 3 \quad \text{al hatt}$$
$$x^2 = 10x + 6$$

Il s'agit ici de multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre pour arriver à une forme canonique.

On voit combien ces transformations sont proches de celles que nous enseignons à nos élèves (ajouter ou retrancher... ; multiplier ou diviser...).

La résolution par la géométrie

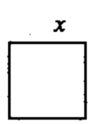
Al Khwarizmi étudie les équations du 1er et 2e degré en les ramenant à l'aide des transformations ci-dessus à l'une des 6 formes canoniques (en langage moderne) :

$ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $x^2 + bx = c$;
$x^2 + c = bx$; $bx + c = x^2$

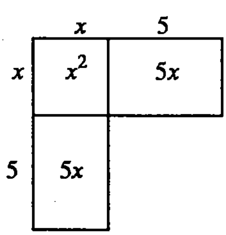
Regardons comment il termine alors la résolution en utilisant la géométrie d'Euclide, sur la forme $x^2 + bx = c$.

Exemple : « Un carré et 10 choses valent 39 » ($x^2 + 10x = 39$)

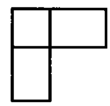
1) On construit un carré de côté x :



2) On borde ce carré de 2 rectangles dont l'aire respective est $10\frac{x}{2}$. On obtient donc 5 comme autre dimension :

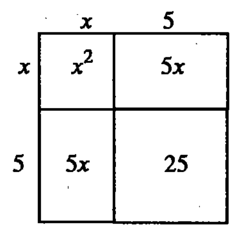


Cette figure,



appelée "gnomon", montre bien l'influence des Grecs sur les Arabes, qui furent leurs fidèles traducteurs.

3) On complète alors le grand carré :



– L'aire de ce carré est $x^2 + 2 \times 5x + 25$
– Or $x^2 + 10x = 39$, donc l'aire de ce carré est 64
– Donc le côté de ce carré est 8.
– Or le côté de ce carré est $x + 5$.
– D'où : $x = 3$.

(Al Khwarizmi ne parle pas de l'autre racine de cette équation, car pour lui, 64 n'a qu'une racine : 8).

Regarder $x^2 + 10x$ comme le "début" d'un carré, c'est bien le fondement de la résolution des équations du second degré en 1re !

Viète invente le calcul littéral

En 1591, Viète écrit son *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle,* ouvrage dans lequel il généralise et formalise l'utilisation des lettres :

"Afin que cette méthode (la mise en

équation) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle, E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D, ou toute autre consonne."

Mais si Viète crée un tel langage, ce n'est pas pour formaliser l'écriture, mais, comme il le dit dans son traité, pour se donner de nouveaux outils pour résoudre les problèmes.

On peut noter qu'on a régressé dans cette formalisation, et quand nos élèves de 3e découvrent "l'équation" $y = mx + p$, ils se demandent bien quel est le statut de chacune de ces lettres.

Descartes systématise la "résolution par l'algèbre"

En 1637, Descartes initie une méthode qui va porter son nom, la méthode cartésienne, méthode qui consiste à "algébriser la géométrie".

Descartes opère ainsi un renversement systématique entre l'algèbre et la géométrie : en effet, jusque là les mathématiciens démontraient leurs algorithmes de résolution par la géométrie, comme on l'a vu chez Al Khwarizmi, en s'appuyant sur le livre V d'Euclide sur la mesure. Lui indique comment résoudre "tous les problèmes" de géométrie par l'algèbre :

"Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité de deux façons : ce qui se nomme une Équation."

L'algébrisation des problèmes va donner une importance croissante au calcul littéral, en systématisant la manière de s'en servir pour leur résolution.

En 1798, Condillac, dans la *Langue des calculs* dit : *"Les mathématiques sont une science bien traitée dont la langue est l'algèbre"*.

L'algèbre et l'analyse

En regardant les lettres x, y, ... non plus comme des quantités fixes, connues ou inconnues, mais comme des quantités variables, l'algèbre rejoint l'analyse. La force simplificatrice de l'algèbre va s'imposer chaque fois qu'elle le pourra dans ce domaine de l'analyse : travail sur des quantités infinitésimales, dx, dy, ... ; algébrisation des limites...

Et nos élèves de lycée ne s'y trompent pas : ils s'attachent très vite aux formules sur les dérivées $(f+g)' = f' + g'$, ..., en oubliant le concept délicat de dérivée en un point.

Le domaine des structures

Avec Gauss, Grassmann, Cayley, Boole... les calculs vont porter sur des objets de plus en plus divers : congruences, vecteurs, matrices, ensembles, éléments logiques... et vont donner naissance au 19[e] siècle à l'algèbre symbolique qui assure une nouvelle rupture : ce ne sont plus les "choses" désignées par les lettres, "choses" de plus en plus quelconques et diverses, qui vont être objet d'étude, mais les opérations que l'on effectue sur elles. C'est l'arrivée des structures, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels... et la structure suprême, celle qui gère 3 opérations, 2 internes et une externe, et les liens qui les unissent : l'algèbre !

L'algèbre et l'enseignant (de mathématiques)

Si vous demandez à un enseignant de collège ce qu'est l'algèbre, il vous dira l'accès au littéral, à la résolution d'équations, et à leur utilisation pour résoudre des problèmes. Si vous demandez la même chose à un universitaire, il vous répondra les structures, et vous demandera de préciser s'il s'agit d'algèbre générale, d'algèbre linéaire ou multilinéaire, d'algèbre de Boole... Voilà des contenus bien différents pour la même étiquette !

Mais si vous rencontrez un collègue ayant franchi la cinquantaine (il y en a encore en activité !), lui vous dira qu'il se demande bien au fond ce qu'est l'algèbre : avant 1970 il enseignait au long du collège arithmétique et algèbre, faisant un raccourci de Diophante à Descartes en passant par Viète. En 1970, on lui apprend que l'algèbre, ce n'est pas du tout ça : c'est l'arrivée des mathématiques modernes, et l'étude des structures, une transposition de l'université au collège qui a coûté très cher. Il s'en remet péniblement lorsqu'en 1978 on remet un peu plus à l'honneur les nombres, remettant à une plus juste place la construction de leurs ensembles. En 1986, il voit disparaître le mot algèbre. C'est dans les travaux numériques qu'il retrouve ce qu'il faisait avant 1970, renouant en ceci avec l'histoire.

Dans ces programmes de 86, ainsi que dans ceux de 96 qui leur sont très proches, on peut cependant regretter de n'avoir pas conservé un minimum de structures, pour mettre en évidence, outre les propriétés usuelles des opérations (naturelles chez beaucoup d'élèves), la distributivité comme lien essentiel entre multiplication et addition, l'existence de symétriques, opposé et inverse, comme validation de la résolution des équations.

L'algèbre, le collégien, le lycéen, et l'étudiant (en mathématiques)

Les programmes de 1986 ont donc remis à l'honneur la première partie de l'histoire de l'algèbre : s'attaquer à des problèmes d'arithmétique, comme Diophante ; apprendre à traduire les problèmes dans un langage symbolique qui ne soit pas contingent à la réalité, mais à des règles clairement établies, comme Viète ; utiliser ce langage pour transformer le problème en équation comme Descartes ; apprendre à ramener de telles équations à une forme canonique ($bx = c$; au collège éventuellement $ax^2 = c$) comme Al Khwarizmi. Il est important qu'une telle démarche scientifique, même si elle est difficile, soit enseignée à tous, c'est à dire au niveau du collège.

Si notre collégien devient un lycéen scientifique, il abordera la deuxième partie de l'histoire, celle qui donna naissance à l'analyse : il verra que ces deux domaines ont des finalités très différentes, qu'on pourrait caricaturer en disant que l'algèbre est la science de l'exactitude, alors que l'analyse est celle de l'approximation. Il comprendra que tout ce qui peut s'algébriser dans l'analyse en sera simplifié (algèbre des limites...). Il apprendra que l'analyse est indispensable pour certaines équations (existence et unicité d'une solution sur un intervalle d'une équation du type $f(x) = \lambda$), voire, plus tard, pour établir certains résultats fondamentaux en algèbre, comme le théorème de d'Alembert (tout polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré à coefficients complexes a n racines complexes distinctes ou confondues) qu'il est impossible de montrer avec une démarche purement algébrique.

Si, de lycéen scientifique il devient étudiant en mathématiques, il aura accès à la troisième partie de l'histoire : celle des structures.

En ceci, on peut dire que l'ensemble de ce cursus est cohérent, et en tout cas validé par l'histoire !

Quelques réflexions didactiques

Faire des mathématiques, enseigner des mathématiques

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Voilà une question bien vaste et bien ambitieuse à laquelle nous n'avons certes pas la prétention de répondre dans sa globalité. Mais au regard de l'histoire, nous pouvons dire qu'à l'origine, faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes.

Pourquoi dès l'aube de l'humanité l'homme a-t-il cherché à résoudre des problèmes, ses problèmes ? Pour se construire une intelligibilité du monde dans lequel il vit. En quoi les mathématiques l'ont-elles aidé dans cette tâche ? En créant des modèles !

Résoudre des problèmes, c'est développer chez l'individu une démarche scientifique, et par là même, des capacités et des comportements d'action transférables dans d'autres domaines : choisir ou construire le modèle le plus pertinent, rechercher la meilleure stratégie, valider...

Enseigner des mathématiques, c'est donc mener de front deux objectifs :

– apprendre à modéliser.
– enseigner les modèles.

Cette tâche est une véritable gageure, mais elle est essentielle pour amener l'élève à apprendre l'aller retour entre la situation et le modèle.

Mathématiques et "réalité"

Si faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes, ces problèmes prennent leur sens dans la "réalité". Mais si les mathématiques se construisent à partir du monde réel de façon pragmatique, elles idéalisent très rapidement ce réel en créant des modèles fondés sur des règles non contingentes à la réalité. En ce sens les mathématiques ne sont pas la réalité, ce qui renvoie à la question : "Où se situe-t-on lorsqu'on résout un problème ?"

Pour répondre à une telle question, il faut clarifier la notion de problème. Nous en ferons, de façon très grossière, 3 catégories :

(1) Les problèmes *"réels"*, c'est-à-dire ceux issus de la réalité.
(2) Les problèmes *semi-idéalisés*, c'est-à-dire ceux pour lesquels il reste à faire "une transformation d'informations", mais où le modèle de traitement et de validation est clairement établi.

(3) Les problèmes *idéalisés*, c'est-à-dire ceux qui sont donnés dans le modèle.

Dans notre enseignement de collège, et plus particulièrement en "algèbre", ce sont essentiellement les deux dernières catégories qu'on rencontre, ce qui renvoie à une autre question : "Y a-t-il vraiment modélisation dans ce que nous proposons à nos élèves ?"

Pour clarifier cette question, nous introduirons un nouveau concept : la "réalité abstraite", concept intermédiaire entre la réalité et les mathématiques. Ce concept nous paraît devoir remplir une double finalité :

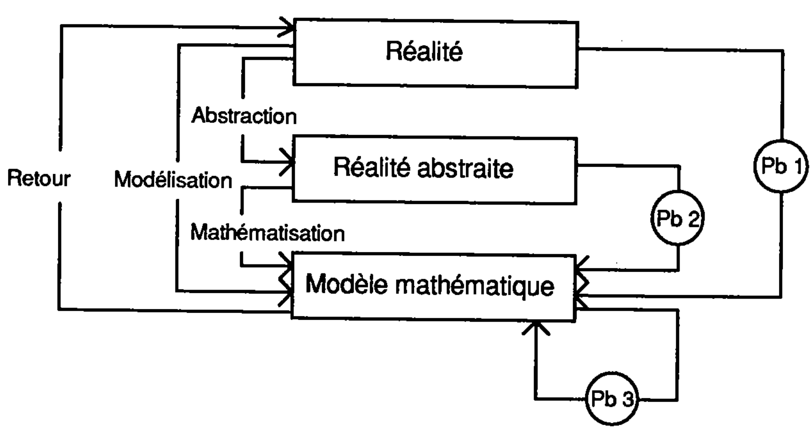
1. A partir d'une situation réelle, créer une situation épurée, idéale, abstraite, entrant dans un champ de situations déjà reconnues, pour lesquelles l'accès à la mathématisation devient un acte "raisonnable".

2. A partir d'un modèle mathématique, créer un champ de problèmes où l'habillage "concret" permettra de revenir à une pseudo-réalité, champ de problèmes où la mathématisation sera donc au niveau du réflexe, champ qui constitue les situations abstraites définies ci-dessus.
On peut résumer cela par le schéma ci-dessous.

Ceci nous amène à quelques réflexions sur l'interaction entre mathématiques et réalité :

– Les mathématiques permettent d'expliquer, de valider, de modéliser des situations issues du monde réel.
– Inversement ces situations permettent de motiver l'apprentissage des mathématiques.
– il ne peut y avoir de passage de la réalité aux mathématiques sans passage à l'abstraction : abstraire, c'est idéaliser une situation pour qu'elle puisse se mathématiser ; abstraire, c'est simplifier ; abstraire est peut-être l'acte le plus important que nous ayons à apprendre à nos élèves.

Mais revenons à l'algèbre : l'algèbre est un modèle de "traitement", qui se construit au collège. C'est le lieu privilégié des problèmes "semi-idéalisés". La réalité ne va pas donner de sens à l'algèbre, mais va motiver son enseignement.



Quels problèmes (2) *pour motiver le recours à l'algébrisation ?*

Examinons les deux problèmes suivants, classiques de 4^e, qu'on retrouve dans un chapitre regroupant problèmes et résolution d'équations du 1er degré (modélisation et modèle).

Problème 1
Quatre allumettes mises bout à bout avec une cigarette de 7 cm mesurent 25 cm en tout.
Quelle est la longueur d'une allumette ?

On pourrait bien sûr s'interroger sur la "réalité" d'un tel problème pour un élève de 4^e ! Mais notre problème est plutôt centré sur la question :

"Pourquoi irait-il chercher l'algèbre – équation $4x + 7 = 25$ – pour résoudre un problème qu'il sait faire depuis longtemps par "l'arithmétique", celle-ci assurant la cohérence avec le sens "externe" du problème ?" Il en va de même pour tous les problèmes se modélisant par une équation du type $ax + b = c$.

Problème 2
Bernard a 3 fois l'âge d'André plus 4 ans, et il a 4 fois l'âge de Claude plus 2 ans. André et Claude ont le même âge. Quel est l'âge de Bernard ?

Ici "l'arithmétique" peut se trouver prise en défaut (3), et la possibilité de résoudre l'équation "$3x + 4 = 4x + 2$" devient un enjeu pour la résolution du problème. Si on fait cette résolution, on peut être amené à écrire $-x = -2$. Où est le sens d'une telle phrase mathématique par rapport au problème ? C'est une rupture considérable pour l'élève de 4^e : *accepter de résoudre un problème par algèbre, c'est accepter d'en perdre le sens externe. Il faut donc soigneusement construire le sens interne.* Et pour ceci, il faut être bien clair avec les élèves sur :

– ce qui relève des conventions (écriture, priorité des opérations, rôle des parenthèses...) qu'on ne peut justifier que par le souci de cohérence d'écriture,
– ce qui relève des propriétés liées à la structure de corps, qu'il faut flécher de façon précise, même si les structures ne sont plus objet d'enseignement au collège.

Seul un travail dans le modèle permettra à l'élève d'acquérir assez d'aisance dans le traitement des équations pour qu'il ose en faire un outil "naturel" pour la résolution de problèmes. On ne pourra échapper aux "gammes" !

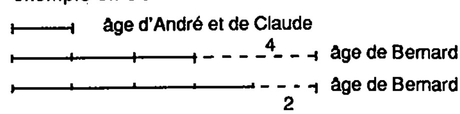
Lorsqu'une inconnue en cache une autre

Dans le problème n° 3, lui aussi issu d'un manuel de 4^e, le texte du problème fait clairement apparaître deux inconnues.

Problème 3
Le périmètre d'un rectangle est 80 m. La longueur mesure 20 m de plus que la

(2) Certains de ces problèmes sont issus du manuel *IREM de Lorraine*. Choisis pour leur intérêt, ils ont cependant été dévoyés de leur objectif. Que les auteurs veuillent bien nous en excuser !

(3) Les tenants de l'arithmétique pourront certainement dire que l'algèbre n'est ici pas nécessaire, et que les élèves trouveront ce problème sans passer par la résolution d'une équation, par exemple en s'aidant d'un schéma :



Mais on ne peut nier que le passage à l'algèbre est une "force" dans ce problème.

largeur. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Qu'attend-on en 4^e ? Que l'élève arrive à faire de la substitution sans l'écrire, c'est à dire, en ayant choisi une des dimensions comme inconnue, par exemple la longueur, qu'il soit capable d'arriver à :

$$2\,(x + (x - 20)) = 80$$

Qu'est-il naturel d'attendre ?

$$\begin{cases} x = y + 20 \\ 2(x + y) = 80 \end{cases}$$

Or ce traitement relève du programme de 3^e. En proposant ce problème trop tôt, ne perdons-nous pas l'occasion de mettre en évidence la force simplificatrice de l'algèbre ? L'arrivée de la 2^e inconnue va marquer la dominance de l'algèbre comme modèle de traitement. Si l'on veut aborder avec nos élèves de tels problèmes dès la 4^e, il faut clairement distinguer avec eux deux temps dans la mathématisation :

– le recensement des inconnues, le jeu des contraintes mutuelles, le choix de la plus pertinente, c'est à dire celle qui permettra aux autres de s'écrire facilement en fonction d'elle.
– la mise en équation proprement dite.

On retrouve ici la démarche de Descartes.

On peut parfaitement travailler sur des problèmes conduisant à l'utilisation de deux "lettres", ne débouchant pas nécessairement sur une équation. A titre d'exemples :

Problèmes 4
– La somme de deux nombres pairs est-elle paire ou impaire ?
– La somme de deux nombres impairs est-elle paire ou impaire ?
– Le produit de deux nombres entiers consécutifs est-il pair ou impair ?

De tels exercices donnent aux lettres le statut d'outil de démonstration, et amènent à la question :

Faut-il vraiment se mettre dans la réalité pour qu'il y ait problème ?

Pour répondre à cette question, appuyons-nous sur le problème n° 5, devenu un grand classique, proposé chaque année par l'un de nous deux à ses élèves de 3^e :

Problème 5
Deux nombres ont pour somme 300.
De combien augmente leur produit si j'augmente chacun d'eux de 7 ?

Il faut, chaque année, reprendre l'énoncé avec eux pour les aider à bien comprendre le problème.

A partir de là, immanquablement, surgissent des stratégies numériques, d'abord avec des nombres "sûrs", 150 et 150, puis des choix plus arbitraires.

Le constat général : "il augmente de 2 149" dans tous les cas les conduit à se poser la question de la généralisation et de la validation.

Le passage au littéral fait l'objet d'une longue négociation !

$$\begin{aligned}(a + 7)(b + 7) &= ab + 7a + 7b + 49 \\ &= ab + 7\,(a + b) + 49 \\ &= ab + 7 \times 300 + 49 = ab + 2.149\end{aligned}$$

Par contre la plupart des élèves

abordent alors facilement la suite :

– si la somme est S, l'augmentation est $7S + 49$.
– si l'augmentation de chaque facteur est n, l'augmentation du produit est $300n + n^2$.
– si la somme est S, et n l'augmentation de chaque facteur, le produit augmente de $nS + n^2$.

Le retour à la création par chacun de problèmes où ils définissent n et S assure le retour au sens du problème initial.

Nous tirerons trois conclusions d'une telle activité :

– Elle est pour nous une activité de modélisation, car elle en comporte deux composantes essentielles :

- un champ de problèmes
- une méthode d'investigation

– Elle montre la force de l'algèbre comme outil de généralisation qui assure le passage du numérique au littéral (ici avec la distributivité).

– Elle illustre le fait qu'il vaut mieux un "vrai" problème posé directement dans les mathématiques, que de "faux" problèmes pseudo-concrets dont l'habillage cache parfois une absence de mathématiques !

Les élèves feront de la résistance...

Les activités proposées dans la suite concerneront d'abord les élèves de 5^e, car ce niveau, nous semble-t-il, est le premier creuset de la subtile alchimie supposée transférer et étendre les capacités acquises sur des expressions numériques au domaine algébrique. Ce n'est pas tâche facile, car, nous l'avons déjà mis en évidence, il faut avancer simultanément sur deux terrains :

– l'un, conceptuel et paradoxal : installer dans l'esprit des élèves une représentation de l'algèbre comme *outil d'expression et de résolution efficace, alors que leur niveau en calcul algébrique ne pourra pas permettre d'aborder rapidement des problèmes nécessitant véritablement son utilisation,*
– l'autre, technique : leur apprendre un *algorithme de résolution, impliquant le renoncement à des méthodes arithmétiques bien assises sur le sens du problème, et jusque là suffisantes.*

Développons un peu : supposons que nous ayons réussi à entraîner nos élèves dans le sillage de notre conviction. Il reste encore que la mise en équation d'un problème soulève bien des difficultés :

– l'élève doit *reconnaître l'inconnue du problème, accepter de la désigner par une lettre et d'opérer sur elle comme il le ferait sur un nombre connu,*
– de plus il doit savoir *traduire les données* (le plus souvent verbales) d'un énoncé en *une chaîne d'opérations écrite en ligne, en respectant les conventions d'écriture.*

C'est pour lui une démarche doublement difficile. Il doit d'un côté accepter des conventions d'écriture, opérer sur une "chose" (une lettre) qui "ne donne pas de résultat" (voir plus loin : statut de l'égalité), donc vide de sens, et de l'autre aller à l'encontre de sa pratique habituelle de résolution. Comme il l'a appris à l'école élémentaire, il part de ce qui est connu, et, *le sens de l'énoncé éclairant le choix des* *opérations*, de résultat numérique en résultat numérique, il aboutit à la valeur inconnue, cherchée.

Malheureusement, dans la résolution algébrique que l'on veut substituer à cette démarche, une fois le problème traduit en équation on applique une méthode de résolution indépendante du sens du problème posé. Celui-ci *n'indique plus le choix des étapes de la résolution* : il va même *devenir un obstacle* à l'acquisition de l'algorithme... Les règles algébriques de résolution, elles, reposent sur une *justification mathématique* (la structure algébrique des nombres : tout nombre possède un opposé, il existe un inverse pour tout nombre non nul, tout nombre est régulier pour l'addition, tout nombre non nul est régulier pour la multiplication). Mais pour être opérationnelles, elles vont donner lieu à des algorithmes, voire des "recettes" (transposition d'un membre dans l'autre...). La perte de sens fait obstacle, le problème n'éclaire plus la démarche, et pour que l'élève accepte de renoncer à ses méthodes arithmétiques, il faut proposer rapidement des problèmes qui les mettent en échec.

En 5^e : Calcul numérique... algébrique... mise en équation... résolution...

Les activités proposées ci-après illustrent les étapes de la démarche adoptée (elles sont à varier et multiplier) :

1. Asseoir la pratique de l'écriture et du calcul des expressions numériques.
2. Faire accepter de nouveaux statuts de la lettre dans une expression.
3. Faire prendre conscience que le symbole "=" n'est pas seulement employé pour annoncer un résultat (représentation malheureusement confortée par la touche = des calculatrices de collège).
4. Faire découvrir qu'utiliser les lettres, avec ces nouvelles significations, permet de traduire économiquement des programmes de calcul, des énoncés de formules, pour une utilisation facilitée.
5. Faire constater que savoir transformer des expressions permet de résoudre des problèmes.
6. Faire apprendre à résoudre une équation traduisant un problème, vérifier les solutions, les interpréter.

a) Du numérique...

Une maîtrise suffisante du calcul numérique apparaît comme prérequis au transfert de compétences de l'arithmétique à l'algèbre. C'est pourquoi nos premières activités préparatoires en 5^e insistent sur la pratique du calcul mental (utilisation de nombres simples), la connaissance des priorités opératoires (utilisation des parenthèses, priorité de la multiplication...), des conventions d'écriture et de lecture. Les manuels traitent généralement abondamment cette étape. Nous rappellerons simplement les intentions qui sous-tendent ces activités :

– *Faire rappeler aux élèves la signification des parenthèses* : elles indiquent l'ordre d'exécution lorsque plusieurs opérations de natures différentes sont présentes dans un programme de calcul écrit en ligne.

– *Faire utiliser les parenthèses* pour écrire en ligne une telle suite d'opération. A titre d'exemple, on peut varier les exercices suivants :

L'exercice 1 se situe à un simple niveau de reconnaissance : savoir *reconnaître* une écriture correctement parenthésée (remarque : à ce moment de l'apprentissage, aucune convention de simplification n'a encore été présentée). C'est l'occasion de faire constater qu'organiser n opérations "en ligne" nécessite $n - 1$ parenthèses. La prise de conscience de la "lourdeur" consécutive de l'écriture facilitera alors l'acceptation des conventions à venir.

L'exercice 2, demandant d'organiser l'ordre du calcul par des parenthèses, se situe à un niveau plus difficile – synthèse des connaissances, création – mais il motive bien les élèves, et peut même faire l'objet d'une compétition dans la classe.

Exercice 1

Samedi après-midi, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 7,20 F, un lot de 5 stylos à 7,50 le lot, 3 cahiers identiques, de même prix. On lui a rendu 43 F lorsqu'il a donné son billet de 100 F à la caissière.

– Pour calculer le prix d'un cahier, lesquels de ces calculs **écrits en une seule ligne** te semblent donner la réponse correctement ?

A = 100 – 43 – 7,20 × 4 + 7,50 : 3
B = 100 – (43 – (7,20 × 4) + (7,50 : 3))
C = [(100 – 43) – ((7,20 × 4) + 7,50)] : 3
D = (100 – 43) – (7,20 × 4) + (7,50 : 3)
E = [((100 – 43) – (7,20 × 4)) – 7,50] : 3

Exercice 2

Compléter l'expression " 3... 3... 3... 3 " avec une ou plusieurs des 4 opérations, et des parenthèses, de façon à obtenir tous les nombres de 0 à 10.

(On peut utiliser quatre "4", et demander les nombres de 0 à 15, ou quatre "6" et demander les nombres de 0 à 20...)

Au passage, on encourage le calcul mental grâce à la simplicité des nombres choisis.

– *Faire découvrir les conventions :* L'utilité, sinon la nécessité, d'utiliser des conventions pour alléger l'écriture des "programmes de calcul en ligne" étant apparue dans le bilan fait avec les élèves, on propose de découvrir ces règles grâce à la calculatrice (scientifique, type Collège ; une calculatrice rétroprojetable est souhaitable...). Celle-ci devient alors outil d'apprentissage, et prendra un statut de référent pour rappeler les conventions oubliées.

a.– On fait rappeler d'abord, en calculant sur des expressions comme $(2 + 3) + (8 + 7)$, $(2 \times 3) \times (5 \times 10)$, la particularité de ces deux types de suites d'opérations qui laissent une totale liberté de l'ordre du calcul. On fait constater parallèlement que cela ne fonctionne plus, ni avec la soustraction, ni avec la division, ni avec les "mélanges" d'opérations.

b.– Avec la calculatrice, étude de la "frappe en suivant" (mélange d'opérations "réciproques" + et – ; ou × et :). On fait découvrir qu'en l'absence de parenthèses, une suite d'additions et de soustractions (respectivement de multiplications et divisions) se calcule de gauche à droite.

Exemple :

Calcul à exécuter	Résultat affiché à chaque frappe	Remarques
3 + 8 – 7 + 2 =	3 ; 3 ; 8 ; 11 ; 7 ; 4 ; 2 ; 6	la calculatrice effectue...

c.– On fait ensuite découvrir qu'en l'absence de parenthèses, la multiplication (la division) est prioritaire sur l'addition et la soustraction.

d.– Des manipulations analogues, sur des expressions utilisant 3 ou 4 opérations différentes permettent de trancher dans des cas comme $5 + 3 \times 12 : 4$ ou $5 + 12 : 4 \times 2 - 1$. Malgré l'absence de problème posé en amont pour les motiver, ces exercices techniques sur des nombres simples mobilisent bien l'attention des élèves, entraînent au calcul mental, et peuvent même être l'occasion d'un jeu de compétition intergroupes dans la classe.

Remarque : on constate que s'installe souvent une sorte de priorité de l'addition sur la soustraction, lors du calcul "à la main". L'expression "11 – 8 + 1", par exemple, est fréquemment calculée comme 11 – 9. Ceci peut durer jusqu'en 3[e] pour un pourcentage non négligeable d'élèves, dans les sommes algébriques : c'est le moment d'en débattre en groupe, de faire prendre conscience du non-respect de la convention dans ce genre de pratique, et de l'incidence sur le résultat.

b)... au littéral : des lettres pour quoi faire ?

Les élèves ont déjà rencontré l'utilisation des lettres dans les formulaires, et pratiqué des exercices de substitution. Dans $a = b \times h : 2$, les lettres ont encore souvent un simple statut d'abréviation ; le signe "=" celui d'annonceur du "résultat" d'un programme de calcul. Nous allons donc maintenant travailler à faire évoluer ces statuts (chacun des exercices suivants ne constitue bien sûr qu'une illustration du type d'activités que l'on peut mener).

L'exercice 1 vise à :

– faire distinguer, en comparant des expressions numériques, les composants invariants de celui qui se comporte comme une lettre (laquelle prend dans ce cas un statut de *paramètre*, beaucoup plus délicat à accepter que le statut d'inconnue, nous y revenons plus loin),
– faire remarquer l'économie de la traduction algébrique (d'une expression fonctionnelle, dans ce cas), aussi bien en lecture qu'en écriture.

Exercice 1

Pour remplir le tableau des prix de ses différents sachets de chocolats, un commerçant a effectué les calculs ci-dessous :

$30 + 2 \times 5$; $30 + 2 \times 6$; $30 + 2 \times 7$; $30 + 2 \times 8$; $30 + 2 \times 9$... etc., jusqu'à $30 + 2 \times 25$.

Il veut communiquer par téléphone cette liste de calculs à un collègue. Comment pourrait-il raccourcir le message ? (c'est-à-dire éviter de dicter exactement ce qui est écrit ?).

Les diverses suggestions suscitent un débat : si aucun élève ne l'a proposée, l'utilisation d'une lettre pour désigner la seule variable de cette situation doit être apportée par le professeur.

Ensuite, les exercices d'expression littérale de situations (à support numérique et/ou géométrique) doivent être multipliés, ainsi que les exercices de substitution de valeurs numériques dans une formule donnée (voir plus loin, exercices proposés en 4^e). Il s'agit d'installer un nouveau statut de l'utilisation d'une lettre : celui de *paramètre*. Il devra lutter contre celui *d'abréviation* (*h* pour *hauteur*, *c* pour *côté*...) sans doute déjà rencontré, ne serait-ce que dans les formulaires. Si cet usage peut éventuellement revenir par la suite, une fois le statut de paramètre accepté, comme aide à rappeler la signification des différentes grandeurs en jeu dans un même problème, il semble plus judicieux, pendant la période d'apprentissage du calcul littéral, de s'écarter de cette représentation "abréviation". Viète et Descartes distinguaient clairement dans leurs notations le statut *d'inconnue* (valeur *à déterminer*, dans un contexte de données connues) et celui de *paramètre* (valeur *indéterminée, pouvant être quelconque dans la situation étudiée*), utilisant pour celui-ci les premières lettres de l'alphabet et pour celui-là les dernières. Cette précaution raisonnable semble avoir disparu de nos manuels, et même de nos habitudes. Mais pour l'élève, entre la recherche d'un nombre inconnu, en quelque sorte préexistant et désigné provisoirement par une lettre acceptée comme un nombre, et les manipulations sur une égalité d'expressions littérales où les lettres ne désignent plus rien de précis, il y a *une énorme rupture de contrat*. Et lorsque la distinction est possible, changer de notations de façon cohérente, selon que l'on se place sur l'un ou l'autre terrain, peut aider à expliciter cette rupture : on peut présenter par exemple *l'identité* relative à la différence de deux carrés sous la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, *la mise en équation* d'un problème sous la forme $26 - x^2 = 1$, et souligner à chaque occasion la différence fondamentale entre ces deux situations.

L'exercice 2 va dans ce sens. Il veut conduire les élèves à :

– accepter que la lettre ne désigne pas une valeur "fixée à l'avance", en lui donnant successivement des valeurs différentes (statut de paramètre),

– considérer une égalité comme une *phrase* qui peut être fausse ou vraie, selon la valeur attribuée à la lettre,

– se mettre d'accord sur ce que signifie : "égalité de deux expressions *littérales*" (notion d'identité).

Exercice 2

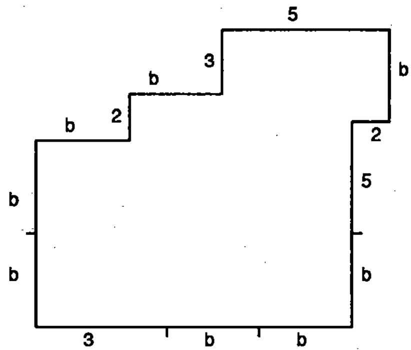
Lucie a calculé les expressions " $n \times n$ " et " $2\,n$ " pour $n = 0$, puis pour $n = 2$.

Elle conclut : l'expression " $n \times n$ " est égale à l'expression " $2n$ ".

Etes-vous d'accord ? Expliquez.

L'exercice 3 demande de "calculer sur des lettres", à savoir, transformer une expression littérale pour prouver son identité à une autre. Les élèves doivent, à ce niveau, se dégager des vérifications numériques, et *faire confiance aux règles de transformation* (distributivité, ici) pour valider l'identité... C'est un cap d'abstraction difficile, il nécessite que la distributivité soit bien acceptée comme propriété générale permettant deux écritures d'une même valeur. La question 2) demande de réinvestir cette compréhension de l'identité en choisissant la plus simple des 3 formules équivalentes pour calculer aisément, sans que ce soit demandé explicitement. Les élèves qui utilisent la formule d'Éric, restant attachés au calcul élémentaire du périmètre, risquent fort ne n'avoir pas compris la distributivité...

Exercice 3



Pour exprimer le périmètre de ce polygone en fonction de *x*, Éric, Elodie, Marc, ont écrit :

– Éric :
$b + 2 + b + 3 + 5 + b + 2 + 5 + b + b + b + 3 + b + b$

– Elodie :
$8\,b + 20$

– Marc :
$4 \times (2\,b + 5)$

1. Ces expressions sont-elles égales ? Si oui, prouvez-le.

2. Calculer ce périmètre pour $b = 1$, puis pour $b = 4$, puis pour $b = 20$.

c) Et enfin, des équations en 5^e^...

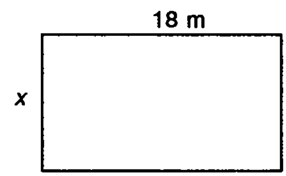
En 5^e^, la résolution de problèmes à une inconnue s'appuie sur le "sens" des opérations. L'élève doit d'abord être capable de retrouver la suite d'opérations partant de ce qui est inconnu pour aboutir au connu, en utilisant les valeurs numériques données par l'énoncé, pour ensuite "défaire" ces opérations en ordre inverse. Si certains élèves parviennent à exprimer directement le programme de calcul de l'inconnue, d'autres ne maîtrisent pas encore cette compétence ; on peut y retravailler avec eux en abordant par exemple des problèmes du type suivant :

Exercice 1

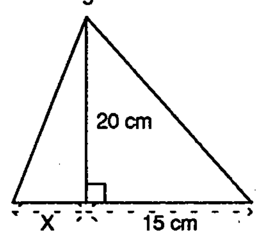
Pour chacun de ces problèmes :

– Écrire le programme de calcul qui donne l'aire de la figure.

– Analyser l'ordre des opérations, puis écrire le calcul de la dimension inconnue x.



L'aire de ce rectangle est 45 cm^2.
Calculer la longueur x

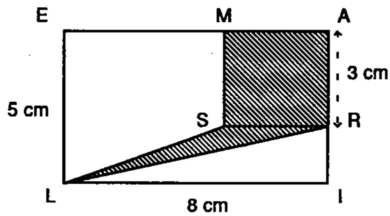


L'aire de ce triangle est 200 cm^2.
Calculer la longueur *x*

La première question demande en fait la mise en équation du problème, dans deux cas où la traduction littérale peut "partir de *x*", ce qui permet ensuite la résolution arithmétique (on "remonte" à *x*).

Comme nous l'avons souligné au début de cet article, l'algèbre ne s'impose pas dans ces problèmes, mais il n'est pas encore question de proposer l'inconnue dans chaque membre, et encore moins deux inconnues... Cependant, pour un élève de 5^e^, l'apparition de la même inconnue à deux endroits de l'énoncé, ou à deux endroits du programme de calcul, peut déjà bloquer la résolution arithmétique précédente, et motiver la littéralisation . C'est l'objectif de l'exercice 2 :

Exercice 2



AILE et MARS sont deux rectangles.
Le point M et situé sur [EA].

A quelle distance de A faut-il placer le point M pour que l'aire de la surface hachurée soit la moitié de celle du rectangle ?

Enfin, le recours à l'algèbre prendra légitimement le pas sur la résolution arithmétique dans les problèmes qui font appel aux nombres relatifs. Cependant, la traduction d'un énoncé avec ces nombres ne peut être naturelle pour l'élève de 5^e : c'est un apprentissage à conduire. La présentation très directive de la mise en équation dans l'exercice suivant vise à obliger les élèves à contourner la résolution arithmétique qui émergerait sinon encore très majoritairement. Il s'agit de faire prendre conscience que donner à x un statut de nombre relatif permet de traduire l'ignorance où l'on est, dans cette situation, de la nature de l'inconnue (gain, ou perte ?). Le signe de la solution trouvée (négative) est ensuite à interpréter, en relation avec le problème. La "culture" de la solution arithmétique fait obstacle : l'acceptation de solutions négatives possibles représente un pas de plus à franchir vers le traitement algébrique des équations.

Exercice 3

Hier Marcel jouait au poker avec les dangereux Alfred et Joël. Au début de la partie, il possédait 260 F. Il ne se rappelle plus quelle somme il a gagnée ou perdue au premier tour de jeu, mais au 2^e tour, il a gagné 150 F. Au troisième tour il a perdu 320 F, et au suivant il a gagné 180 F. Il possédait alors 160 F après ce dernier tour...Combien a-t-il gagné, ou perdu, au premier tour ?

1.– On a appelé x le gain ou la perte que l'on cherche.
Compléter la traduction de l'énoncé commencée ci-dessous :
... + x + ... + ... + .. = ...

– 2.– Résoudre cette équation. Que s'est-il passé, au premier tour ?

En 4^e : Calcul littéral... égalité... mise en équation... algorithme de résolution...

Les commentaires des programmes insistent sur l'apprentissage *"conduit très progressivement"* du calcul littéral, soulignant au passage *"la difficulté importante"* de *"l'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques"*. On vient de voir comment ce travail peut être préparé en 5^e ; il doit être poursuivi.

En 4ème le jeu dialectique entre cet apprentissage et celui de la résolution de problème par la mise en équation s'accentue. En cours d'année, les progrès accomplis par les élèves en calcul algébrique, leur capacité accrue à donner du sens aux expressions littérales, et leur représentation nouvelle de l'égalité, vont nous autoriser à mettre véritablement en échec les pratiques de résolution arithmétique pour proposer un nouvel outil.

Si la résolution d'équations de la forme $ax + b = c$, bien que non exigible, a été initiée en 5^e, alors l'algorithme de "simplification" des équations du premier degré, présenté en 4^e, tendra vers un but plus facilement identifié, qui aura du sens pour les élèves (arriver à une égalité de la forme "x = valeur numérique"). Sinon il risque de se présenter comme une suite de manipulations formelles aléatoires, dont le critère d'arrêt est flou : il n'est pas rare de voir une "résolution" s'arrêter sur un "résultat" (souligné, ou encadré !) du type :

$$x = \frac{3x+1}{2}.$$

Les exercices d'analyse, de production, et de transformation d'écritures littérales sont assez nombreux dans les manuels. Il est cependant recommandé de les lier le plus souvent possible à une situation qui les motive. Les activités de transformation sont les plus difficiles (on lira avec profit l'article écrit sur ce sujet par une équipe de l'IREM de Strasbourg, dans "Des chiffres et des Lettres au Collège – 91/92 – Bulletin Inter-IREM 1er Cycle", pages 147 à 177), et les plus mal réussies. Elles supposent l'acceptation du statut de la lettre, la compréhension de la finalité de la transformation, et une analyse fine des expressions nécessitant une bonne connaissance des conventions de priorité, de la distributivité... Les "gammes" seront nécessaires, mais la virtuosité n'est pas le but recherché. Cependant la compréhension de l'algorithme de résolution en dépend : c'est la capacité à appréhender les transformations possibles d'une expression littérale, à en anticiper le résultat, qui permet de conduire correctement les étapes de cet algorithme. L'élève qui "passe" de « $\frac{x+1}{2} = 3x$ » à « $\frac{1}{2} = 2x$ » maîtrise apparemment plus mal le traitement des priorités opératoires que celui de la résolution.

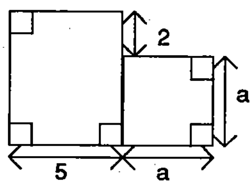
Transformation d'écritures littérales

Dans les activités proposées ci-après, nous reprenons la démarche adoptée en 5^e, en insistant davantage sur la traduction d'un énoncé, le sens de l'égalité, dans des situations plus complexes, parallèlement à la recherche d'une meilleure maîtrise du calcul littéral (certains exercices de cette partie peuvent éventuellement être abordés dès la 5^e : le nouveau découpage du collège permet un étalement plus souple de l'initiation, particulièrement lorsque le professeur garde sa classe sur les 2 années du cycle central). Nous pourrons alors soumettre aux élèves des problèmes mettant réellement en difficulté les méthodes arithmétiques, au profit de la résolution algébrique. L'outil "algorithme de résolution" pourra alors légitimement devenir objet d'étude...

Dans l'exercice 1, à partir d'un support géométrique, on veut, comme en 5^e, faire élaborer une expression, et réciproquement obliger à donner du sens à une expression en faisant inventer un support géométrique correspondant. On travaille la capacité à opérer sur des lettres, et à changer de registre – géométrique ↔ numérique.

Exercice 1 *(d'après IREM de Poitiers)*

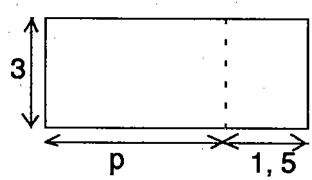
1.– L'aire de la figure dessinée ci-dessous est exprimée par la formule :
$a^2 + 5\,a + 10$ (vérifier !)

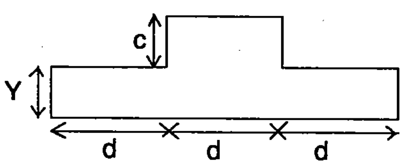


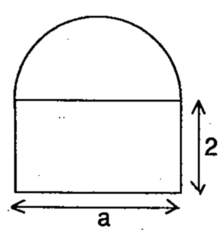
2.– Avec la même longueur a, dessiner une figure dont l'aire est exprimée par la formule :

$2\,a\,(a + 1)$

3.– Exprimer le périmètre et l'aire de chacune des trois figures ci-dessous :







Le 2°) oblige à considérer "a" comme une mesure de longueur, et, en analysant la hiérarchie du calcul, reconnaître un modèle de "formule" d'aire : produit de deux mesures de longueurs. Pour la grande majorité des élèves, il n'est pas évident d'assimiler $2a$ et $(a + 1)$ aux deux dimensions d'un rectangle (pour la traduction la plus simple ; la transformation en $2a^2 + 2a$ fournit une autre illustration géométrique possible).

L'activité présentée ci-après revient sur le statut de l'égalité – "assertion dont la vérité est à examiner" –, en abordant de plus celui des lettres dans une expression littérale – inconnue, variable, indéterminée :

Exercice 2

Voici plusieurs égalités...

A) $25 - 4 = 3\ 4$ B) $2\,x\ 3\,y = 6\,x\,y$
C) $13 + 4 = 21 - 4$ D) $AB^2 + BC^2 = AC^2$
E) $10 + x = y$ F) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
G) $3\,(x - 1) = 4$
H) $(x + 1)\,(x + 2) = x^2 + 3\,x + 2$
I) $AB + BC = AC$ J) $x\,y + x = (1 + y)\,x$
K) V désigne le volume du cylindre de révolution de hauteur 4, r désignant le rayon de la base :

$$V = 4\,\pi\,r^2$$

Quel classement de ces égalités proposez-vous ? D'après quels critères ?

Cette activité est proposée aux élèves en travail par petits groupes (3 à 4 élèves par groupe). Du premier classement souvent proposé (avec des lettres / sans lettres) on affine vers un second classement par le débat dans la classe : égalités vraies / égalités fausses / égalités pour lesquelles on ne peut pas décider immédiatement (cela dépend de la valeur attribuée aux lettres). C'est l'occasion :

– d'approcher la notion *d'identité* (égalité toujours vraie, quelle que soit la valeur de la lettre) ; on souligne à cette occasion la nécessité du calcul littéral comme outil de démonstration : l'accumulation de valeurs "solutions", sans contre-exemple trouvé, a-t-elle force de preuve ?

C'est un moment important du débat dans la classe.

– de revoir comment établir qu'une assertion est fausse : il suffit qu'il existe un contre-exemple, une valeur de la (des) variable(s) qui rend l'égalité fausse,

– de continuer à faire évoluer le statut de la lettre : acceptée comme *inconnue* d'un problème en 5^e où elle désigne alors pour les élèves une valeur prédéterminée, qu'il va falloir trouver (exemple : G), elle peut être valeur *indéterminée* (paramètre), sans référence à une situation concrète (exemple : H), voire *variable* dont dépend la valeur d'une grandeur (exemple : l'expression fonctionnelle E) ; c'est au professeur de le faire émerger au cours du débat, et à chaque nouvelle occasion par la suite.

L'exercice 3, ludique, oblige les élèves à donner du sens à des expressions littérales. Ils doivent opérer sur les lettres (factoriser, réduire – à un niveau simple), pour comparer, puis compléter des expressions littérales, pour qu'elles désignent un même nombre. Le carré n°2 conduit d'abord à résoudre deux équations (vues en 5^e) puis à utiliser les formules trouvées dans le carré n°1. Les élèves peuvent valider leur travail en vérifiant si le carré est bien “magique”.

Exercice 3

Le carré n°1 ci-dessous est un carré magique : la somme S des nombres calculée en ligne, en colonne et en diagonale est la même.

1.– Exprimer S en fonction de *a* et de *b*.

2.– Compléter toutes les cases du carré.

3.– Utiliser les formules trouvées pour compléter le carré magique n°2.

Extrait de “Petit x ”, numéro spécial Activités, novembre 92

a		b	a + 3
	a + 5	a + 6	a + 8
	b - 4	a + 10	a + 4
		a + 1	

Carré magique n° 1

25	10		

Carré magique n° 2

Le type d'exercice suivant, en demandant, sur des exemples numériques d'abord, puis sur des expressions littérales, d'employer l'égalité et un langage mathématique pertinent pour *traduire le même nombre de deux manières différentes,* ou *d'exprimer une relation entre plusieurs inconnues,* prépare à la mise en équation...

Exercice 4

1) A votre avis, quand on écrit : $25 = 4^2 + 3^2$, veut-on mettre en évidence :

a.- que l'addition des carrés de 4 et de 3 donne 25 comme résultat ?

b.- que le nombre 25 est une somme de deux produits ?

c.- que le nombre 25 est la somme des carrés de deux entiers consécutifs ?

2) Quelle propriété des nombres 1, 2, et 3 met en évidence l'écriture :

$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

3) x désigne un nombre inconnu, et la lettre n représente un nombre entier naturel. Dans chaque cas suivant, traduire en français ce que nous apprend l'égalité proposée sur x et n :

$x = n + 1$
$x = n - 1$
$x = 2\,n$
$x = n^3$

4) Quelle(s) écriture(s) choisissez-vous pour désigner trois nombres entiers consécutifs quelconques ? Entourez ce qui vous semble convenir :

a, 2 a, et 3 a ? ; x, y, et z ?
a, $a + 1$, et $a + 2$? ; 5, 6, et 7 ?

Les compétences travaillées dans l'exercice précédent (en particulier au 3°) devront être réinvesties dans l'exercice 5 suivant, pour exprimer "nombres consécutifs" dans sa signification générale. Après discussion sur la signification de "peut être", les élèves proposent d'abord une accumulation de valeurs particulières (impaires), mais sans arriver à une justification, voire une certitude, de la non-existence d'un résultat pair. Le passage à l'expression littérale est alors suggéré. La démonstration de la "non-parité" de cette expression passe par une *transformation de l'écriture*. Il est important de faire prendre conscience aux élèves, dans la phase finale de l'activité, que l'on a fait une démonstration d'une propriété numérique grâce au calcul littéral, et quelles en sont les étapes.

Exercice 5

Vrai ou Faux ? .... à démontrer !

La somme de deux nombres entiers consécutifs peut être un nombre pair.

On peut multiplier ensuite les exercices de ce type, faisant travailler à la fois sur la compréhension d'une assertion (distinction entre "il existe..." et "pour tout...") et la démonstration (recherche d'un contre-exemple, ou mise en forme littérale ?) :

Exercice 6

Vrai, ou faux ?

1.– La somme de deux multiples de 3 est, dans tous les cas, un multiple de 3.

2.– Il peut arriver que le produit de deux multiples de 3 ne soit pas un multiple de 9.

3.– (N'ayez pas peur). Le produit de la somme d'un entier et de son double, par son triple, est toujours le carré d'un nombre entier.

Remarques : Dans cet exercice, donné dans le registre numérique, on fait utiliser des propriétés opératoires connues en 5^e : associativité de la multiplication, factorisation simple. Dans le 3), selon le choix de la stratégie de transformation de "$(n + 2n) \times 3n$" adopté, la preuve apparaît plus ou moins rapidement ; il est bon d'en débattre (développer, ou factoriser d'abord ?).

A partir d'un support géométrique, "visuel", l'exercice 7 motive la conjecture, provoque le besoin de preuve. Pour prouver, il faut traduire dans le registre numérique, puis algébrique pour le 4°. Il faut là encore transformer des expressions littérales pour pouvoir les comparer.

Exercice 7

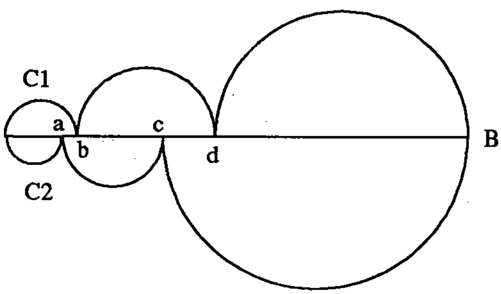
Pour aller de A à B (fig. ci-dessous), on peut suivre la ligne droite [AB], ou passer par les demi-cercles.

1.– Lequel des trois chemins semble le plus long ?

2.– En prenant les mesures qui vous semblent nécessaires, exprimez la mesure du chemin AB, celle du chemin C1, et celle de C2 .

3.– Le résultat constaté est-il encore vrai si on modifie la position des points *a, b, c,* et *d* ?

4.– Comment écrire la preuve ?



Extrait de "Petit x ", numéro spécial Activités, novembre 92

L'exercice 8, partant également d'une situation géométrique, révèle une propriété non évidente à priori pour les élèves (Théorème de Viviani). Il demande un guidage assez fort, car le changement de point de vue (de la géométrie aux longueurs, puis des longueurs aux aires) est loin d'être naturel, mais il met bien en évidence la force du langage algébrique : la manipulation des expressions littérales *explique* le résultat (par la factorisation possible de la mesure du côté), ce qui disparaît dans le seul calcul arithmétique. Nous essayons d'en faire prendre conscience aux élèves, à l'issue de cette activité...

Exercice 8

1.– Construire un triangle équilatéral TRI, de hauteur 6 cm.

2.– Placer un point P à l'intérieur, et construire les projetés E, F, et G de P, orthogonalement sur [TR], [RI], et [IT] .

3.– Mesurer, pour évaluer la somme PE + PF + PG .

4.– Recommencer, avec d'autres positions de P.

5.– Que peut-on conjecturer ?

6.– Pour le prouver... une indication ? Découper le triangle en 3 triangles de sommet P, puis exprimer l'aire de TRI de deux manières...

Équations

Nous nous sommes attachés jusqu'ici essentiellement à donner du sens aux expressions littérales, et à mettre en évidence l'intérêt de leur utilisation pour démontrer des propriétés générales. Les compétences en calcul ayant évolué, nous pouvons aborder la résolution de problèmes à une inconnue dans des situations plus complexes qu'en 5^e, et où le passage dans le registre algébrique va apparaître aux élèves comme nécessaire.

L'exercice 9 est destiné à faire émerger les représentations des élèves sur la notion d'équation. On constate souvent la confusion entre *expression littérale* et *équation*. Il faut que chaque élève soit capable de contrôler lui-même s'il a traduit un problème par une équation : présence d'une **égalité** et d'une inconnue (au moins). Cette prise de conscience doit l'inciter à rechercher systématiquement dans un problème *une inconnue et une relation d'égalité à traduire.*

Exercice 9

Qu'est-ce qu'une équation ? :

Dans ce tableau, entourer au crayon les cases contenant des *équations :*

$2(x-5)+3x$	$y=2$	$2z+4=2$
$2(4-1/2)=3+4$	$4=3x+2y$	$4x=5-3x$

L'exercice 10 fait redéfinir la notion de *solution d'une équation*, et fait reprendre conscience au passage du statut conditionnel de l'égalité d'une part, et de la possibilité de l'existence de plusieurs solutions, voire d'aucune, d'autre part.

Exercice 10

Qu'est-ce qu'une solution d'une équation ?

Vrai ou faux ?

– Le nombre –1 est une solution de l'équation : $2x + 2 = 0$

– N'importe quel nombre est une solution de l'équation : $y - 1 = 1 + y$

– Aucun nombre n'est solution de l'équation : $2x + 3 = 2\ (x + 1)$

– le nombre 7 est une solution de l'équation : $x + 3 = 2x - 8$

– N'importe quel nombre est une solution de l'équation : $0 \times y = 0$

– le nombre 4 est la solution de l'équation : $x^2 = 16$. Il ne peut pas y en avoir d'autre

– l'équation $x + 2y = 2$ n'a qu'une solution : le couple de valeurs (1 ; 0,5) (c'est à dire $x = 1$ et $y = 0{,}5$).

L'exercice 11 veut faire découvrir la notion "d'équations plus ou moins faciles à résoudre", ayant la même solution. La justification de l'équivalence n'est pas abordée ici : il s'agit uniquement de faire savoir que l'on peut parfois remplacer une équation complexe par une équation simple *donnant facilement la solution.* La comparaison des *formes des équations* est demandée, pour initier le travail qui va suivre : certains élèves peuvent déjà pressentir (en comparant par exemple " $2x + 3 = 5x$ " et " $3 = 3x$ ") l'algorithme de transformation permettant de "passer" de l'équation complexe donnée à l'équation simple ayant même solution.

Nous considérons encore " $x = a$ "(a étant une valeur connue) comme une *équation*, pour éviter de conforter la représentation d'égalité "dynamique", annonciatrice d'un "résultat", vite installée dans l'esprit de nos élèves. C'est encore une égalité conditionnelle, équivalente à l'équation initiale ; elle a donc le même statut, mais là, la solution est évidente, unique : a.

Exercice 11

a – Ces équations ont chacune une solution. Associer les équations qui ont la même solution

A $2x + 3 = 5x$; **B** $2(x + 9) = 4x$;
C $2x + 12 = 5x + 9$; **D** $5x - 1 = x$
E $3 = 3x$; **F** $x = 0{,}25$; **G** $x + 9 = 2x$;
H $4x = 1$; **I** $9 = x$

b – Lorsque plusieurs équations ont la même solution, laquelle permet de trouver *le plus facilement* cette solution ?

c – On voit immédiatement la solution de l'équation " $9 = x$ " : le nombre 9.
Peut-on affirmer qu'il en est de même pour l'équation " $3x + 85 = 5x + 27$ " ?
A-t-elle une solution ? Une seule ?
Voyez-vous comment trouver l'équation simplifiée (de la forme "x = nombre connu") ayant la même solution ?

d – Inventer des équations qui ont la même solution.

Les élèves qui ont eu "l'intuition" de l'algorithme permettant de "passer" de "$3x + 85 = 5x + 27$" à "$58 = 2x$", puis "$29 = x$", sont invités à l'exposer à leurs camarades. La question d) les invite ensuite à confirmer leur compréhension.

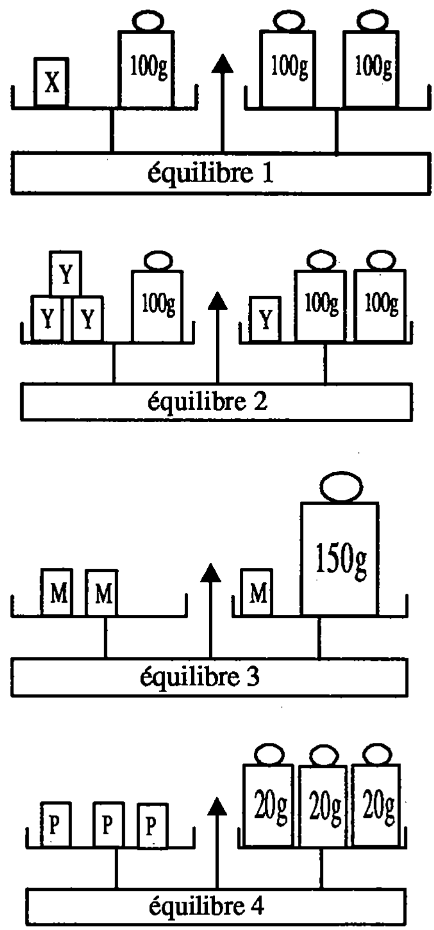
Pour ceux qui ont difficilement accès à l'abstraction qu'exige l'algèbre, on peut tenter un détour par l'expérience concrète, manipulatoire (d'après G. Vergaud, A. Cortès, P. Favre-Artigue : *"Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles"*, dans les actes du colloque de Sèvres 1987). Mais pour ces élèves, la difficulté est grande à faire évoluer leur point de vue, tant ils restent attachés au contrat didactique élémentaire : *trouver la valeur inconnue*, par quelque moyen que ce soit – le plus "économique" – et en évitant si possible de se confronter à des techniques mathématiques qui peuvent leur paraître inutilement complexes. Le professeur, lui, vise *l'apprentissage d'une méthode* transférable à d'autres problèmes, et on peut dire qu'à ce niveau, il y a une forte rupture du contrat, un malentendu difficile à dissiper entre les intentions de l'un et des autres. Il faut donc essayer, au cours de cette activité, de forcer les élèves "faibles" à quitter le concret pour abstraire : concentrer leur attention sur les *étapes de la démarche*, leur faire *expliquer leur choix*, et *traduire mathématiquement* les manipulations physiques.

L'exercice 12 est l'occasion d'une première verbalisation : traduction de l'équilibre par une égalité des masses, recherche d'une manipulation concrète élémentaire permettant la "lecture" de la masse cherchée (les élèves en difficulté disent ou pensent souvent qu'il suffit de tout retirer des plateaux et de refaire la pesée de la masse inconnue ; il faut ici renégocier le contrat : on doit manipuler uniquement ce qui est donné sur les plateaux. Les masses marquées utilisées incitent à retirer la même valeur sur chaque plateau...).

Exercice 12

On peut comparer une **égalité** *à l'équilibre d'une balance Roberval* (principe de la balançoire !)

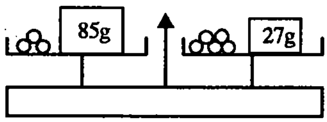
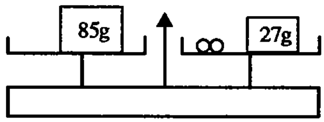
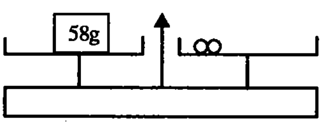
Pour chacun des équilibres ci-dessous, indiquer comment on peut découvrir la masse inconnue :



L'exercice 13, ne proposant plus la décomposition des masses marquées en masses égales, oblige à *abstraire la démarche précédente* : il faut soustraire, et non plus "retirer". On exige alors la traduction mathématique des manipulations permettant le passage d'un équilibre à un autre, tout en explicitant le *but de ces manipulations* (fondement de l'algorithme de résolution d'une équation).

Exercice 13

Savoir transformer un équilibre complexe en un équilibre simple, donnant la masse inconnue :

On veut déterminer la masse inconnue d'une de ces boules identiques, par des manipulations	Décrire chacune de ces manipulations, et son but :	Traduire chaque étape en langage algébrique :
	←1) On nous propose cet équilibre initial : on a la *même masse sur chaque plateau*, des boules des deux côtés. On peut obtenir un nouvel équilibre :	←
	←2) On a .... sur chaque plateau. On a *toujours la même masse sur chacun.*, et il n'y plus de boules que d'un seul côté. Les 27g empêchent cependant de connaître leur masse !	←
	←3) On a	←

L'exercice 14, proposé ensuite, demande de généraliser la démarche, en mettant l'accent sur le but de chaque opération agissant sur les deux membres (Quelle est la ligne directrice suivie ? Que cherche-t-on à faire "disparaître" ?)

Exercice 14

Comparer la démarche précédente à celle ci-dessous, et indiquer le but de chaque transformation :

Si une valeur de x rend vraie l'égalité : $6x + 10 = 2x + 30$

Alors il est vrai aussi que : $6x + 10 - \mathbf{2x} = 2x + 30 - \mathbf{2x}$ ←**but :** ....

Alors il est vrai aussi que : $6x - \mathbf{2x} + 10 = 2x - \mathbf{2x} + 30$

Alors il est vrai aussi que : $4x + 10 = 30$

Alors il est vrai aussi que : $4x + 10 - \mathbf{10} = 30 - \mathbf{10}$ ←**but :**...............

Alors il est vrai aussi que : $4\,x = 20$

Alors il est vrai aussi que : $\dfrac{4x}{4} = \dfrac{20}{4}$ ←**but :**...............

Alors il est vrai aussi que : $x = \mathbf{5}$

La seule solution possible est donc le nombre 5.

Vérifions cependant qu'il rend bien vraie l'égalité initiale :

Vérification :
$6 \times 5 + 10 = 30 + 10 = \underline{40}$;
et
$2 \times 5 + 30 = 10 + 30 = \underline{40}$
Conclusion : Le nombre 5 est bien la solution unique de l'équation initiale.

L'exercice 15 finalise cet apprentissage, prolongeant ce qui a été abordé en 5ᵉ : savoir traduire un problème sous forme d'une équation permet de le résoudre plus aisément qu'avec la méthode arithmétique. Celle-ci oblige à gérer à chaque étape toutes les contraintes du problème, alors qu'une fois la mise en équation effectuée, l'algorithme libère de la référence continuelle au sens.

Exercice 15
Voici trois problèmes :

Problème 1 : Histoire d'âge.	***Problème 2*** : "A pied ou à mobylette".	***Problème 3*** : Pas si bête que ça.
Laëtitia a 15 ans. Sa mère a 40 ans. Quel est le nombre x d'années dans lequel l'âge de la mère sera le double de celui de sa fille ?	Pour s'entraîner au marathon, Bernard part faire un footing à la vitesse de 15 km/h. Son frère, David, veut le rejoindre en mobylette. Il part deux heures plus tard et roule à la vitesse de 40 km/h.	Un âne porte 15 sacs de farine et 2 kilogrammes de pommes. Un mulet porte 2 sacs de farine et 40 kilogrammes de pommes. L'âne souffle fort. "De quoi te plains-tu ?", dit le mulet, "nous portons la même charge." Quelle est la masse x, en kilogrammes, d'un sac de farine ?

Voici quatre équations :

Équation A : $15x + 2 = 2x + 40$
Équation B : $15 (x + 2) = 40x$
Équation C : $40 + x = 2 \times 15$
Équation D : $x + 40 = 2 (x + 15)$

Parmi ces quatre équations, une seule ne traduit aucun des problèmes. Dites de quelle équation il s'agit : ....

Redonnez alors son équation à chaque problème, puis déterminez chaque réponse.

Cette dernière étape de la connaissance et du savoir-faire des élèves s'inscrit dans la durée. Certains acceptent vite la mise en équation comme un moyen de résolution de problèmes, d'autres sont plus réfractaires à cette abstraction qui pour eux ne simplifie rien, tant qu'ils n'auront pas acquis une certaine familiarité avec la manipulation de symboles et les règles d'écriture. La mise en échec de leurs procédures arithmétiques (souvent déjà peu solides, et se combinant à des difficultés de compréhension du texte, de mémorisation, d'appréhension des interactions entre les données) par des problèmes introduisant l'inconnue des deux côtés du signe "=" n'est plus alors pour eux une motivation, mais le plus souvent, une source de découragement, voire un critère d'arrêt de leur travail. Il reste donc pour ceux-là à multiplier patiemment, sous des formes variées, les allers retours entre le numérique et le littéral, pour la conquête du sens à donner à un texte de problème, et à sa traduction algébrique.