REPERES - IREM. N° 34 - janvier 1999

LA TANGENTE EST-ELLE VRAIMENT LA DROITE QUI APPROCHE LE MIEUX LA COURBE AU VOISINAGE D'UN POINT ?

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN,
IUFM Nord-Pas-de-Calais et Equipe DIDIREM,
Université Paris 7

Un phénomène inattendu

Nous avons été amenées, J. Belloc et moi-même, à nous poser la question qui sert de titre à cet article au cours de la préparation d'un stage de l'IREM de Paris 7 s'adressant à des professeurs de première sur le thème des dérivées et tangentes. Nous voulions aborder différents points de vue sur la tangente et en particulier celui d'une approximation de la courbe par une fonction linéaire au voisinage d'un point. Nous cherchions des activités pour les élèves qui permettent de favoriser ce point de vue, avec l'aide d'un ordinateur et sans fournir à l'avance aux élèves l'équation de la tangente. Nous avions choisi d'utiliser le logiciel "Géoplan" pour étudier la parabole $y = x^2 - x$ au voisinage du point A ($x = 1$, $y = 0$). Nous avions l'intention de faire tracer des sécantes passant par A et de faire calculer la différence entre l'ordonnée d'un point de la courbe et d'un point de la sécante de même abscisse avec l'idée que cette différence serait plus petite au voisinage du point sur la tangente que sur les autres sécantes, ce qui amènerait à s'intéresser à la tangente.

Après avoir dessiné la courbe, le principe choisi consistait donc à faire tracer par l'ordinateur quelques droites passant par A dont la tangente, et à faire afficher par l'ordinateur la différence des ordonnées entre M et D, points de même abscisse x situés respectivement sur la parabole (p) et sur la droite (d) passant par A considérée. L'idée était que cette différence resterait "nulle" (à la précision retenue, ici 10^{-4}) sur un petit intervalle quand D se déplacerait sur la tangente et que ça ne serait pas le cas sur les autres droites ou au moins que l'intervalle où cela se produirait serait plus petit. Dans un premier temps, nous faisons varier le coefficient directeur m de la droite entre 0,5 et 1,5 avec un pas de 0,1 et l'abscisse x de M et D avec un pas de 0,01 puis de 0,001. Avec la précision affichée, la différence entre les ordonnées de M et D reste "nulle" sur un intervalle autour de x = 1 pour les autres droites aussi, mais l'intervalle concernant la tangente est bien plus grand que pour les autres droites. Tout va bien !

C'est alors que nous voulons raffiner notre étude et faire varier m entre 0,9 et 1,1 avec un pas de 0,01. Mais là, rien ne va plus ! La courbe reste confondue avec certaines sécantes plus longtemps qu'avec la tangente !

En fait, cela n'avait rien d'étonnant et nous aurions pu le prévoir !

Géoplan affiche 0 dès que les coordonnées diffèrent de 10^{-4}. Evidemment, cette précision n'est pas très grande mais une meilleure précision n'aurait rien changé au phénomène qui nous intéresse ici. Tout le problème est de quantifier la proximité entre la droite et la courbe. Avec l'outil dont nous disposions, il était naturel de s'intéresser à la longueur de l'intervalle sur lequel elles coïncident à la précision de l'ordinateur. La suite nous montrera que cette idée ne correspond hélas pas à la notion de tangente. Pour l'expliquer, modélisons ce que fait l'ordinateur en remplaçant 10^{-4} par e et faisons explicitement le calcul dans le cas de la parabole choisie : nous cherchons les x tels que $|\Delta(x)| = |y_M - y_D| \leq \varepsilon$, où $y_M = x^2 - x$ et $y_D = m\,(x-1)$ soit, avec le changement de variable $h = x - 1$, les h tels que $|(1-m)h + h^2| \leq \varepsilon$, soit encore, en posant $k = 1 - m$, les h tels que $-\varepsilon \leq kh + h^2 \leq \varepsilon$.

Si $k = 0$ (tangente), les inéquations seront vérifiées pour $|h| \leq \sqrt{\varepsilon}$

Dans les autres cas, cela fait deux équations du second degré à résoudre :

1) $h^2 + kh - \varepsilon = 0$ a toujours deux racines réelles : $h_1 = \dfrac{-k+\sqrt{k^2+4\varepsilon}}{2}$ qui est positive et $h_2 = \dfrac{-k-\sqrt{k^2+4\varepsilon}}{2}$ qui est négative. On a $h^2 + kh - \varepsilon \leq 0$ si h est entre les racines.

2) $h^2 + kh + \varepsilon = 0$ a deux racines réelles si $k^2 > 4\varepsilon$: $h_3 = \dfrac{-k+\sqrt{k^2-4\varepsilon}}{2}$ et $h_4 = \dfrac{-k-\sqrt{k^2-4\varepsilon}}{2}$ qui sont toutes deux positives si $k < 0$ et toutes deux négatives si $k > 0$. On a $h^2 + kh + \varepsilon \geq 0$ si $k^2 \leq 4\varepsilon$ ou si $k^2 > 4\varepsilon$ et h à l'extérieur des racines.

On a donc trois cas à considérer :

* si $k < -2\sqrt{\varepsilon}$, on a $h_2 < 0 < h_4 < h_3 < h_1$, les inégalités sont vérifiées pour $h_2 \leq h \leq h_4$ et pour $h_3 \leq h \leq h_1$. Mais seul l'intervalle entre h_2 et h_4 nous intéresse. Il a pour longueur $\dfrac{\sqrt{k^2+4\varepsilon}-\sqrt{k^2-4\varepsilon}}{2} < 2\sqrt{\varepsilon}$. L'autre intervalle correspond au deuxième point d'intersection de la droite et de la parabole *(voir figures 1a et 1b, page suivante)*.

* si $k > 2\sqrt{\varepsilon}$, on a cette fois $h_2 < h_4 < h_3 < 0 < h_1$, les inégalités sont toujours vérifiées pour $h_2 \leq h \leq h_4$ et pour $h_3 \leq h \leq h_1$. Mais seul l'intervalle entre h_3 et h_1 nous intéresse. Il a lui aussi pour longueur $\dfrac{\sqrt{k^2+4\varepsilon}-\sqrt{k^2-4\varepsilon}}{2} < 2\sqrt{\varepsilon}$.

* Mais si $-2\sqrt{\varepsilon} \leq k \leq 2\sqrt{\varepsilon}$, les inégalités sont vérifiées pour $h_2 \leq h \leq h_1$. Or l'intervalle $[h_2, h_1]$ a pour longueur $\sqrt{k^2+4\varepsilon} > 2\sqrt{\varepsilon}$. Ceci est bien naturel puisqu'il contient alors les

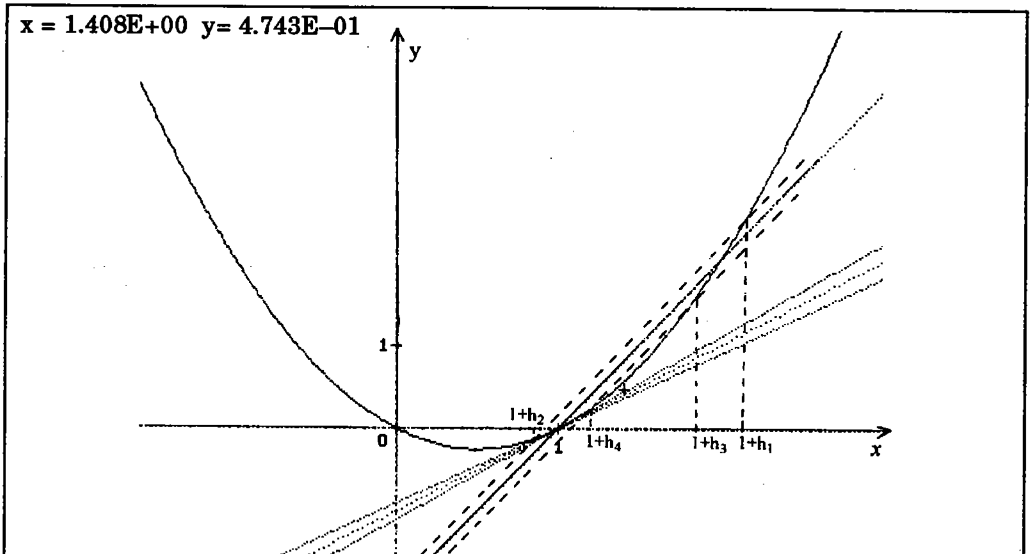

Figure 1a
y en fonction de x

deux points d'intersection de la droite et de la parabole.

L'intervalle le plus long est obtenu pour $k = 2\sqrt{\varepsilon}$, sa longueur vaut $2\sqrt{2\varepsilon}$.

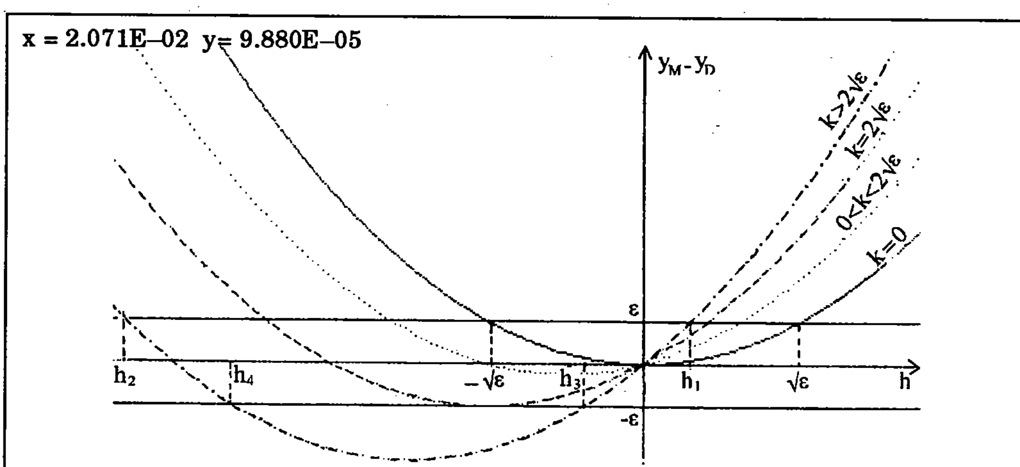

Figure 1b
Δ en fonction de h (avec k ≥ 0)

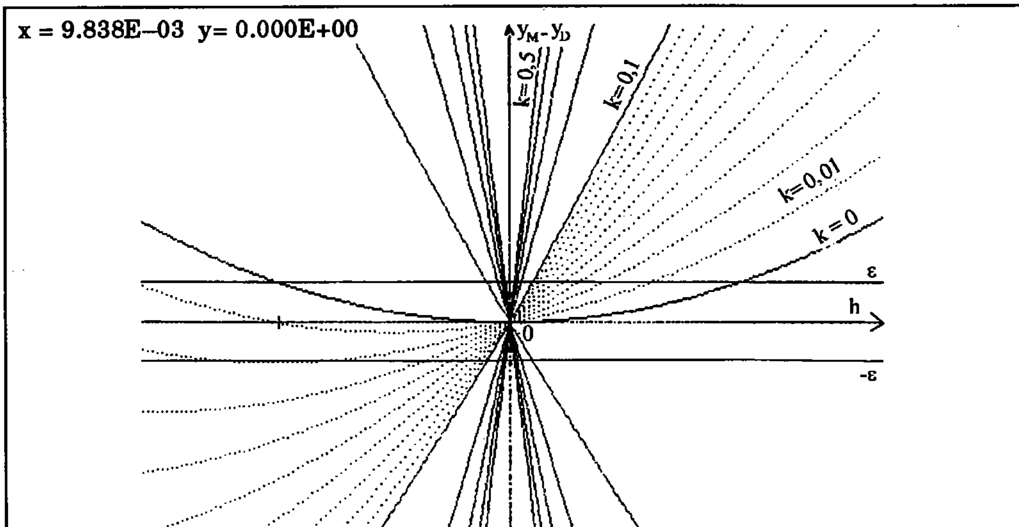

Figure 2a
0,1 ≤ k ≤ 0,5 avec pas = 0,1 puis
0 ≤ k ≤ 0,1 avec pas = 0,01

On peut encore utiliser Géoplan pour illustrer nos réflexions en représentant sur le même graphique $y_M - y_D$ pour différentes valeurs de k ainsi que les droites $y = \varepsilon$ et $y = -\varepsilon$ *(voir figures 2a et 2b).*

Evidemment l'intervalle obtenu n'est pas centré en h = 0, ce qui laisse quand

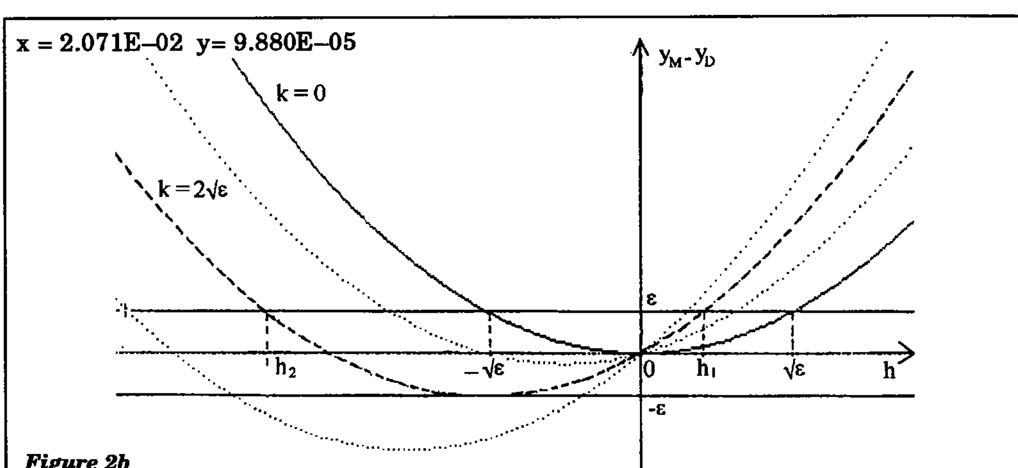

Figure 2b
$k = 0$; $k = 2\sqrt{\varepsilon}$; $k > 2\sqrt{\varepsilon}$

même une petite supériorité à la tangente qui garde l'intervalle centré le plus grand parmi les sécantes passant par A ! Mais...

On peut garder un intervalle centré sans imposer de passer par A

* Fixons ε. Pour garder un intervalle symétrique autour de 0, on peut prendre, toujours sur notre exemple, des droites qui ne passent pas par A mais par des points P_1 et P_2 de la courbe d'abscisses respectives $1 - p$ et $1 + p$. La droite (d) a alors pour équation $y = x - 1 + p^2$. Notons que, dans le cas de la parabole, une telle droite est parallèle à la tangente puisque si f est un polynôme du second degré,

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Appelons encore M le point de la courbe d'abscisse x et D le point de (d) de même abscisse, si on pose toujours $h = x - 1$, on a $y_M = h^2 + h$ et $y_D = h + p^2$ et $|y_M - y_D|$ vaut donc $|h^2 - p^2|$.

Pour obtenir $-\varepsilon \le h^2 - p^2 \le \varepsilon$, il faudra choisir h tel que $p^2 - \varepsilon \le h^2 \le p^2 + \varepsilon$. Et si l'on veut pour h un intervalle qui contienne 0, il faut choisir $0 \le p \le \sqrt{\varepsilon}$

Si l'on prend $p = \sqrt{\varepsilon}$ on va trouver la courbe confondue avec la droite à la précision de l'ordinateur pour $|h| < \sqrt{2\varepsilon}$ alors que sur la tangente, ce ne sera le cas que pour $|h| < \sqrt{\varepsilon}$. Nous appelons y_T l'ordonnée du point d'abscisse x de la tangente (t) en A *(voir figures 3a et 3b)*.

Cela signifie que si on donne ε, et qu'on cherche une droite telle que la différence entre un point de la courbe et le point de la droite de même abscisse soit inférieure à ε sur un intervalle entourant x_0 (ici 1) le plus grand possible, ce n'est pas la tangente qu'on trouvera.

Pour clarifier un peu ce que nous venons de faire, utilisons la norme uniforme [(1)].

Soit I un intervalle compact contenant 1 on notera $d_I(d, p) = \|f-g\|_I = \sup |y_P - y_D|$ la distance de la droite (d) et de la parabole (p) au sens de la norme uniforme sur I, $y = f(x)$ et $y = g(x)$ étant respectivement les équations de la parabole et de la droite.

Ce que nous avons montré, c'est que, ε étant fixé, si à toute droite (d) on associe l'intervalle I contenant 1 le plus grand possible tel que $d_I(d, p) < \varepsilon$, ce n'est pas à la tangente que l'on associera le plus grand intervalle possible.

* Dans le cas plus habituel où on se fixe un intervalle I entourant 1, $|h| \le \alpha$, ce n'est bien sûr pas la tangente non plus qui donne la meilleure approximation uniforme de (p) : elle n'a pas de raison d'être proche de la courbe aux extrémités de l'intervalle. En se limitant aux droites parallèles à la tangente, il est facile de vérifier que c'est celle qui passe par les points de la courbe d'abscisse $1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ et $1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ (donc $p = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$) qui est sur cet intervalle la plus proche de la courbe au sens de la norme uniforme sur I puisque $|y_M - y_D| = \left|h^2 - \frac{\alpha^2}{2}\right| \le \frac{\alpha^2}{2}$ tant que $|h| \le \alpha$, donc $d_I(d,p) = \frac{\alpha^2}{2}$, alors que $d_I(t,p) = \alpha^2$ puisque $|y_M - y_T| = h^2$ vaut α^2 pour $h = \alpha$, en désignant par t la

(1) Je remercie A.-M. Marmier qui m'a fait cette suggestion à la lecture d'une première version de cet article.

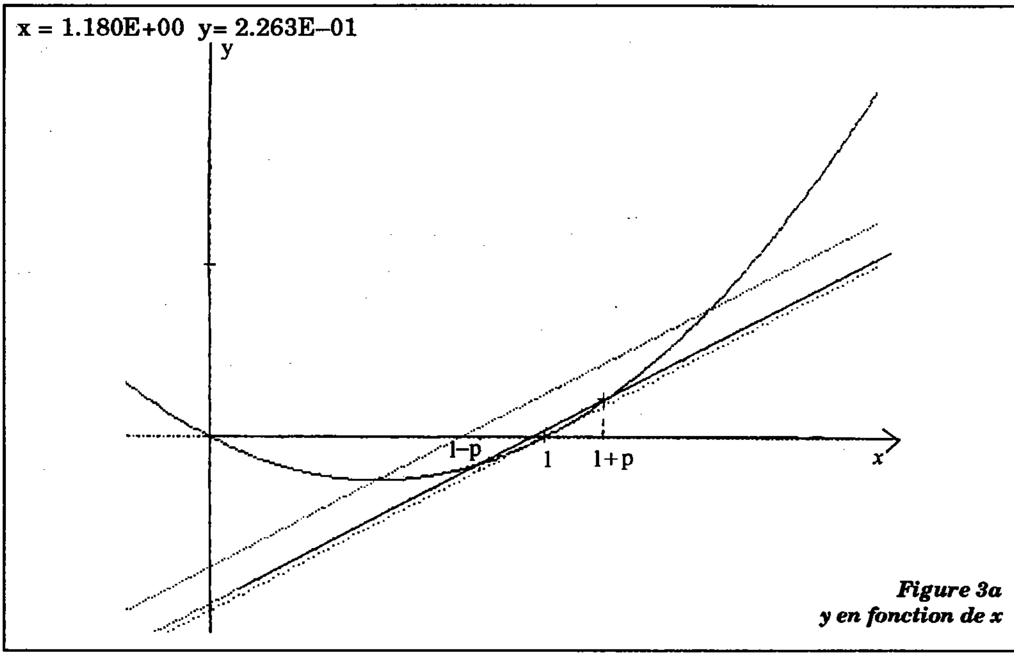

Figure 3a
y en fonction de x

tangente et T le point de la tangente d'abscisse x.

Mais une approximation à ε près n'est qu'une approximation... Et si on change ε, on peut disqualifier une à une les droites "les meilleures" qu'on a trouvées alors que la tangente, elle, sera toujours parmi les

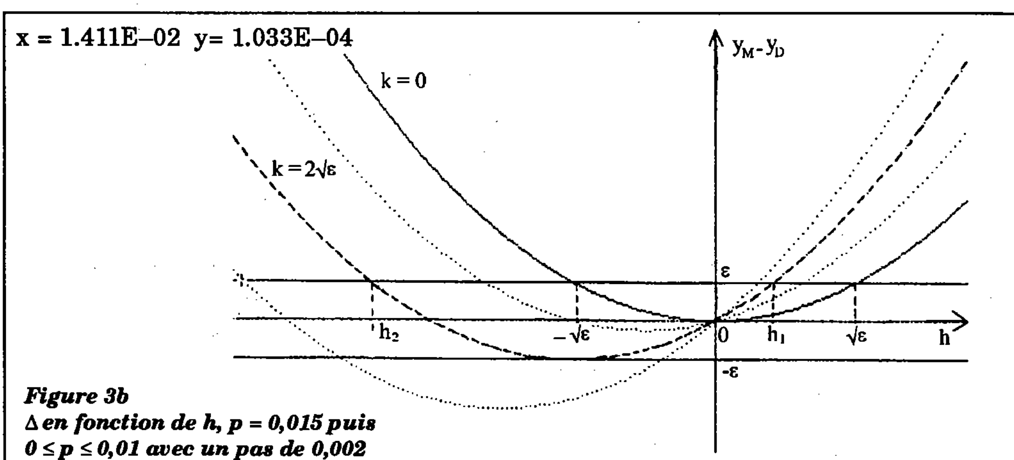

Figure 3b
Δ en fonction de h, p = 0,015 puis
0 ≤ p ≤ 0,01 avec un pas de 0,002

candidates. De plus, la tangente passe par le point A alors que cette droite n'y passe pas...

Alors, en quel sens la tangente approche-t-elle la courbe mieux que n'importe quelle autre droite ?

Nous avons regardé un exemple particulier, les phénomènes repérés sont-ils liés à cet exemple ou sont-ils généraux ? Un phénomène est lié à l'exemple, c'est le fait que la pente d'une droite coupant la courbe en deux points d'abscisses symétriques par rapport à a est $f'(a)$. Il est facile de se convaincre que le reste est général. Le cas des droites qui passent par A est conséquence de la définition classique :

$$|y_M - y_D| = |h\,(f'(a) - m) + h\,\varepsilon(h)|$$
$$\text{et} \quad |y_M - y_T| = |h\,\varepsilon(h)|$$

si $f'(a) - m$ et $\varepsilon(h)$ sont de signes contraires, on a $|y_M - y_D| < |y_M - y_T|$. Pour les autres cas, on peut se limiter à des droites parallèles à la tangente pour produire des exemples. Finalement,

1. si on se donne ε, et qu'on mesure la qualité de l'approximation d'une courbe (c) par une droite à ε près, au voisinage d'un point donné A d'abscisse a, à la longueur de l'intervalle I qui entoure a et sur lequel $d_I(d,p) < \varepsilon$, on peut toujours trouver des droites qui approchent la courbe à ε près "mieux" que la tangente. Cependant, pour toute autre droite (d), la tangente reste en ce sens une meilleure approximation que (d) de (c) à ε près pourvu que ε soit assez petit.

2. si on fixe un intervalle I de rayon α et de centre a, et qu'on mesure l'approximation à l'erreur maximale commise en remplaçant la courbe par la droite sur l'intervalle, c'est-à-dire avec la norme uniforme sur I, la droite qui approche "le mieux" la courbe sur cet intervalle en ce sens n'est pas la tangente. Pourtant, étant donnée n'importe quelle droite autre que la tangente, la tangente approche mieux la courbe que la droite donnée sur l'intervalle I, pourvu que I soit assez petit.

La nuance réside dans l'ordre des quantificateurs et dans les ordres de grandeur. Avec les notations précédentes et en notant $I(d,\varepsilon)$ le plus grand intervalle de centre a tel que $|y_M - y_D| < \varepsilon$,

1. $\quad \forall\varepsilon\, \exists d\; I(d,\varepsilon) \supseteq I(t,\varepsilon)$...
mais $\quad \forall d\, \exists\varepsilon\; I(d,\varepsilon) \subset I(t,\varepsilon)$
et même $\quad \forall d\, \exists\varepsilon(\forall\eta<\varepsilon) I(d,\eta \subset I(t,\eta)$.

2. $\quad \forall I\, \exists d\; (d_I(d,c) \leq d_I(t,c))$...
mais $\quad \forall d \exists I(d_I(t,c) \leq d_I(d,c))$
et même... $\quad \forall d\, \exists I\, (\forall x \in I)(|y_M - y_T| \leq |y_M - y_D|)$
et donc $\quad \forall d\, \exists I(\forall J \subseteq I\; (d_J(t, c) \leq d_J(d, c))$.

Il y a bien sûr aussi (2) une différence d'ordre de grandeur

$$\forall\, \varepsilon d\, \exists I\, (\forall x \in I)\, \frac{|y_M - y_T|}{|y_M - y_D|} \leq \varepsilon\ .$$

(2) G. Kuntz, et je l'en remercie, m'a fait remarquer à la lecture d'une première version de cet article, que des notations plus classiques montrent mieux ce dernier résultat :
Si $y = f(x)$ et si f est dérivable en a, dans le cas des droites passant par A (a, f(a)), on peut écrire, avec les notations habituelles $y_M - y_T = h\,\varepsilon(h)$ et $y_M - y_D = h\,(f'(a)-m) + h\,\varepsilon(h)$ où m est le coefficient directeur de (d). On a donc $\frac{y_M - y_T}{y_M - y_D} = \frac{\varepsilon(h)}{f'(a) - m + \varepsilon(h)}$ et donc $\lim \frac{y_M - y_T}{y_M - y_D} = 0$.
Cette remarque correspond à la démonstration générale du cas où la droite passe par A.

Moralité

La tangente est vraiment une notion locale ! Il s'agit de la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage d'un point, à condition de ne fixer à l'avance ni la longueur de l'intervalle contenant le point, ni l'erreur admise dans l'approximation. Elles doivent pouvoir rester aussi petites que l'on veut. La seule utilisation vraiment adéquate de l'ordinateur pour faire apparaître naturellement la tangente serait de faire des zooms jusqu'à voir la courbe devenir droite. Remarquons d'ailleurs que la première condition pour que la droite considérée reste proche de la courbe sur un intervalle contenant a, aussi petit soit-il est qu'elle passe par A. L'utilisation de l'ordinateur telle qu'elle avait été envisagée revenait à fixer l'erreur admise dans l'approximation.

Question

En explicitant toutes ces nuances, il apparaît que le langage imagé et intuitif qu'on tient souvent dans les explications sur la tangente peut véhiculer un certain nombre de conceptions erronées, en particulier quelles conceptions favorisons-nous chez les élèves en essayant d'approcher expérimentalement une courbe par une droite avec l'ordinateur ou la calculatrice ?

Cela ne signifie pas qu'il soit mauvais pour les élèves de leur dire que la tangente est la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage du point, sans plus de précision. Cependant, il m'a semblé que nous n'étions pas toujours conscients nous-mêmes [(3)] des ambiguïtés que cela pouvait recouvrir et le sujet m'a paru mériter plus ample réflexion et sera peut-être matière à d'autres articles...

(3) En tout cas, je ne l'étais pas avant que J. Belloc attire mon attention sur ce phénomène bizarre : en augmentant la précision, la tangente cessait d'être la meilleure approximation au sens de l'utilisation faite de *Géoplan*.