
GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

Une méthode de géométrisation

Adrien DOUADY
Université de Paris VII

1. Introduction

Depuis le commencement du 20ème siècle — on peut dire à la suite de Hilbert — la géométrie est utilisée couramment pour appréhender de nombreux problèmes dans d'autres branches des mathématiques et en diverses sciences ; elle s'est avérée être un moyen extraordinairement efficace. Souvent, ce n'est pas sur de la géométrie euclidienne en dimension 2 ou 3 que l'on tombe, mais sur de la géométrie dans un espace adapté au problème, en général un *espace de paramètres* construit *ad-hoc*.

En termes très généraux, la méthode mise en œuvre dans ce *processus de géométrisation*, c'est-à-dire pour le transfert du cadre initial dans un cadre géométrique, peut alors être décrite de la façon suivante :

On formule le problème initial comme la recherche d'une configuration (dans la situation initiale) satisfaisant à certaines pro-

priétés. On considère alors l'ensemble de toutes les configurations de cette nature. On identifie ensuite cet ensemble avec un sous-ensemble E d'un espace où l'on est habitué à travailler géométriquement (typiquement \mathbb{R}^n) ; l'ensemble E joue alors le rôle d'*espace de paramètres* pour les configurations considérées. Le problème revient alors à construire un point de E satisfaisant à certaines conditions géométriques.

Pour expliquer ce que nous voulons dire, nous donnons dans cet exposé trois exemples de mise en œuvre de cette méthode :

- 1) Une propriété des intersections de cercles ;
- 2) Possibilité ou non de retourner une droite en lui interdisant d'être tangente à une courbe donnée ;
- 3) Existence de polynômes de degré 4 à valeurs critiques données.

GÉOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMÈTRES

Dans les deux premiers exemples, le cadre initial est déjà géométrique, mais un transfert dans un nouveau cadre géométrique s'avère nécessaire (ou du moins efficace) pour résoudre le problème. En d'autres termes on est amené à re-géométriser un problème déjà géométrique.

Dans le troisième exemple, le problème initial est algébrique. Il est facile à formuler en termes géométriques, mais la représentation géométrique que nous utiliserons n'est pas celle qui est évidente *a priori*.

Dans chacun de ces exemples, l'espace de paramètres E est une partie de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 . Mais il est aisé de concevoir qu'il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple, l'ensemble des orbites possibles d'une planète est de dimension 5. En robotique, on est amené à considérer l'ensemble de toutes les positions possibles d'un solide ; c'est une variété de dimension 6, plongeable dans \mathbf{R}^9 . Nous allons d'abord donner l'énoncé des trois problèmes, de façon à permettre au lecteur d'explorer plusieurs voies avant de regarder celle que nous proposons.

2. Les problèmes

2.1. Intersection de cercles

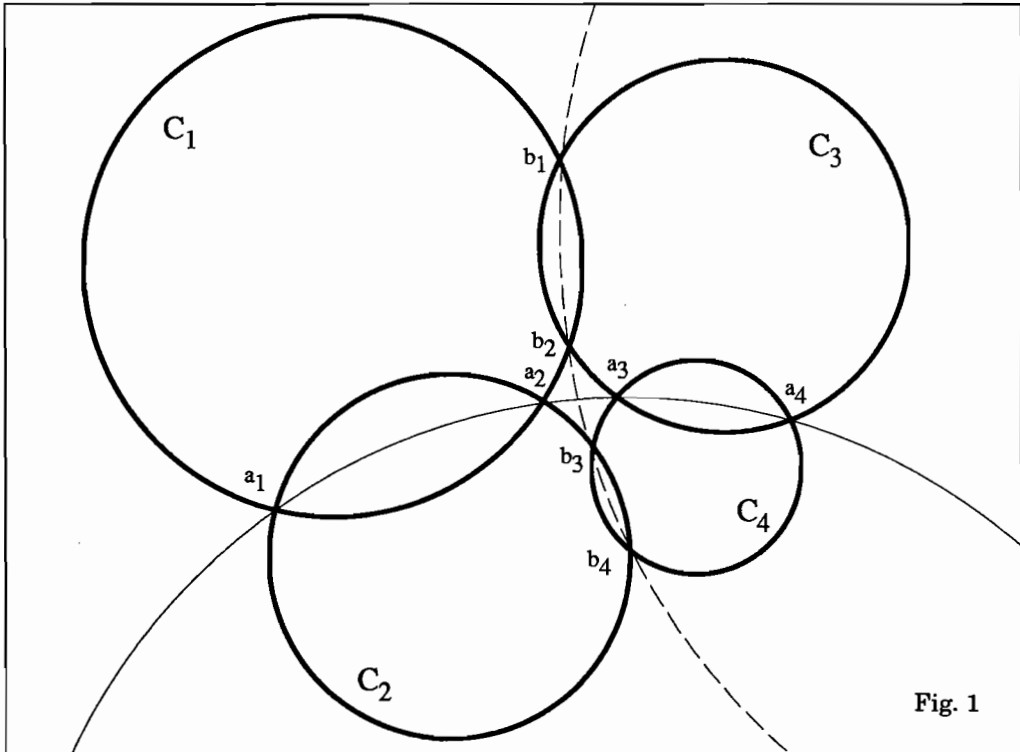


Fig. 1

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cercles dans le plan (cf. figure 1). On suppose que :

- C_1 et C_2 se coupent en a_1 et a_2 ,
- C_3 et C_4 se coupent en a_3 et a_4 ,
- C_1 et C_3 se coupent en b_1 et b_2 ,
- C_2 et C_4 se coupent en b_3 et b_4 .

Montrer que, si a_1, \dots, a_4 sont sur un cercle ou sur une droite, b_1, \dots, b_4 sont sur un cercle ou sur une droite.

2.2. Retourner une droite (*problème suggéré par David Epstein*¹). Nous présentons ce problème sous trois versions :

Considérons dans le plan un arc de courbe Γ qui soit l'un des arcs $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dessinés Fig. 2, et une droite D ne rencontrant pas Γ . Est-il possible de déplacer D de façon continue et de la ramener à sa place avec l'orientation opposée, sans que jamais au cours du mouvement elle ne soit tangente à Γ ?

Indication : La réponse n'est pas la même dans les trois cas : Il y a deux OUI et un NON, ou le contraire. Les paris sont ouverts.

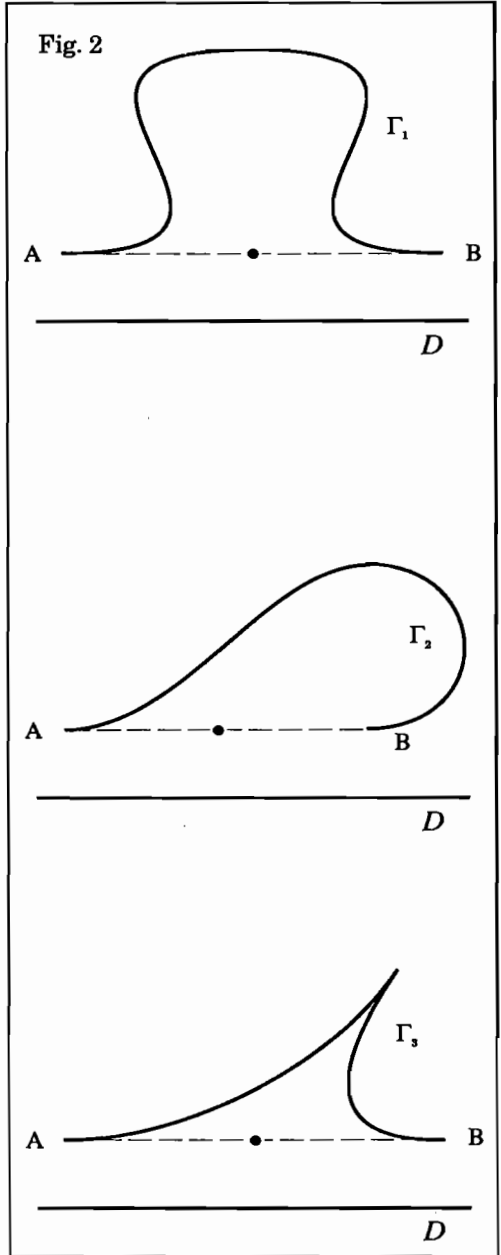
2.3. Polynôme à valeurs critiques données

Soit f un polynôme monique de degré 4 à coefficients réels :

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

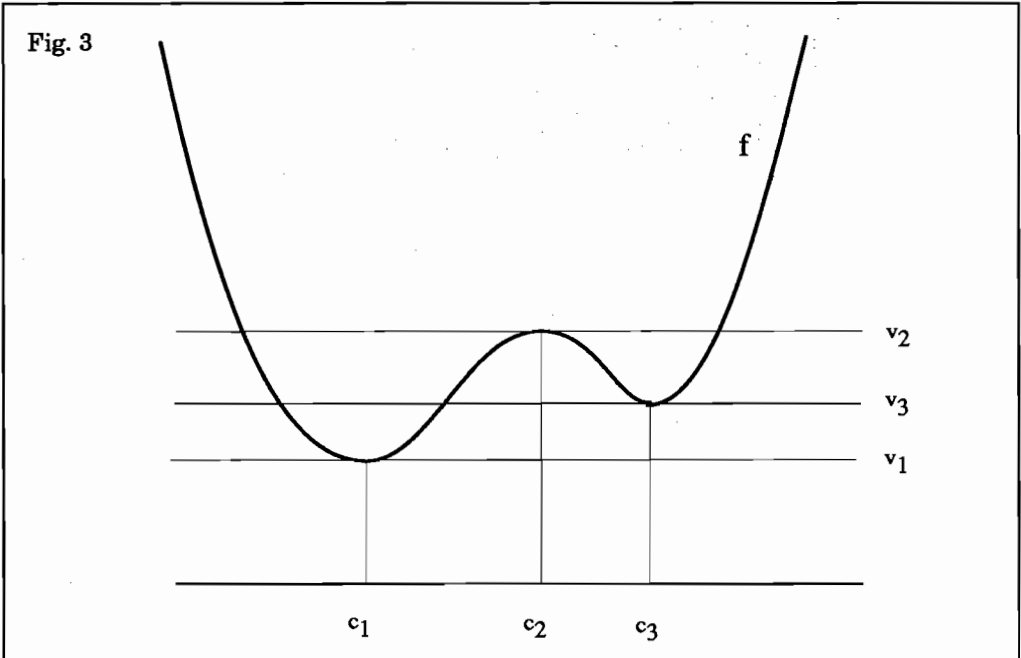
(«monique» signifie $a_4 = 1$). On suppose que la dérivée f' a 3 racines réelles $c_1 < c_2 < c_3$ (points critiques).

Les valeurs critiques $v_i = f(c_i)$ vérifient alors $v_2 > v_1$ et $v_3 > v_1$ (cf. Fig. 3 page suivante).



¹ Université de Warwick, U.K.

**GEOMETRIE DANS LES
ESPACES DE PARAMETRES**



Question 1 : Etant donné trois nombres réels v_1, v_2, v_3 vérifiant $v_2 > v_1$ et $v_2 > v_3$, peut-on choisir a_0, \dots, a_3 de façon que les valeurs critiques de f soient v_1, v_2, v_3 ?

Il n'y a pas unicité : si on translate f horizontalement, c'est-à-dire si on le remplace par $x \rightarrow f(x - b)$, les valeurs critiques ne changent pas.

Question 2 : Un polynôme monique de degré 4 est-il déterminé de façon unique, à translation horizontale près, par ses valeurs critiques ?

Ce problème se pose de façon naturelle en tous degrés. Il y a une démonstration classique faisant intervenir de l'analyse complexe. Il a été proposé comme un défi de trouver une démonstration restant dans le cadre réel. Pierrette Sentenac et moi avons proposé une

telle démonstration. Nous présentons ici le cas de degré 4, le premier non trivial.

3. Voyage au pays des cercles

3.0. Considérations préliminaires

Attaquons-nous au premier problème, celui sur les intersections de cercles. Il s'agit d'un problème sur les cercles : en supposant les a_i sur un cercle, on cherche à construire un cercle passant par les b_i (ou du moins à démontrer l'existence d'un tel cercle).

Suivant notre méthode générale, il nous faut considérer l'ensemble C de tous les cercles du plan.

3.1. Première tentative

Un cercle est déterminé par son centre et son rayon. Notons $C_{a,b,r}$ le cercle de rayon r dont le centre a pour coordonnées (a,b) . En représentant $C_{a,b,r}$ par le point (a,b,r) de \mathbf{R}^3 , on identifie C au demi-espace $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ (les points du plan frontière correspondant aux cercles-points).

Cette démarche est très naturelle, mais elle mène à des difficultés. On cherche à construire un cercle passant par 4 points. Etant donné un point $P = (x,y)$ dans le plan \mathbf{R}^2 , l'ensemble $\mathcal{C}(P)$ des cercles passant par P est représenté par le cône

$$\{ (a,b,r) \in \mathbf{R}^3 \mid r = d((x,y),(a,b)) \}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(P,Q)$ des cercles passant par P et Q est une branche d'hyperbole. Pour 4 points, il faudra considérer l'intersection de deux hyperboles dans \mathbf{R}^3 : c'est compliqué et on sera vite noyé.

On est ainsi amené à chercher une représentation plus appropriée de C .

3.2. Plus algébriquement

L'équation du cercle $C_{a,b,r}$ est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

soit

$$(*) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

où $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Toute équation de la forme (*) représente un cercle, à condition que $c \leq a^2 + b^2$ (en acceptant les cercles-points). En représentant $C_{a,b,r}$ par le point (a,b,c) de \mathbf{R}^3 , on identifie C avec la région E de \mathbf{R}^3 extérieure au parabolôïde Σ d'équation $c = a^2 + b^2$ (cf. encadré 1

de la page suivante). Les points sur le parabolôïde représentent des cercles-points (les points dans la région intérieure représentent des cercles imaginaires sans point réel).

Qu'a-t-on gagné, qu'a-t-on perdu avec cette nouvelle représentation ?

Désavantages : Ça a l'air moins naturel. Et puis on obtient une région de \mathbf{R}^3 moins facile à décrire.

Avantages : L'ensemble $\mathcal{C}(P)$ est maintenant un plan, à savoir celui qui a pour équation (*), où a, b, c sont les variables, x et y étant considérés comme des constantes.

Ce plan est tangent au parabolôïde Σ au point représentant le cercle-point $\{P\}$, à part cela il est à l'extérieur (cf. encadré 2). Etant donné deux points P et Q , l'ensemble $\mathcal{C}(P,Q)$ devient l'intersection de deux tels plans : c'est une droite entièrement extérieure à Σ (cf. encadré 3).

Remarque : Cette représentation est particulièrement adaptée à la théorie des faisceaux et réseaux de cercles, qui était enseignée en Terminale «math-élem» jusque vers 1969.

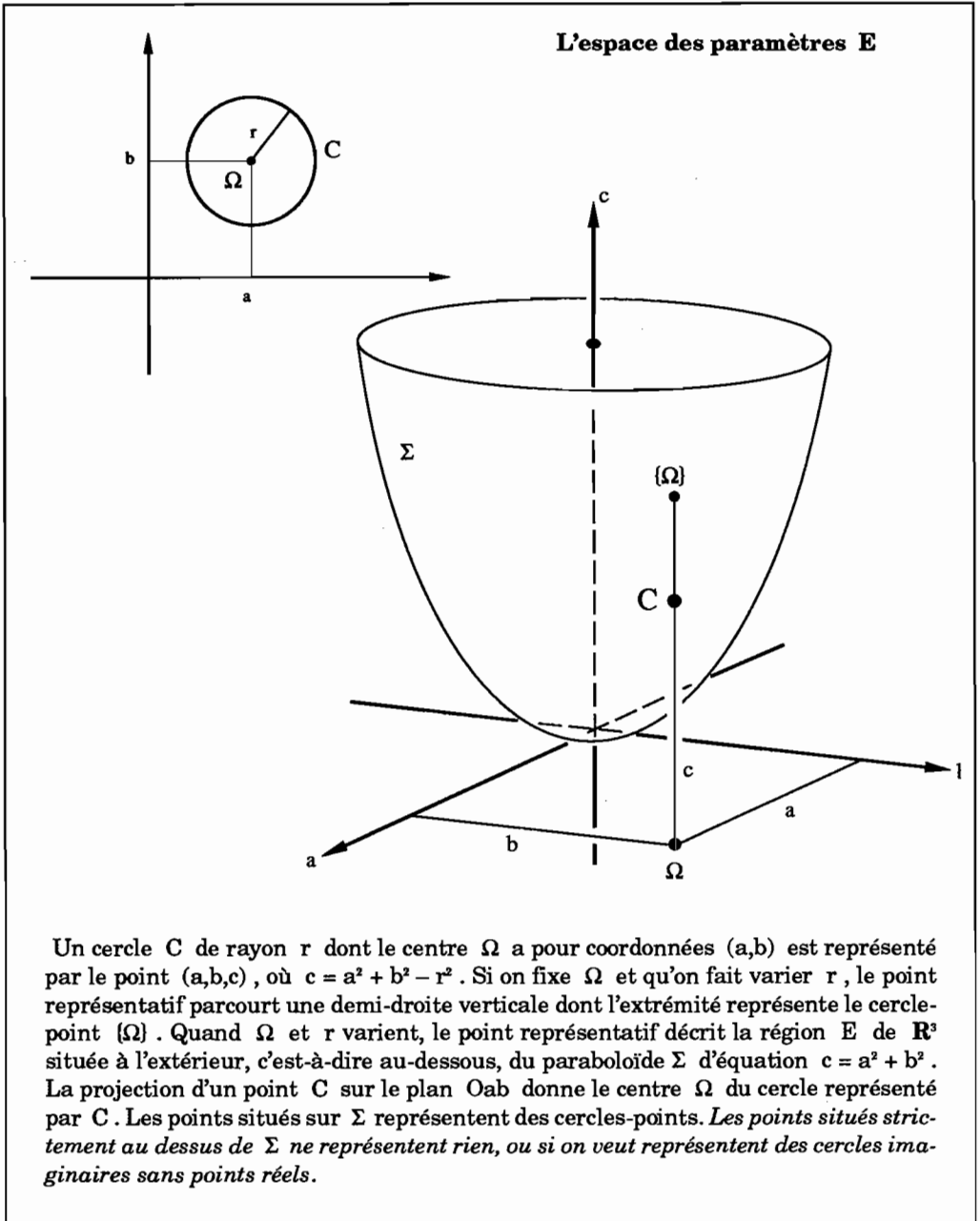
3.3. Résolution du problème

Nous nous plaçons donc dans la seconde représentation, et nous identifions C avec la région E de \mathbf{R}^3 extérieure à Σ . Un cercle C de \mathbf{R}^2 est représenté par un point de E que nous noterons encore C . Etant donné deux points C et C' de \mathbf{R}^3 , nous noterons $D_{c,c'}$ la droite passant par C et C' .

Dire que a_1, a_2, a_3, a_4 sont sur un cercle Γ signifie qu'il existe un point $\Gamma \in E$ qui appartient à la fois aux droites D_{c_1,c_2} et D_{c_3,c_4} ,

**GEOMETRIE DANS LES
ESPACES DE PARAMETRES**

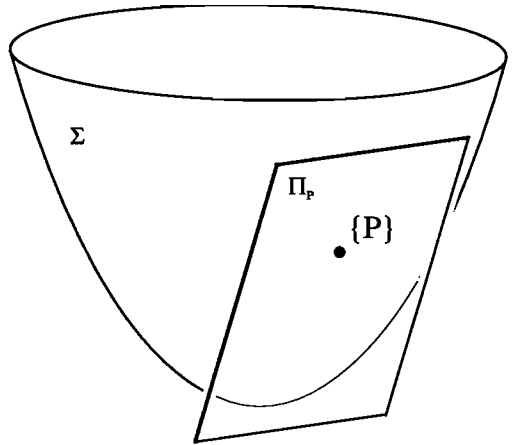
Encadré 1



Encadré 2

Plan des cercles passant par un point

Les points représentant les cercles passant par un point P de coordonnées (x,y) sont les points $(a,b,c) \in E$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, c'est-à-dire $c = 2xa + 2yb - (x^2 + y^2)$. Dans cette équation, a et b sont les variables, x et y sont des constantes. C'est l'équation d'un plan Π_P . Ce plan contient le point de Σ représentant le cercle-point $\{P\}$, et au-dessus de chaque point Ω de \mathbb{R}^2 il contient un point de E (le point représentant le cercle de centre Ω passant par P). Par suite l'ensemble $\Pi_P - \{\{P\}\}$ est contenu dans la région extérieure à Σ . Le plan Π_P est donc tangent à Σ au point représentant $\{P\}$.

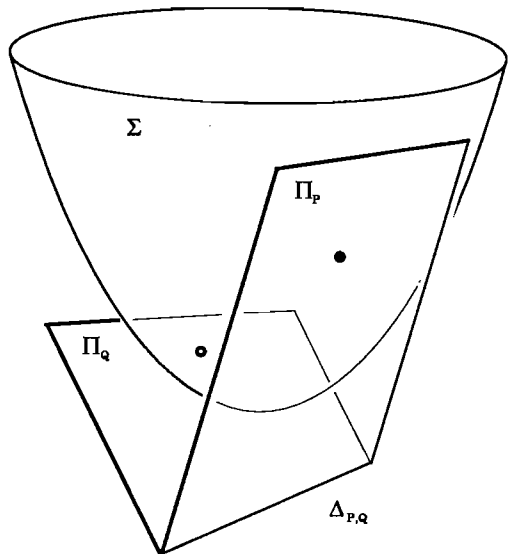


Encadré 3

Cercles passant par deux points

Etant donné deux points distincts P et Q , les cercles passant par P et Q sont représentés par les points de la droite $\Delta_{P,Q}$, intersection de Π_P et Π_Q .

Cette droite est située entièrement dans la région extérieure à Σ .



GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

autrement dit que ces deux droites se rencontrent. Cela entraîne que les points C_1, C_2, C_3, C_4 sont dans un même plan, donc que les droites D_{c_1, c_3} et D_{c_2, c_4} se rencontrent ou sont parallèles. Si elles se rencontrent en un point Γ , ce point représente un cercle passant par b_1, b_2, b_3, b_4 .

Reste à voir que, si lesdites droites sont parallèles, les points b_i sont alignés. Il y a plusieurs façons de le montrer, je propose un argument de passage à la limite.

3.4. Passage à la limite

Supposons que les droites D_{c_1, c_3} et D_{c_2, c_4} soient parallèles dans un plan H . Déplaçons légèrement le point C_4 dans le plan H en un point $C_4(\epsilon)$ de sorte que maintenant ces droites se rencontrent. On obtient quatre points $b_1, b_2, b_3(\epsilon), b_4(\epsilon)$ sur un même cercle. Quand ϵ tend vers 0, les points $b_3(\epsilon)$ et $b_4(\epsilon)$ tendent vers b_3 et b_4 respectivement (cf. encadré 4), tandis que b_1 et b_2 restent immobiles.

Les angles de droites $(b_1 b_3(\epsilon), b_1 b_4(\epsilon))$ et $(b_2 b_3(\epsilon), b_2 b_4(\epsilon))$ sont égaux. Cette égalité passe à la limite, donc les angles de droites $(b_1 b_3, b_1 b_4)$ et $(b_2 b_3, b_2 b_4)$ sont égaux. Il en résulte que b_1, b_2, b_3, b_4 sont sur un cercle ou sur une droite. Mais nous savons qu'ils ne sont pas sur un cercle, puisque les droites en question ne se coupent pas. Les points b_i sont donc alignés.

Reste à étudier le cas où les a_i seraient alignés. On montre comme ci-dessus la réciproque : si les b_i sont alignés, les droites D_{c_1, c_3} et D_{c_2, c_4} sont parallèles. De même, on voit que, si a_1, \dots, a_4 sont alignés, D_{c_1, c_3} et D_{c_2, c_4} sont parallèles, et par suite les points C_1, \dots, C_4

Encadré 4 : Continuité de l'intersection

Le passage à la limite du n° (3.4) utilise implicitement le résultat suivant :

Lemme. — Soient C et C' deux cercles se coupant en deux points distincts a et b .

Soit (C_n) une suite de cercles tendant vers C . Alors, pour n assez grand, C_n et C' se coupent en deux points a_n et b_n avec $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Précision : Soient Ω_n et r_n le centre et le rayon de C_n . L'hypothèse $C_n \rightarrow C$ signifie que $\Omega_n \rightarrow \Omega$ et $r_n \rightarrow r$, où Ω et r sont le centre et le rayon de C . La notion de limite est donc celle donnée par la première représentation «naïve». Mais la deuxième représentation «algébrique» donne la même ; en effet r et c sont liés par

$$c = a^2 + b^2 - r^2, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Démonstration : Fixons-nous ϵ avec :

$$0 < \epsilon < 1/2 d(a,b).$$

Soient a' et a'' les deux points situés à distance ϵ de a sur C' , avec a' dans la région intérieure à C et a'' dans la région extérieure. Définissons de même b' et b'' . Les arcs $\widehat{a'a''}$ et $\widehat{b'b''}$ de C' sont disjoints.

Soit δ le plus petit des 4 nombres

$$r - d(\Omega, a''), \quad r - d(\Omega, b'), \\ d(\Omega, a'') - r, \quad d(\Omega, b') - r,$$

qui sont > 0 . Pour n assez grand, on a

$$d(\Omega, \Omega_n) + r_n - r < \delta.$$

Alors a' est dans la région intérieure à C_n et a'' dans la région extérieure. Il existe donc un

point a_n de l'arc $\widehat{a'a''}$ de C' qui est sur C_n et on a $d(a, a_n) < \epsilon$.

De même, il existe un point b_n de $C' \cap C_n$ avec $d(b, b_n) < \epsilon$.

cqfd.

sont dans un même plan. On a vu que cela entraîne que les points b_1, \dots, b_k sont sur un cercle ou sur une droite.

Ceci achève la démonstration.

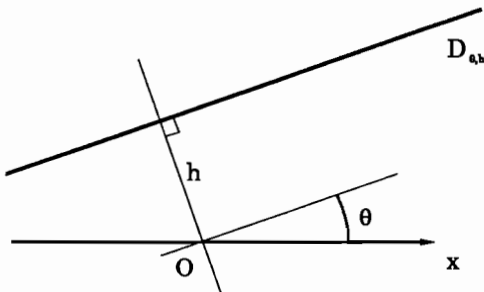
4. Mouvement d'une droite

4.1. Une bande de Möbius inattendue

Le problème suggéré par D. Epstein est un problème sur les droites dans le plan \mathbf{R}^2 . Il nous faut donc considérer l'ensemble D des droites du plan.

Repérons une droite D par sa direction et la distance de l'origine O à D . Plus précisément, étant donné des réels θ et h , notons $D_{\theta,h}$ la droite faisant avec l'axe Ox un angle θ et telle que la projection H de O sur elle ait pour abscisse h sur l'axe faisant un angle de $\theta + \pi/2$ avec Ox (Fig4).

Fig. 4

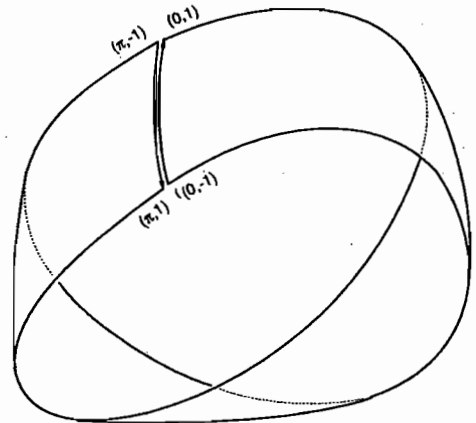


Toute droite du plan peut s'écrire $D_{\theta,h}$, et ce de façon non unique : étant donné (θ,h) dans \mathbf{R}^2 , les (θ',h') tels que $D_{\theta',h'} = D_{\theta,h}$ sont les $(\theta + k\pi, (-1)^k h)$. On peut donc considérer D comme le quotient de \mathbf{R}^2 par la rela-

tion d'équivalence définie de cette façon, ou si l'on préfère comme la bande $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ dans laquelle on identifie $(0,h)$ à $(\pi,-h)$.

Remarquons que \mathbf{R} est homéomorphe à l'intervalle ouvert $] -1,1[$, et qu'on peut toujours choisir un homéomorphisme φ tel que $\varphi(-h) = -\varphi(h)$. La bande $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ est donc homéomorphe au rectangle semi-ouvert $[0, \pi] \times] -1,1[$, et finalement on peut identifier D à $[0, \pi] \times] -1,1[$ avec $(0,y)$ et $(\pi,-y)$ identifiés, c'est-à-dire avec une bande de Möbius sans son bord :

Fig. 5



On pourrait considérer l'ensemble \tilde{D} des droites orientées, qui s'identifie au cylindre quotient de \mathbf{R}^2 par la relation d'équivalence identifiant (θ,h) à $(\theta+2\pi,h)$, et l'involution $\sigma : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$ qui consiste à renverser l'orientation. En fait, techniquement, le travail se fera dans \mathbf{R}^2 , mais en tenant compte des relations d'équivalence décrites ci-dessus.

GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

4.2. Précisions sur l'énoncé

Jusqu'ici, D a été défini seulement comme ensemble. Mais l'énoncé du problème fait intervenir implicitement une topologie sur D , puisqu'il s'agit d'un mouvement continu d'une droite, c'est-à-dire d'un point de D . Pour être rigoureux, il faudrait définir une topologie sur D et s'assurer que les identifications décrites sont des homéomorphismes. Je n'ai pas envie de m'étendre sur ces questions ici. Nous admettrons simplement que dire qu'on a un mouvement continu $t \rightarrow D_t$, paramétré par $[0,1]$ signifie qu'on peut écrire $D_t = D_{\theta(t),h(t)}$ avec $\theta(t)$ et $h(t)$ dépendant continûment de t , et que la condition que D_t retourne à sa position initiale avec renversement de l'orientation signifie que $\theta(1) = \theta(0) + k\pi$ avec k entier impair, et $h(1) = -h(0)$.

La question est alors de savoir s'il est possible d'avoir un tel mouvement évitant l'ensemble interdit : l'ensemble des tangentes à Γ . Il nous faut donc maintenant décrire cet ensemble interdit dans les trois cas $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

4.3. Description de l'ensemble interdit

Prenons comme origine le milieu du segment AB , où A et B sont les extrémités de l'arc Γ , et comme axe origine la droite AB .

Soit $M(s)$ un point qui parcourt Γ quand s varie de 0 à 1 . Notons $D_{\theta^*(s),h^*(s)}$ la tangente à Γ , avec θ^* et h^* continues. Alors $(\theta^*(s),h^*(s))$ décrit dans \mathbb{R}^2 un arc Γ^* . Mais si (θ,h) est interdit, $(\theta + \pi, -h)$ l'est aussi, puisque $D_{\theta,h}$ et $D_{\theta+\pi,-h}$ désignent la même droite. Par suite l'ensemble interdit dans \mathbb{R}^2 est un ensemble Γ^{**} qui est la réunion des transformés de Γ^* par :

$$(\theta,h) \rightarrow (\theta + k\pi, (-1)^k h)$$

pour $k \in \mathbb{Z}$. Les ensembles Γ_1^* et Γ_1^{**} pour $i = 1, 2, 3$ ont l'allure indiquée dans la Fig. 6 (voir aussi l'encadré 5 page suivante).

La question est de savoir si on peut joindre le point D à l'un des points $D^{(k)}$ avec k impair sans rencontrer Γ_1^{**} . Il est clair sur la figure que c'est possible pour $i = 1$, et impossible pour $i = 2$ et $i = 3$.

On peut observer que, dans la bande de Möbius, l'ensemble interdit fait le tour de la bande pour $i = 2$ ou 3 , ne le fait pas pour $i = 1$. Mais le travail qui suit se fera dans \mathbb{R}^2 .

4.4. Démonstrations

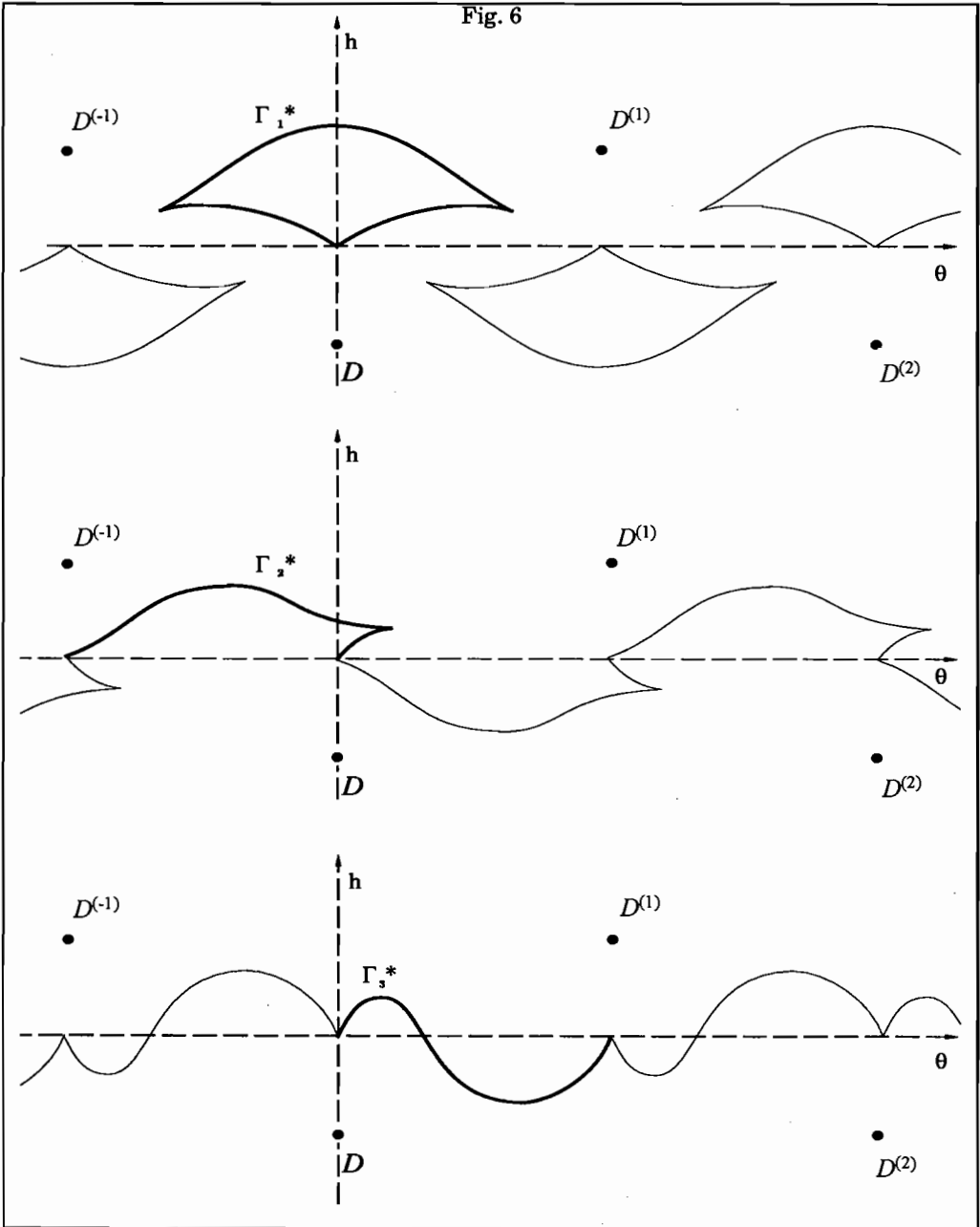
Essayons de transformer cette évidence visuelle en démonstration. Commençons par Γ_3 , qui est le cas le plus facile. Dans ce cas, θ^* varie de façon monotone de 0 à π , c'est donc un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[0,\pi]$. Il en résulte que Γ^* est le graphe d'une fonction continue $\eta : [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\eta(0) = \eta(\pi) = 0$, et Γ^{**} est le graphe de la même fonction prolongée à \mathbb{R} par $\eta(\theta + k\pi) = (-1)^k \eta(\theta)$.

Supposons maintenant que nous ayons θ et h continues avec $\theta(1) = \theta(0) + (2k+1)\pi$ et $h(1) = -h(0)$. La fonction $h(t) - \eta(\theta(t))$ est continue et prend des valeurs opposées en 0 et 1 , elle doit donc s'annuler quelque part.

Cela signifie qu'il y a un $t \in [0,1]$ tel que $(\theta(t),h(t)) \in \Gamma_3^{**}$,

cqfd.

Venons-en à Γ_2 . La particularité importante est que $\theta^*(s)$ varie continûment de 0 à $-\pi$ (ça marcherait pareil avec $k\pi$, $k \neq 0$). Nous n'utiliserons que ce fait : nous allons faire une démonstration utilisant des notions élé-



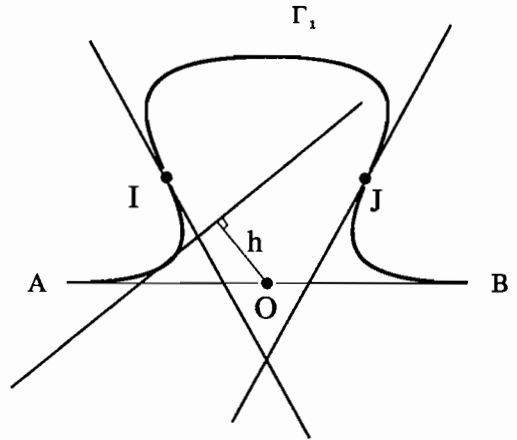
GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

Encadré 5

Comment on obtient Γ^*

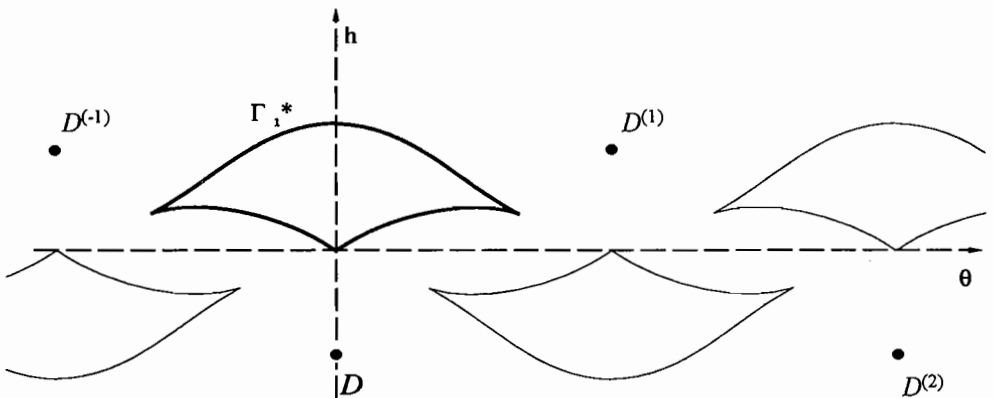
On écrit la tangente T_s à Γ en un point $M(s)$ sous la forme $D_{\theta^*(s), h^*(s)}$.

Quand $M(s)$ parcourt Γ_1 de A au point d'inflexion I, l'angle $\theta^*(s)$ croît de 0 à une valeur θ^*_1 comprise entre $\pi/2$ et π , et $h^*(s)$ reste > 0 . Ensuite, quand $M(s)$ va de I à l'autre point d'inflexion J, l'angle $\theta^*(s)$ décroît de θ^*_1 à $\theta^*_j = -\theta^*_1$, et $h^*(s)$ reste > 0 . Enfin, quand $M(s)$ va de J à B, l'angle $\theta^*(s)$ croît à nouveau jusqu'à 0, et $h^*(s)$ reste toujours > 0 ($= 0$ pour B).



Les figures représentant Γ_1^* et Γ_2^* sont obtenues de la même façon.

On peut montrer que les points d'inflexion de Γ se traduisent sur Γ^* par des points de rebroussement. Mais nous n'utiliserons pas ce fait.



mentaires, qui constituent le point de départ de la topologie algébrique (le lemme de croisement utilise la notion d'indice d'un lacet).

On pourrait peut-être obtenir une démonstration légèrement plus simple en utilisant d'autres particularités de la situation, mais je pense que ça ne vaut pas la peine.

Prolongeons les fonctions θ^* et h^* à \mathbf{R} par $\theta^*(s+k) = \theta^*(s) - k\pi$; $h^*(s+k) = (-1)^k h^*(s)$. L'ensemble Γ^{**} est alors l'image de \mathbf{R} par $s \rightarrow (\theta^*(s), h^*(s))$. Les fonctions $s \rightarrow \theta^*(s) + \pi s$ et h^* sont continues et périodiques, donc bornées. Par hypothèse, $D = D_{\theta(0), h(0)}$ ne rencontre pas Γ , et on peut supposer que $D_{\theta(0), h}$ ne rencontre pas Γ pour $h \leq h(0)$.

Prolongeons $t \rightarrow (\theta(t), h(t))$ par :

$$(\theta(t), h(t)) = \begin{cases} (\theta(0), h(0) + t) & \text{pour } t \leq 0, \\ (\theta(1), h(1) + t - 1) & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

Le résultat découle alors du lemme suivant (appliqué à $(-\theta^*, h^*, -\theta, h)$) :

Lemme de croisement. — Soient $s \rightarrow (x_1(s), y_1(s))$ et $t \rightarrow (x_2(t), y_2(t))$ deux applications continues $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$. On suppose que les fonctions y_1 et x_2 sont bornées, et que x_1 et y_2 varient de $-\infty$ à $+\infty$. Alors les chemins se croisent, c'est-à-dire qu'il existe un couple (s, t) tel que $(x_1(s), y_1(s)) = (x_2(t), y_2(t))$.

C'est un lemme classique de topologie. La démonstration usuelle fait intervenir la notion d'indice (nombre de tours) d'un lacet autour d'un point (cf. encadré 6).

4.5. Le cas de Γ_1

Pour la courbe Γ_1 en forme de Ω , le mouvement est possible. On peut se contenter de l'exhiber dans le cadre initial : dans la figure telle qu'elle est dessinée, les deux tangentes d'inflexion limitent avec la droite AB un triangle situé sous AB. On peut déplacer la droite D parallèlement à elle-même de façon à la faire passer par un point de ce triangle, puis simplement la faire tourner.

Remarque : Si on prenait une courbe Γ_r ayant même allure que Γ_1 , mais telle que les tangentes d'inflexion recourent Γ (Fig. 7a),

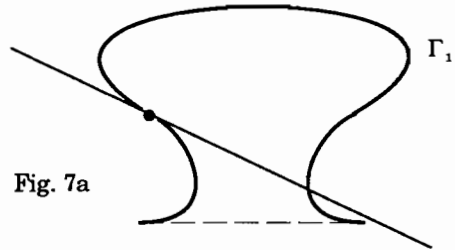


Fig. 7a

le résultat serait différent : il y aurait alors une tangente double L, et on pourrait extraire de $\Gamma_r \cup L$ une courbe Γ_r (Fig. 7b) ayant

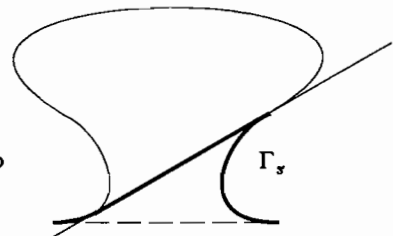
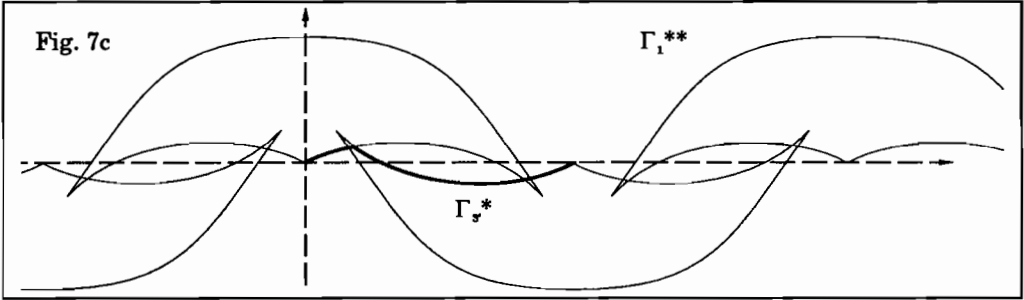


Fig. 7b

même allure que Γ_1 (mais contenant un segment de droite), et la réponse serait NON, comme pour Γ_1 (Fig 7c).

GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES



Encadré 6. Lemme de croisement

Soient $s \rightarrow M_1(s)$ et $t \rightarrow M_2(t)$ deux applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^2 . On suppose qu'il existe une constante m telle que $y_1(s) < m$ et $x_2(t) < m$ quels que soient s et t , et que :

- $x_1(s) \rightarrow -\infty$ quand $s \rightarrow -\infty$,
- $x_1(s) \rightarrow +\infty$ quand $s \rightarrow +\infty$,
- $y_2(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$,
- $y_2(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

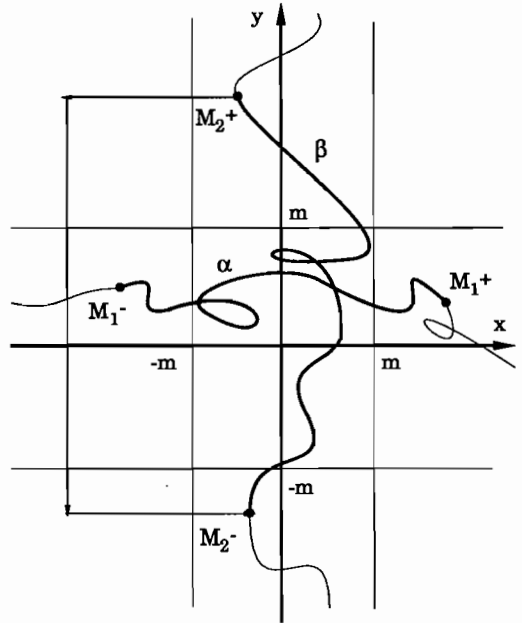
On peut trouver s^-, s^+, t^-, t^+ tels que $x_1^- < -m$, $x_1^+ > m$, $y_2^- < -m$, $y_2^+ > m$, où $x_1^- = x_1(t^-)$, etc.

On note M_1^- le point (x_1^-, y_1^-) , etc.

Soit β le chemin $t \rightarrow M_2(t)$ de M_2^- à M_2^+ . Considérons un chemin β' de M_2^+ à M_2^- constitué par un segment horizontal à hauteur y_2^+ , un segment vertical d'abscisse

$x^- < \inf_{s \in [t^-, t^+]} x_1(s)$, et un segment horizontal à hauteur y_2^- .

En mettant bout à bout β et β' , on obtient un lacet γ . Ce lacet peut être déformé en un lacet rectangulaire sans passer sur M_1^- ni M_1^+ , donc sans changer son indice par rapport à ces points. Par suite l'indice de γ est 1 par rapport à M_1^- et 0 par rapport à M_1^+ . Il en résulte que le chemin α décrit par $M_1(s)$ de M_1^- à M_1^+ rencontre γ . Comme il ne peut pas rencontrer β' , il rencontre forcément β , cqfd.



5. Le problème sur les polynômes de degré 4

5.1. Une façon naturelle d'aborder le problème

L'ensemble des polynômes moniques de degré 4 s'identifie naturellement à \mathbf{R}^4 par $f \rightarrow (a_0, \dots, a_3)$. Dans cet ensemble, les polynômes ayant trois points critiques réels distincts forment un ouvert défini par une inéquation compliquée.

Mais nous nous intéressons aux polynômes à *translation horizontale près*. Nous pourrions nous restreindre aux polynômes *centrés*, c'est-à-dire ceux qui ont $a_3 = 0$. En effet, chaque classe de polynômes modulo translation horizontale contient un polynôme centré et un seul. Les polynômes moniques centrés de degré 4 forment un espace \mathbf{R}^3 , dans lequel ceux qui ont trois points critiques réels distincts forment un ouvert Ω défini par $8a_2^3 + 27a_1^2 < 0$.

Nous voulons montrer que l'application $f \rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ de Ω dans

$$\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3 \mid v_2 > v_1, v_2 > v_3 \}$$

est bijective.

Voilà une façon naturelle d'aborder le problème, mais elle mène à des difficultés : on n'a pas de formule simple donnant les v_i en fonction des coefficients de f , ni de façon directe d'étudier leur comportement. Nous allons donc procéder de façon légèrement différente.

5.2. Première transformation

Portons d'abord notre attention sur l'invariance du problème par translation verticale.

En effet, si nous avons un polynôme f tel que $v_2 - v_1$ et $v_2 - v_3$ aient les valeurs voulues, il ne sera pas difficile d'ajuster f en ajoutant une constante pour que v_1, v_2, v_3 aient les valeurs données.

Nous nous intéressons donc à f à translation verticale près, cela revient à considérer la dérivée :

$$f' = 4x^3 + 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$$

Les points critiques sont les racines de f' ; on demande qu'il y en ait trois $c_1 < c_2 < c_3$. On peut alors interpréter $v_2 - v_1$ et $v_2 - v_3$ comme des aires (Fig. 8) :

$$v_2 - v_1 = A_1 = \int_{c_1}^{c_2} f' ,$$

$$v_2 - v_3 = A_2 = \int_{c_2}^{c_3} |f'| .$$

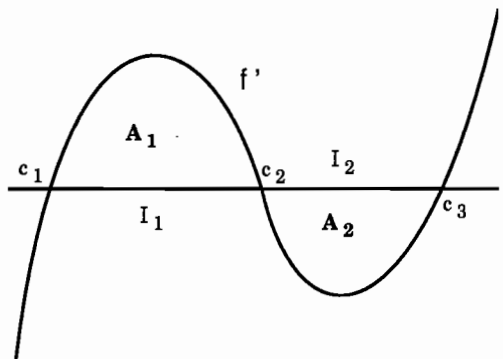


Fig. 8

Nous pouvons alors formuler le problème sous la forme équivalente :

Question :

Etant donné $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$, existe-t-il un

GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

polynôme : $g = 4x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ avec trois racines réelles $c_1 < c_2 < c_3$, tel que

$$\int_{c_1}^{c_2} g = A_1,$$

$$\int_{c_2}^{c_3} |g| = A_2 ?$$

Un tel polynôme est-il unique à translation horizontale près ?

5.3. Deuxième transformation

Remarquons que $g = f'$ est déterminée par les c_i : elle est donnée par

$$g(x) = 4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3).$$

Ceci permet d'exprimer A_1 et A_2 en fonction des c_i , et on voit que A_1 et A_2 sont des fonctions continues des c_i .

Prenons maintenant en compte l'invariance par translation horizontale, et prenons comme inconnues

$$l_1 = c_2 - c_1,$$

$$l_2 = c_3 - c_2.$$

Ces nombres déterminent g à translation horizontale près. Ils permettent donc de calculer A_1 et A_2 , et nous pouvons considérer l'application

$$\Phi : (l_1, l_2) \rightarrow (A_1, A_2)$$

de \mathbf{R}_+^2 dans lui-même. Cette application est continue. La question est maintenant :

Question : L'application Φ est-elle une bijection ? un homéomorphisme ?

5.4. Etude de Φ

Nous allons montrer que Φ est un homéomorphisme en en faisant une étude qualitative.

Lemme 1.— L'image par Φ d'une demi-droite issue de O en est aussi une.

Démonstration : La demi-droite issue de O passant par (l_1, l_2) est formée des (l_1^*, l_2^*) avec $l_1^* = \lambda l_1$ et $l_2^* = \lambda l_2$, $\lambda > 0$. Pour calculer les A_1^*, A_2^* correspondant, on choisit g^* définie par $g^*(x) = 4(x - c_1^*)(x - c_2^*)(x - c_3^*)$. En posant $x^* = \lambda x$, on obtient $g^*(x^*) = \lambda^3 g(x)$. Autrement dit, le graphe de g^* se déduit de celui de g par $x \rightarrow \lambda x$, $y \rightarrow \lambda^3 y$. Par suite $A_1^* = \lambda^4 A_1$ et $A_2^* = \lambda^4 A_2$. Quand λ varie, le point (A_1^*, A_2^*) décrit la demi-droite issue de O passant par (A_1, A_2) ,

cqfd.

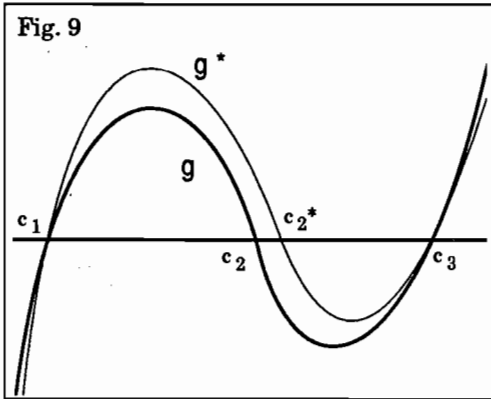
Lemme 2.— Si on augmente l_1 et qu'on diminue l_2 de façon que $l_1 + l_2$ reste constant, A_1 augmente et A_2 diminue.

Démonstration : Prenons $c_1^* = c_1$, $c_2^* > c_2$, $c_3^* = c_3$, et définissons g^* à partir des c_i^* (cf. Fig. 9). Alors $h = g^* - g$ est un polynôme de degré 2 s'annulant en c_1 et c_3 . Il garde donc un signe constant sur l'intervalle $]c_1, c_3[$; il y est > 0 car il l'est en c_2 . Par suite :

$$A_1^* = \int_{c_1}^{c_2^*} g^* > \int_{c_1}^{c_2} g^* > A_1,$$

$$A_2^* = \int_{c_2^*}^{c_3} |g^*| < \int_{c_2}^{c_3} |g| < A_2,$$

cqfd.



Fixons $k > 0$. Lorsque $M = (l_1, l_2)$ parcourt le segment I défini dans \mathbf{R}_+^2 par $l_1 + l_2 = k$, le point $\Phi(M)$ parcourt continûment une courbe Γ de $\Phi(0, k) = (0, \hat{A})$ à $\Phi(k, 0) = (\hat{A}, 0)$ (cf. Fig 10).

En vertu du Lemme 2, la demi-droite $\Phi(OM) = (O \Phi(M))$ a une pente qui diminue, autrement dit elle balaye le quart de plan en tournant toujours dans le même sens.

Il en résulte que Φ est un homéomorphisme c'est-à-dire une bijection continue ainsi que son inverse.

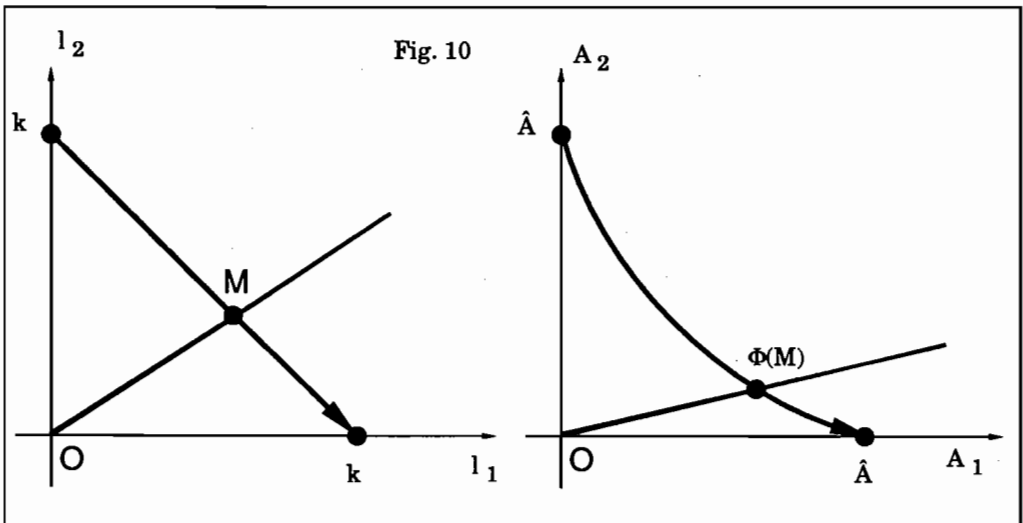
5.5. Et pour $d > 4$?

Pour $d > 4$, le problème peut se traiter suivant le même principe, mais il faut utiliser des outils plus puissants.

On définit de la même façon une application Φ de \mathbf{R}_+^{d+2} dans lui-même. Partant d'un point à l'intérieur de \mathbf{R}_+^{d+2} , on peut considérer l'application linéaire Λ tangente à Φ en ce point.

Montrons que Λ est injective : à une variation (δc_i) des c_i , correspond une variation $h = \delta g$ de g , et la variation δA_i des A_i est donnée (au premier ordre) par :

$$\delta A_i = \int_{c_i}^{c_{i+1}} h.$$



GEOMETRIE DANS LES ESPACES DE PARAMETRES

Mais une variation (δl_i) des l_i peut toujours être réalisée par une variation (δc_i) telle que le centre de gravité ne bouge pas, c'est-à-dire $\sum \delta c_i = 0$. Le polynôme est alors de degré $\leq d - 3$. Si les δc_i ne sont pas tous nuls, le polynôme h n'est pas nul, et il y a au moins un intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ sur lequel il garde un signe constant. On a alors :

$$\delta A_i = \int_{c_i}^{c_{i+1}} h \neq 0.$$

Comme Λ va de \mathbf{R}^{d+2} dans lui-même, c'est un isomorphisme.

Par suite Φ est un homéomorphisme local. En utilisant l'homogénéité et le prolongement au bord, on voit que Φ induit sur l'intérieur de \mathbf{R}^{d+2} une application propre. Cette application est donc un revêtement, et comme \mathbf{R}^{d+2} est simplement connexe, c'est un homéomorphisme.

Conclusion

Dans les trois exemples traités ici, on considère un ensemble d'objets (cercles, droites, polynômes) qui interviennent dans le problème. C'est un ensemble qui n'est muni *a priori* d'aucune structure. Pour pouvoir y travailler, il faut faire une *carte*, c'est-à-dire définir une correspondance avec un ensemble de points dans un espace qui a déjà une structure géométrique, ou un ensemble numérique (le plus souvent une partie de \mathbf{R}^n). C'est grâce à une telle carte qu'on peut transférer

le problème dans un cadre géométrique adapté, et faire le transfert inverse des résultats obtenus dans le cadre initial.

Le choix de la carte est crucial : c'est là que l'on montre son savoir-faire. Il s'agit d'une compétence qu'on peut acquérir par des essais et des réflexions sur leurs résultats ; c'est un apprentissage qui prend du temps mais peut commencer très tôt (cf. [RD]).

Ce n'est pas toujours le choix le plus naturel qui se montre le plus performant, comme on l'a vu dans les exemples 1 et 3. Parfois la correspondance n'est pas bijective : ainsi dans l'exemple 2, alors que l'ensemble des droites du plan s'identifie à un quotient de \mathbf{R}^2 homéomorphe à une bande de Möbius, le travail s'effectue dans son revêtement universel \mathbf{R}^2 .

Dans l'exemple 1, on peut transporter à l'ensemble des cercles la structure affine de \mathbf{R}^3 : les droites donnent les « faisceaux de cercles », les plans les « réseaux ». C'est une façon fructueuse d'introduire la théorie des faisceaux de cercles.

Une préoccupation constante est d'exploiter les invariances du problème pour réduire la dimension des espaces considérés, comme dans l'exemple 3 où on la fait chuter de quatre à deux.

Dans les exemples choisis, le travail est relativement facile une fois que la géométrisation a été effectuée convenablement. Il n'en est bien sûr pas toujours ainsi, mais la géométrisation suivant cette méthode fournit souvent au moins un moyen d'appréhender le problème. Alors que, dans l'exemple 2 au moins, sans cette méthode on est assez démuni.

Commentaires bibliographiques ou historiques

Nous tenons à remercier notamment Jean Brette et René Guitart pour les indications qu'ils nous ont données.

Lagrange, dans son *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes* de 1808, décrit l'ensemble des orbites Képlériennes possibles d'une planète autour du Soleil. En termes modernes, c'est une variété de dimension 5. C'est à notre connaissance la première fois qu'apparaît un espace de paramètres au sens où nous l'entendons.

Parmi les mathématiciens dont le nom est resté attaché à des objets ou des résultats concernant les espaces de paramètres, citons Riemann, Malus, Chasles, Plücker, Klein, S. Lie, Hausdorff, Grassmann, Hilbert, Poincaré, E. Cartan, Fréchet, Banach, Chow, Teichmüller, Ahlfors, Bers, Kuranishi, Gromov, etc.

En ce qui concerne les exemples traités ici, le problème sur les cercles (2.1) consiste à démontrer un théorème mentionné par M. Berger [B], qui l'appelle «Théorème du sixième cercle». Il semble dû à Chasles [Ch], par la théorie des involutions. Berger cite Dembrowski [De], qui situe cet énoncé dans une axiomatique de la géométrie anal-

agmatique (plans inversifs). Un article récent de Fillmore et Paluszny [FP] donne une description de l'espace des cercles (et droites) du plan euclidien E^2 comme région Ψ^+ de l'espace projectif P^3 extérieure à une quadrique non-réglée Ψ , et contient un dictionnaire fourni reliant des objets de Ψ^+ et des objets de E^2 .

On peut donner de ce Théorème du sixième cercle une démonstration utilisant les propriétés de l'inversion et la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, astucieuse mais s'abstenant de «monter d'un étage» en considérant l'ensemble de tous les cercles. Il serait plus difficile d'en faire autant pour le problème de retournement d'une droite.

L'identification entre l'ensemble des droites du plan et un plan projectif privé d'un point remonte au moins à la théorie de la dualité de Plücker, cf [K].

Sur le plan didactique, Régine Douady a introduit à l'école primaire, en vue de l'apprentissage des nombres décimaux, une série de problèmes portant sur des rectangles, amenant les élèves à raisonner sur des ensembles de rectangles représentés par des points du plan, au moyen de deux coordonnées choisies parmi les quatre grandeurs : 1er côté, 2ème côté, périmètre, aire.

Bibliographie

[B] Marcel Berger : Géométrie, T. 2, Chap. 10 Triangles, cercles et sphères, et T. 5, Chap. 20 L'espace des sphères, *CEDIC/NATHAN* édit. Paris, 1979.

[Ch] Michel Chasles : Traité de Géométrie supérieure, *Bachelier* édit, Paris 1852.

[De] P. Dembrowski : Finite Geometries, *Springer Verlag* édit. New-York 1968.

[RD] Régine Douady : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 1987.

[DP] Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin-Glorian : Les nombres décimaux, Liaison Ecole-Collège, brochure 62 IREM Paris-7, 1986.

[FP] Jay P. Fillmore and Marco Paluszny : The Apollonius Contact Problem and Representational Geometry, *Acta Cientifica Venezolana*, 1997.

[K] G. Kœnigs : La géométrie réglée et ses applications, *Gauthiers-Villars* édit. 1895.

[L] Joseph-Louis Lagrange : Mémoire sur la Théorie des Variations des Elements des Planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites, lu le 22 Août 1808 à l'Institut de France.

[M] Auguste Miquel : Théorèmes sur les intersections des cercles et des sphères, *Journal de Liouville*, 3 , 1838.

A. Douady
 Département de Mathématiques
 Université de Paris-Sud
 91405 Orsay