REPERES - IREM . N° 35 - avril 1999

UN PROBLÈME PEUT EN CACHER UN AUTRE !...

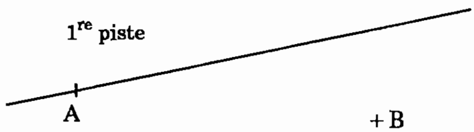
Michel RODRIGUEZ
IREM de Lille

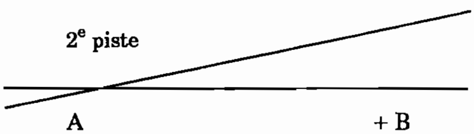
Les problèmes, c'est comme les trains à plusieurs égards. Ils nous font souvent voyager bien au delà de la destination que l'on s'était fixée en les empruntant. Je me propose de vous faire partager mes récentes tribulations à l'occasion de la résolution d'une énigme géométrique a priori très innocente... Le voyage a duré pour moi plusieurs jours, mais vous le parcourez en T.G.V., alors... Attachez vos ceintures et n'oubliez pas...

...E PERICOLOSO SPORGERSI !...

L'aventure commence en cherchant un exercice à donner à mes élèves de seconde. Après avoir dessiné deux points A et B sur la feuille je m'aperçois que le morceau de règle (...je ne jette jamais mes règles cassées !...) que j'utilise est trop court pour matérialiser le segment [AB]. Pourtant, dans les constructions "à la règle et au compas" on n'impose aucune condition de longueur à la règle, ni d'écartement maximum au compas. On doit donc être en mesure de tracer ce segment, même avec une règle trop petite et un compas limité, mais comment ?...

Je réfléchissais à ce problème lorsque je suis tombé sur l'article de M. ROUSSELET dans la revue bimestrielle de l'A.P.M.E.P de juin / juillet 96 (pages 435 et suivantes). L'activité proposée me donna une excellente matière à une séance de module puisqu'elle fournit une solution ne faisant appel qu'à des connaissances très élémentaires (principalement la droite des milieux dans un triangle...). Cependant, "la" solution présentée ne satisfaisait pas totalement ma curiosité car elle n'envisageait qu'une seule façon de démarrer le problème et qui consistait à tracer une droite passant par chacun des points A et B, c'est à dire deux droites a priori sécantes... Pourquoi, me disais-je, ne pas commencer par tracer une seule droite passant par A ?... ou même deux droites sécantes en A, "visant" B mais le manquant de peu ?

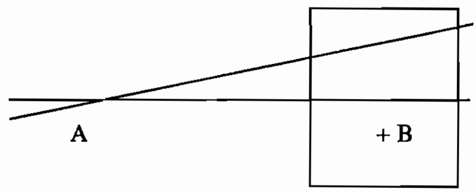




Le croirez-vous, les deux pistes peuvent aboutir, et de plusieurs façons chacune...

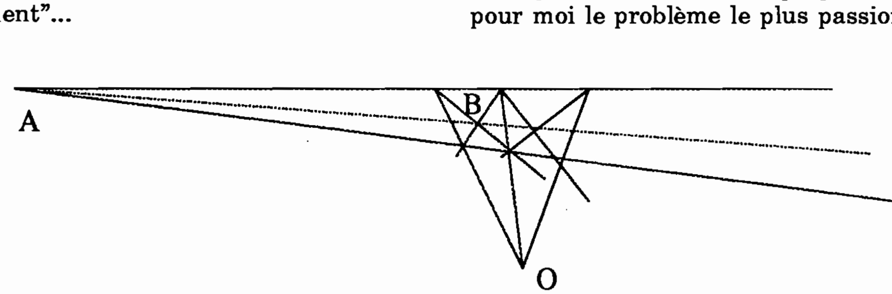
La première, dès que la droite passe "à portée de règle et de compas" de B permet de tracer la parallèle passant par B. On peut alors trouver P et Q tels que APBQ soit un parallélogramme et P et Q soient "à portée de règle et de compas" l'un de l'autre. Les segments [AB] et [PQ] auront alors même milieu, et celui de [PQ] sera constructible. On recommence alors l'opération en faisant jouer à ce milieu le rôle de B, et, de proche en proche, on finira par trouver un point du segment [AB] suffisamment proche de A pour "démarrer le segment"...

La deuxième piste est celle qui a inspiré le titre de cet article... Concentrons nous sur ce qui se passe au voisinage de B :



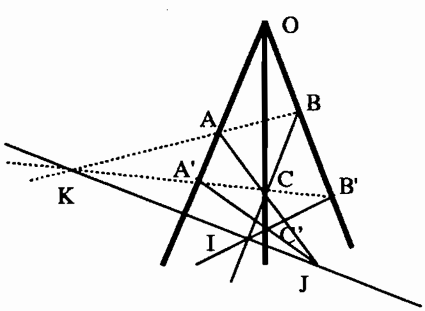
... Et l'on reconnaît un exercice que nous avons tous déjà rencontré : celui des droites qui se coupent "hors de la feuille". Il s'agit de dessiner la trace sur la feuille de la droite passant par B et par le point d'intersection "invisible" des deux droites. Les solutions à ce problème sont très nombreuses, la plus couramment rencontrée est peut-être celle qui sert d'application à la propriété de concours des hauteurs d'un triangle en se servant des projetés orthogonaux de B sur les deux droites... Mais la nature du problème me dissuade d'utiliser les propriétés "euclidiennes" car il n'y a aucun angle droit sur la figure. Et, de fait, dans la même classe de seconde où je l'ai présenté, il y a eu un élève pour me présenter la figure suivante sans la justifier (...il aurait été bien en peine, le pauvre...) *(figure ci-dessous).*

La justification de cette propriété-là fut pour moi le problème le plus passionnant



de la série, car il m'a obligé à revisiter le théorème de Desargues (pas avec les élèves, rassurez-vous...) et il m'a permis aussi de constater à quel point il est enrichissant, en géométrie, de considérer la figure comme une représentation du "réel intelligible".

Je m'explique... Rappelons rapidement en quoi consiste ce fameux théorème et remarquons au passage que certaines "versions" de celui-ci sont tout de même connues des élèves de seconde. Voici la figure que l'on propose en illustration au théorème de Desargues :



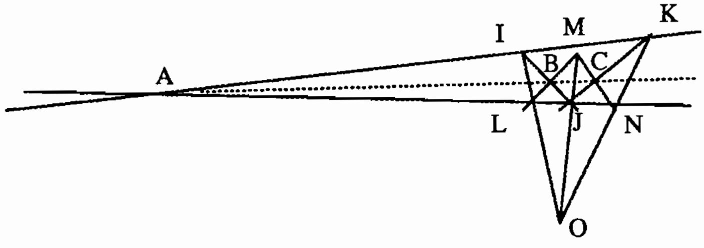
Le théorème, partant de l'hypothèse (AA'), (BB'), (CC') faisceau de droites (concourantes ou parallèles), conclut à l'alignement des points d'intersection I, J, et K (...s'ils peuvent être construits...).

Supposons que l'on veuille contrarier toutes les possibilités d'intersection, on aurait alors un faisceau parallèle avec en plus (AB) // (A'B'), et (AC) // (A'C'), la figure devient le classique "enchaînement de parallélogrammes" vu dès la quatrième, il permet de conclure au parallèlisme (BC) // (B'C'). Cela correspond à la vision projective pour laquelle I,J,K sont les points à l'infini des directions (BC), (AC) et (AB), ces points seront alignés sur l'horizon (la droite infinie de la direction du plan (ABC).

Soyons moins exigeants en permettant au faisceau d'être concourant, mais conservons les deux autres parallélismes de droite. Cette fois-ci, on se trouve devant "l'enchaînement de trapèzes", que l'on démontre en troisième (comme application de la réciproque du théorème de Thalès). Rien de nouveau sinon cette même vision projective, qui nous fait dire que l'on est simplement en train de "regarder le même objet sous un autre point de vue"...

La figure plus générale donnée ci-dessus est très proche de celle proposée par cet élève dans le cadre du problème, et que j'ai complétée ci-dessous en donnant des noms aux intersections intéressantes *(figure ci-dessous)*.

On y reconnaît le faisceau de trois droites concourantes et les intersections... J'ai bien sûr tout de suite pensé au théorème de Desargues, qui, une fois admis, nous permet une démonstration



directe : Les triangles (IJK) et (LMN) sont tels que (IL), (MJ) et (KN) sont concourantes et que (IJ) et (LM) se coupent en B, (JK) et (MN) se coupent en C et (IK) et (LN) se coupent en A, donc A, B, et C sont alignés !... mais nous étions en seconde, et je me refusais à présenter cela sans autre justification.

Je me suis alors souvenu qu'une démonstration du théorème de Desargues est à la portée du programme de seconde : Il suffit de "regarder autrement" le dessin et supposer qu'il représente un tétraèdre (IJKO) coupé par un plan (MNL), ces trois points étant choisis sur les arêtes passant par le sommet O. Les points A, B, et C doivent se trouver simultanément sur le plan (IJK) et sur le plan (LMN)...L'intersection de deux plans non parallèles étant une droite, l'alignement de A, B, et C s'en déduit aisément. Qui plus est, le chapitre de géométrie dans l'espace avait déjà été rencontré. Une chance !...

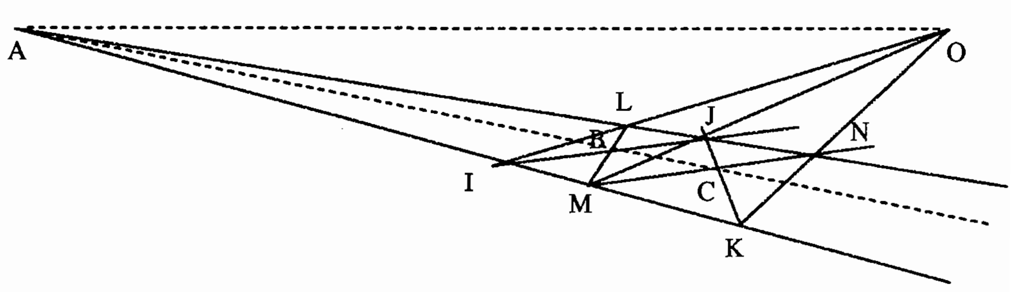
Pourtant, un détail m'arrêta encore : Cette "vision" dans l'espace était fortement compromise dans la figure qui nous préoccupait, car cette vision fait abstraction de l'alignement de M avec (IK) et de J avec (LN)... si l'on "regarde" dans l'espace, la droite (OJ) sur laquelle est choisi M ne peut rencontrer la droite (IK), et on est allé choisir le seul point "gênant" pour appliquer Desargues... On aura beau se défendre devant les élèves en disant que ce n'est qu'un problème de "point de vue" et qu'on se trouve dans un "cas limite", il y a fort à parier que certains prennent cela pour de la supercherie et que d'autres en déduisent que l'on peut démontrer des propriétés générales à partir de cas particuliers...

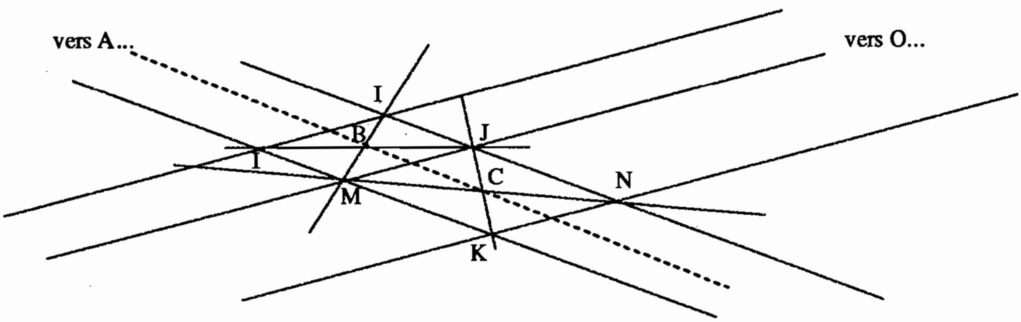
J'abandonnais donc à regret la partie... Et je laissais le problème en suspens...

Quelques mois plus tard, à l'occasion d'un autre module, je revenais sur la géométrie dans l'espace dans une activité destinée à comprendre les techniques de la perspective conique. Et la lumière jaillit !... On va encore "regarder autrement" la figure...

J'ai volontairement tracé la droite (AO) qui sera l'horizon de notre dessin... Tous les points de la figure sont dans le plan géométral. Voyez-vous où je veux en venir ?... *(cf. figure ci-dessous)*

Eh oui... La figure est devenue la représentation en perspective d'une figure plane ultra-simple !... (IL), (MJ), et (KN) sont parallèles puisqu'elles se coupent à l'horizon, de même pour (IK) et (LN) A et O sont des points à l'infini et la phrase "A, B, C sont alignés" revient à dire que **(BC) est parallèle à (IK) ou (LN).** Regardons à





nouveau la figure mais dans une vue "d'aplomb" *(cf. ci-dessus)*...

Est-il besoin de rédiger la fin de la démonstration ?... Je ne pense pas : B et C sont les centres de deux parallélogrammes contigus, et tout le monde sait bien que l'axe médian d'une route droite est parallèle aux bords de cette route...

Tiens... Je m'aperçois que j'étais parti du chemin de fer, et me voilà sur la route... Mon article a un peu "déraillé", mais j'espère que le voyage vous fut agréable.

Pour ma part, je retiens de cette activité qu'il est parfois intéressant, lorsque l'on est en présence d'une figure, de la regarder comme une **représentation** de quelque chose d'autre. L'imagination (au sens de la production d'images...) est une qualité que l'on n'encourage peut-être pas assez en cours de Maths.