
AU TOUR DE LA SYMÉTRIE CENTRALE

Michel JAFFROT, Annick MASSOT
IREM des Pays de la Loire

Lorsqu'en en sixième, on aborde la symétrie axiale, les élèves ont souvent une impression de "déjà vu". On l'aborde dans sa double dimension : "axe de symétrie-pliage" ou "correspondance point par point", sur des dessins observés, réalisés ou à partir de manipulations diverses.

Par contre, la symétrie centrale est, en classe de cinquième, une "vraie" nouveauté.

Aussi nous avons choisi de donner une place importante à la symétrie centrale, d'une part lors de la découverte de cette nouveauté, et d'autre part dans des prolongements vers les angles et les quadrilatères.

Dans toutes les activités proposées, le travail long terme sur le passage dessin-figure est sous-jacent. Parfois les dessins sont imposés, c'est le cas lors de la phase de découverte, souvent ce sont les élèves qui sont invités à les créer.

Les confrontations des différentes procédures utilisées, des divers dessins réalisés, des réponses différentes aux questions posées seront des occasions de travailler ce passage dessin-figure.

Dans cet article, d'abord nous présentons une activité de découverte de la symétrie centrale, qui permet de dégager ses propriétés.

Puis nous développons quelques prolongements possibles qui s'appuient principalement sur la recherche du symétrique d'un angle en variant la position du centre.

Cette idée simple permet de découvrir, voire de redécouvrir certaines définitions et propriétés des angles : les angles opposés par le sommet, les angles alternes-internes, la somme des angles d'un triangle.

Elle permet aussi de retravailler les parallélogrammes dont les particuliers : losange, rectangle, carré.

 AU TOUR DE LA SYMETRIE CENTRALE

Enfin nous évoquons une piste qui est l'étude du symétrique d'un triangle en faisant varier la position du centre. Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer les découvertes ou redécouvertes que cela permet.

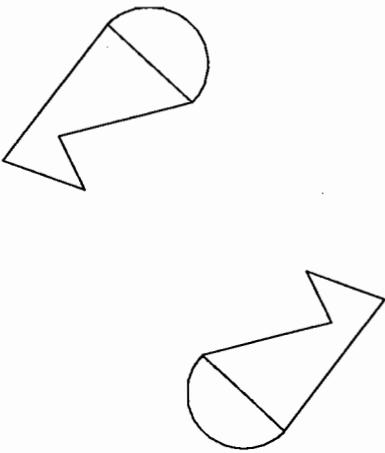
Dans cet article, nous aimerions montrer que la symétrie centrale permet, en multipliant les occasions de les rencontrer, de relier ensemble certains objets de la géométrie des programmes de sixième et de cinquième.

I. UNE VRAIE NOUVEAUTÉ POUR LES ÉLÈVES DE 5^e

Voici donc la **première activité** proposée à nos élèves.

Activité 1

Trouve au moins un procédé qui permet, à partir du dessin A, d'obtenir le dessin B.



Cette situation a été expérimentée dans nos classes depuis une dizaine d'années.

Elle se déroule en plusieurs étapes, alliant entre autres, recherche individuelle, confrontation, échange en groupes, débat en classe entière, exposés indivi-

duels des différentes solutions possibles, synthèse.

Les élèves ont à leur disposition : une photocopie individuelle de la situation proposée, du papier calque et le matériel habituel de géométrie...

Lors de ces expérimentations, chaque année nous constatons, la richesse des découvertes.

Certains élèves "sentent" le demi-tour et son centre, mais ont de réelles difficultés à l'exprimer et à le définir.

On voit ainsi certains élèves faire un mouvement de rotation avec leur main, d'autres font tourner leur main, le pouce posé sur la feuille. La main, le geste traduisent et aident la pensée...

D'autres s'appuient sur la symétrie axiale et réutilisent un double pliage d'axes perpendiculaires.

On peut voir des élèves réaliser de nombreux essais de pliage. Là encore, le geste aide à la pensée...

D'autres relient les points correspondants entre les deux dessins.

D'autres enfin, imaginent des compo-

sées de transformations, par exemple une translation suivie d'un demi-tour.

Chaque découverte, solution ou ébauche de solution au problème posé, trouvée individuellement ou collectivement, est exposée à l'aide du rétroprojecteur. Aucune réponse n'est rejetée. Les différences, les points communs des stratégies utilisées sont mis en évidence pour préparer la synthèse.

Il n'est pas toujours facile de faire découvrir l'existence, le rôle, la "puissance" de ce point appelé centre de symétrie. Il est à la fois intersection des deux axes trouvés, centre du demi-tour pressenti, milieu commun des segments reliant des points correspondants.

La définition de ce centre est liée au choix de la stratégie imaginée. Ces différentes stratégies dépendent, elles, de la vision globale ou point par point des deux parties du dessin donné.

Les différents points de vue se complètent. Le demi-tour permet de percevoir la conservation des longueurs, des angles... et la correspondance point par point, comme la composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires mettent plus en évidence le centre. Ces différents points de vue sont ainsi reliés.

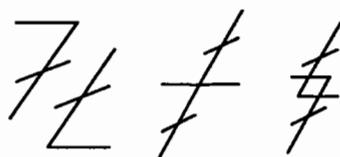
Bien sûr, il nous faudra privilégier le demi-tour et la relation entre points correspondants. Parmi les différentes stratégies utilisées, ce sont celles qui apparaissent comme les plus "économiques", voire les plus rapides. On peut faire remarquer que le glissement est un intermédiaire dont on peut se dispenser.

L'institutionnalisation des trois

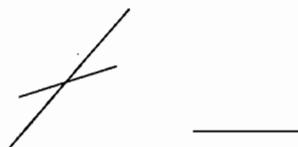
méthodes retenues est faite dans cette phase de l'activité.

A la suite de cette première phase importante de découverte de la symétrie centrale et de ses différentes facettes, plusieurs pistes sont possibles pour faire "utiliser naturellement" et ressortir ensuite les différentes propriétés, **institutionnalisées a posteriori**, de la symétrie centrale :

- donner un dessin et son symétrique, les deux dessins pouvant être séparés ou non, pour trouver le centre de symétrie ;



- une variante possible consistant à donner un dessin et un extrait du dessin symétrique qu'il faudra compléter après avoir trouvé le centre de symétrie ;



- donner un dessin et le centre de symétrie, intérieur ou extérieur au dessin, appartenant ou pas au dessin, pour obtenir le dessin symétrique ;



AU TOUR DE LA SYMETRIE CENTRALE

– rechercher des figures géométriques ayant un centre de symétrie(ou divers dessins, comme des logos).

Pour réaliser ces dessins, une phase peut se faire à main levée. Cela permet d'anticiper la réponse et de prendre conscience de l'utilisation de certaines propriétés, par exemple le parallélisme de deux segments.

L'ordinateur, en particulier avec Cabri-géomètre, peut aussi permettre de faire percevoir les propriétés qui se conservent. C'est aussi l'occasion de faire un travail conséquent de formulation à l'oral, comme à l'écrit, d'une part lors des constructions réalisées et d'autre part lors des propriétés trouvées. On rejoint ici la préoccupation constante de lire et écrire.(voir autre article sur ce thème)

A l'aide de ces travaux, définitions et propriétés sont dégagées. Elles sont souvent admises, comme le recommandent les programmes, étant perçues comme évidentes. Cependant on peut en justifier

certaines, le méthode "composition de deux symétries axiales" permet de réutiliser des propriétés vues en sixième, comme par exemple la conservation des longueurs.

Par contre, le parallélisme rencontré dans les observations et les manipulations précédentes est admis.

Parmi celles ci, en vue de réinvestissements ultérieurs, on met entre autres en évidence (la formulation proposée est une parmi les possibles) :

- Un segment a pour symétrique un segment parallèle et de même longueur.
- Le centre de symétrie a pour symétrique lui même.
- Un angle a pour symétrique un angle de même mesure, ses côtés sont parallèles et de "sens contraire".
- Une droite a pour symétrique une droite parallèle.
- Une demi droite a pour symétrique une demi droite parallèle et de "sens contraire"...

II. DES PROLONGEMENTS, DES DÉCOUVERTES... DES REDÉCOUVERTES

Dans les nouveaux programmes de cinquième, on peut lire :

"...Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées ; le parallélogramme est une figure fondamentale du programme..."

Pour la première activité, on propose d'approfondir l'étude du **symétrique d'un angle** en jouant, d'une part sur la position relative de l'angle donné et du centre de symétrie et, d'autre part, sur la mesure de l'angle.

Les activités suivantes peuvent être proposées dans la foulée, mais peuvent aussi être décalées dans le temps pour permettre de réinvestir, entre autres, les nouvelles connaissances concernant la symétrie centrale.

A. Une première idée de départ : le symétrique d'un angle

Comme dans la première activité proposée dans cet article, on met en place une recherche individuelle, suivie d'un travail en groupes, d'un exposé des découvertes, par exemple sur transparents fournis au groupes.

La consigne donnée pour cette activité permet d'obtenir une grande variété de dessins. Pendant la recherche, on observe souvent des dessins à main levée (on peut aussi les suggérer).

Dessine un angle $\widehat{x\hat{A}y}$.
 Place un point O.
 Construis le symétrique de l'angle $\widehat{x\hat{A}y}$ autour du point O.
 Réalise plusieurs figures différentes.

La collecte de tous les dessins obtenus nécessite un tri pour dégager les différents cas possibles. (cette recherche des cas possibles peut se faire en groupes, ne serait-ce que pour en préciser la signification)

Le premier tri se fait sur la position du centre de symétrie.

Puis, à l'intérieur des familles de dessins ainsi obtenus, on fera un deuxième tri suivant la mesure de l'angle. En effet, l'angle droit apparaît assez naturellement dans les classes, permettant ainsi d'obtenir des figures particulières.

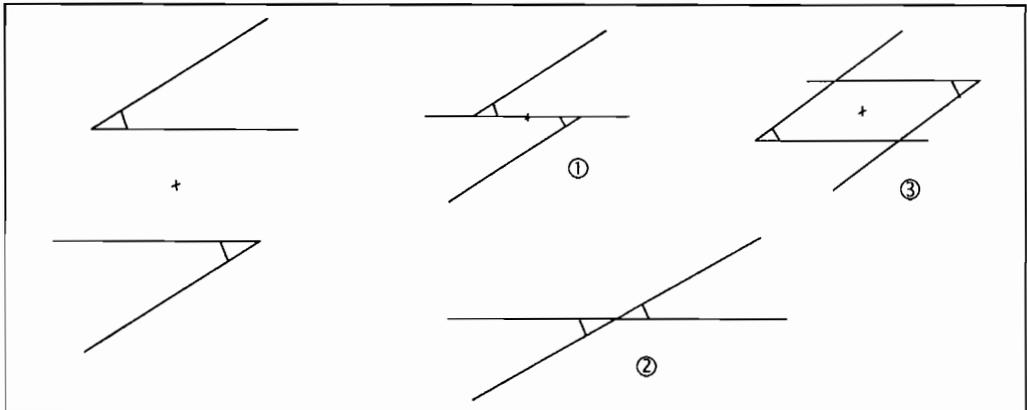
Cette activité peut aussi être l'occasion de travailler avec l'ordinateur, soit en changeant la position du centre de symétrie, soit en changeant la mesure de l'angle. Cela permet de récapituler les différentes solutions ou de trouver celles qui manquent (cf. figures ci-dessous).

Plusieurs pistes apparaissent : une première vers les **angles opposés par le sommet** ② lorsque le centre de symétrie est au sommet de l'angle, une deuxième vers les **angles alternes-internes** ① lorsque le centre de symétrie est sur un des côtés de l'angle et une troisième vers les **parallélogrammes et leurs propriétés** ③ lorsque le centre de symétrie est "entre les côtés de l'angle". On choisit de les travailler séparément

1. Un plan de travail commun à chacune de ces pistes

Ce travail se déroule en plusieurs phases, d'importance inégale suivant le cas.

Phase 1 : Lecture des dessins et généralisation. Collecte de "renseignements nouveaux".



AU TOUR DE LA SYMETRIE CENTRALE

La collecte de tous les dessins de la classe a pu se faire sur transparent.

a) *Observation* des dessins pour émettre des *conjectures* :

La consigne est : "que peut-on dire de vrai sur tous les dessins ?"

Passer de la lecture de son propre dessin à la lecture des dessins réalisés dans la classe ou que l'on pourrait aussi réaliser, est une phase importante.

Cette première phase permet d'éliminer certaines particularités, par exemple "sur le dessin, il y a un angle de 60°". L'utilisation de Cabri-géomètre peut encore un peu plus faire sentir la figure générique.

Ces observations (en fait des conjectures) se font à l'oral ou par écrit. Les écrire individuellement peut-être un support pour un travail collectif sur l'expression et la formulation.

b) *Explication*

Dans le cadre de l'apprentissage à la démonstration, une explication, une justification, un début de preuve peut se faire à l'aide des propriétés précédemment institutionnalisées. C'est un travail difficile, car les réponses sont évidentes sur les dessins. On obtient finalement une liste de "renseignements" mis en évidence.

Les élèves peuvent aussi faire une "lecture différente" de leurs dessins, en parlant de droites sécantes ou de figures déjà rencontrées. Cela permettra dans la phase 4 de formuler des propriétés les concernant.

Phase 2 : des contre-exemples.

A partir de dessins "contre-exemples"

préparés sur transparent, c'est une phase de questionnement de ces "renseignements".

La consigne peut être de critiquer ces dessins pour lesquels un (au moins) de ces renseignements n'est pas vérifié. On fait ainsi apparaître qu'alors les angles ne sont pas symétriques.

Phase 3 : bilan.

On dégage définitions et propriétés. Bien sûr, leur formulation est encore l'occasion d'un travail particulier, à l'oral ou à l'écrit.

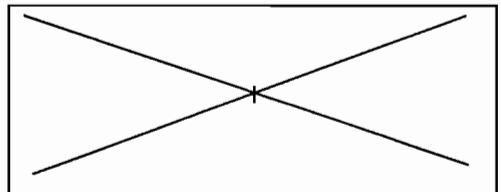
Phase 4.

Une *relecture globale* de la figure en terme de droites sécantes ou de figures particulières peut se faire. Des propriétés sont alors formulées ou retrouvées.

Phase 5. C'est l'étude du cas particulier de l'angle droit.

2. Première piste vers les angles opposés par le sommet : le centre de symétrie est au sommet de l'angle

Phase 1 : L'observation des dessins permet de dégager et de justifier, en utilisant les propriétés institutionnalisées :



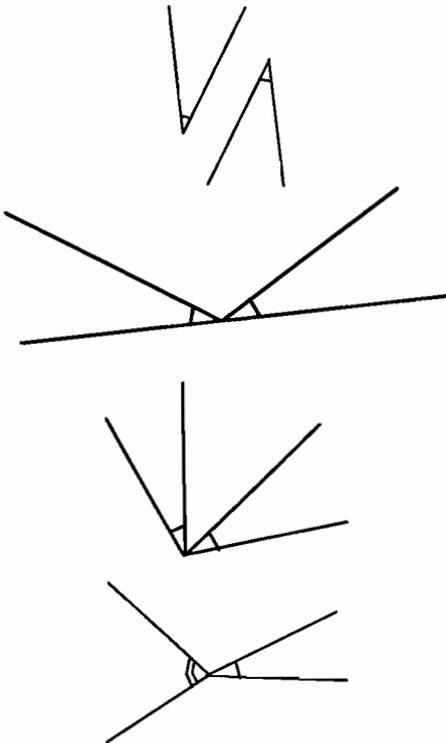
- les angles sont égaux

- les angles ont le même sommet
- les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Cette dernière justification est difficile, il faut mettre en correspondance les demi-droites opposées.

Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "que peut-on dire des dessins suivants ?"

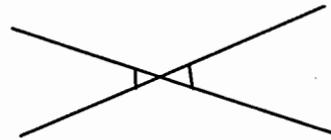


Phase 3 : En bilan, on dégage définition et propriétés.

Par exemple :

- Deux angles qui ont le même sommet, et leurs côtés opposés, sont appelés "angles opposés par le sommet".
- Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils sont égaux.

Phase 4 : La figure obtenue peut aussi être lue comme deux droites sécantes qui créent ainsi des angles opposés par le sommet et donc de même mesure (deux paires).



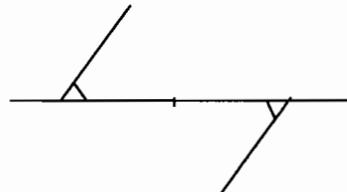
Phase 5 :

On peut aussi étudier le cas de l'angle droit, pour re-rencontrer deux droites perpendiculaires.

3. Deuxième piste vers les angles alternes-internes : le centre de symétrie est sur un des côtés de l'angle

Phase 1 :

On obtient des angles qui ont "un côté commun", les deux autres sont parallèles et sont situés de part et d'autre du côté commun. Ils sont égaux.

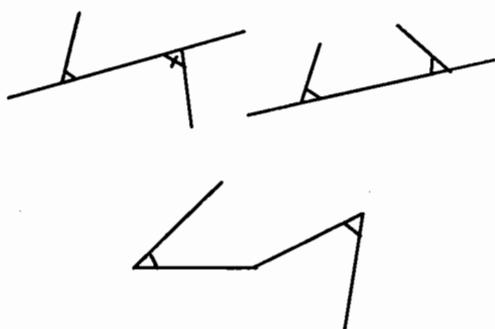


Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "que peut-on dire

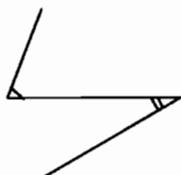
AU TOUR DE LA SYMETRIE CENTRALE

des dessins suivants ?”



Phase 3 :

On peut d'abord désigner par deux angles alternes-internes, deux angles ainsi disposés.



Ils ont un côté commun, les deux autres côtés étant situés de part et d'autre du côté commun.

et ainsi dégager des propriétés :

Propriété 1 :

Deux angles étant alternes-internes, si leurs côtés non communs sont parallèles alors ils sont égaux.

Propriété 2 :

Deux angles étant alternes-internes, si leurs côtés non communs ne sont pas parallèles, alors ils ne sont pas égaux.

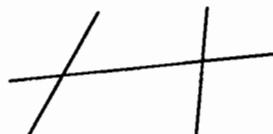
et leur réciproque (admise) :

Si deux angles alternes-internes sont égaux, alors leurs côtés non communs sont parallèles.

Si deux angles alternes-internes ne sont pas égaux, alors leurs côtés non communs ne sont pas parallèles.

Phase 4 :

La relecture du dessin, sous forme d'une droite et deux sécantes permet de reformuler les propriétés sur les droites...



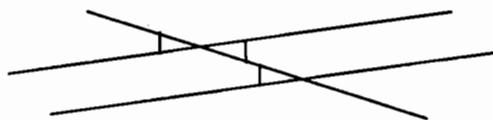
Phase 5 :

Le cas de l'angle droit permet de retrouver les propriétés concernant deux droites perpendiculaires à une même troisième.



A la suite, deux pistes s'ouvrent :

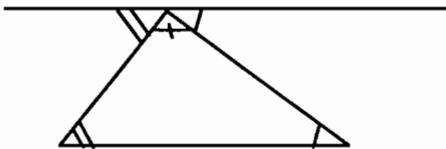
a) vers les *angles correspondants*



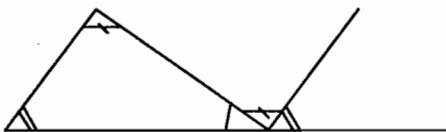
en combinant angles alternes-internes et des angles opposés

b) dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration, ces différentes propriétés constituent des outils qui vont permettre, par exemple de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat, soit à l'aide des angles alternes-

internes, soit à l'aide des angles alternes-internes et correspondants.



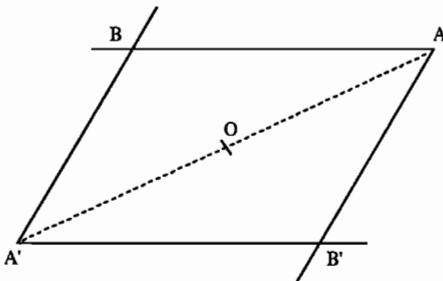
ou



4. Troisième piste vers les parallélogrammes : le centre de symétrie est "à l'intérieur" de l'angle

Phase 1 :

On obtient deux angles dont les côtés sont parallèles deux à deux. Les angles sont égaux.



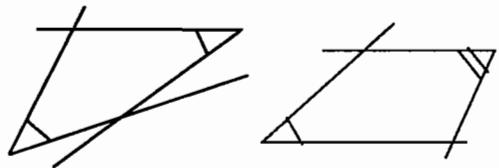
O est le milieu de $[AA']$. O est le milieu de $[BB']$. (sa justification est difficile)

On obtient aussi un parallélogramme. O est le milieu de la diagonale $[AA']$. O est

aussi le milieu de l'autre diagonale. Les côtés opposés sont égaux deux à deux. Les angles opposés sont égaux deux à deux. Dans la suite, on privilégie l'étude du parallélogramme.

Phase 2 : Des dessins contre-exemples.

La consigne peut être : "que peut-on dire des dessins suivants ?"



Pas de Phase 3.

Phase 4 :

Dans le parallélogramme ainsi obtenu, mais déjà rencontré dans les classes antérieures, des propriétés sont retrouvées. Certaines peuvent ainsi être expliquées à partir de celles de la symétrie centrale.

Dans les nouveaux programmes de cinquième, on peut relire : "...Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées ; le parallélogramme est une figure fondamentale du programme..."

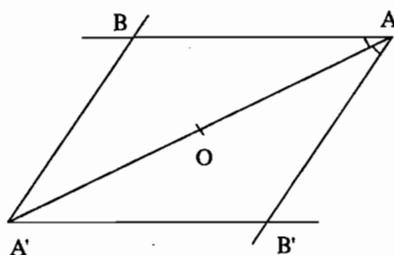
De plus, à l'aide des propriétés des angles alternes-internes, on peut démontrer que les angles $\widehat{B\hat{A}B'}$ et $\widehat{A'BA}$ sont supplémentaires.

Phase 5 : à partir de l'angle droit, on retrouve l'étude du rectangle.

AU TOUR DE LA SYMETRIE CENTRALE**Deux nouvelles pistes s'ouvrent :**

- a) lorsque le centre de symétrie est sur la bissectrice de l'angle, vers le losange.
 b) en combinant les deux, angle droit et centre sur la bissectrice, vers le carré.

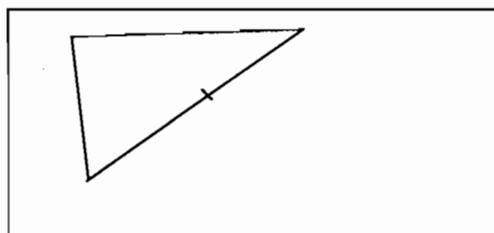
Certaines propriétés peuvent aussi être l'occasion d'un problème, pour être démontrées, par exemple : lorsque O est sur la bissectrice de \widehat{BAB}' , à l'aide d'angles alternes-internes, on obtient des triangles isocèles, et donc un losange.

**B. Une autre idée de départ : le symétrique d'un triangle ABC**

On peut aussi proposer comme consigne de départ : "où placer le centre de symétrie pour obtenir un parallélogramme ?"

En considérant tous les "cas possibles",

le parallélogramme est ainsi reconnu, rerencontré, en plaçant le centre de symétrie au milieu d'un côté..



Certaines propriétés du parallélogramme peuvent ainsi être dégagées et expliquées :

- ses côtés opposés ont la même longueur
- ses diagonales ont le même milieu
- les angles opposés ont la même mesure

On peut ensuite poursuivre la recherche en demandant quelle doit être la nature du triangle ABC, et où placer le centre de symétrie pour obtenir un rectangle, un losange, ou un carré.

Des propriétés de chacune de ces figures particulières peuvent ainsi être retrouvées et complétées.

Bibliographie très sommaire

Dans une brochure de l'IREM des Pays de la Loire, intitulée "Autour de la symétrie centrale", nous avons développé l'activité de découverte et quelques exercices qui suivent.