REPERES - IREM . N° 35 - avril 1999

INTRODUCTION À UNE DÉMARCHE SCIENTIFIQUE EN PRIMAIRE À PARTIR DU PROBLÈME DE GALILÉE

Françoise CERQUETTI-ABERKANE,
IUFM de Créteil, centre de Bonneuil

Il s'agit d'amener les enfants de primaire à résoudre des problèmes, à vérifier ce qui semble évident et à se méfier de leur sens commun.

Introduction

Sous la direction d'Evelyne Barbin une équipe d'enseignants de mathématiques de l'IUFM de Créteil mène une recherche sur le rôle de l'apport de l'Epistémologie et de l'Histoire des Mathématiques dans la formation des maîtres et dans l'enseignement primaire. Pour les élèves de l'école élémentaire il s'agit de travailler spécifiquement l'apprentissage à la résolution de problèmes au travers de problèmes de type historique et également de modifier et de construire le rapport au savoir des enfants en leur montrant, grâce à l'histoire des mathématiques, que l'on n'a pas toujours su ou connu de la même façon, qu'il y a eu des hésitations et des chemins divers conduisant à ce qui est enseigné aujourd'hui.

Après un travail de réflexion sur la résolution de problèmes, avec des maîtres de classes de cycle trois, j'ai, à la demande de deux d'entre d'eux, assuré plusieurs séquences utilisant l 'histoire des mathématiques dans une classe de Cours Moyen deuxième année et dans une classe de Cours Elémentaire deuxième année(2) et (3). Dans ce cadre, cet article rapporte quelques unes des activités menées en classe de Cours Moyen deuxième année dans une école de la région parisienne. Pendant toutes les séquences le maître de la classe est présent et observe les enfants.

La résolution de problèmes est une des activités fondamentales au cycle 3 comme le précisent les instructions officielles.

Elle pose habituellement de grandes

difficultés aux enfants. La plupart du temps elle est ressentie comme pénible pour un grand nombre d'élèves et ils l'abordent sans grand intérêt et parfois même avec répulsion. Afin de tenter de rendre le travail sur la résolution de problèmes plus attractif, j'ai choisi de proposer le problème suivant aux enfants : comparer les volumes de deux cylindres faits avec deux rectangles de mêmes dimensions.

Les paysans de l'époque de Galilée se sont interrogés sur la façon la plus rentable de faire un sac avec un rectangle de tissu non carré. L'expérience pratique les a conduits à utiliser la longueur du rectangle comme périmètre de la base du sac cylindrique. Galilée entreprit de vérifier par le calcul ce que les paysans avaient découvert expérimentalement. Pour cette raison ce problème est communément appelé problème de Galilée.

Ce problème m'a semblé intéressant pour plusieurs raisons. D'une part il utilise des notions concernant le cercle, le disque et le cylindre de révolution, (au programme du CM2), d'autre part il permet la vérification pratique des hypothèses émises. Le contexte historique de la recherche d'une solution mathématique semble pouvoir éveiller la curiosité des enfants. De plus cela cadre parfaitement avec les objectifs assignés au cycle 3 quant à la résolution de problèmes. Je n'avais pas alors pensé aux suites à donner sur le calcul de π . C'est le questionnement des élèves et leur intérêt pour le sujet qui m'ont conduite à poursuivre l'activité de recherche dans un sens non prévu à l'avance.

Les dimensions du rectangle ont été choisies afin que la longueur soit le double de la largeur ceci pour mettre en évidence le rapport des aires de base et des volumes. Je n'avais pas du tout envisagé à ce moment-là la vérification expérimentale proposée par l'un des élèves. Cependant il semble que c'est justement ce rapport des dimensions qui a permis d'arriver à une conclusion irréfutable, même si cette manipulation n'est pas généralisable dans le cas d'un rectangle quelconque.

Première activité : position du problème

Après un bref commentaire historique concernant le problème de Galilée (commentaire qui ne dévoile naturellement pas la solution à laquelle les paysans sont parvenus), le texte suivant est proposé aux enfants :

"Avec deux rectangles de 10 cm sur 20 cm, réaliser deux cylindres différents et comparer leur volume."

Les enfants sont en groupes de 4 et chaque élève dispose de deux rectangles de carton afin de pouvoir réaliser les deux cylindres. Chaque groupe doit produire une affiche résumant l'état de sa recherche.

Les objectifs de cette première activité sont d'amener les enfants à résoudre un authentique problème. Ils doivent ainsi confronter leurs propositions et en faire la synthèse afin de produire une affiche explicative unique pour le groupe.

Il faut signaler qu'au début de l'activité les élèves ne connaissent pas la formule du volume du cylindre. On espère que le problème posé va créer le besoin d'un tel apport théorique.

Voici quelques exemples d'affiches.

Groupe 1 :

"On roule la largeur et aussi la longueur. On met par exemple de l'eau jusqu'au bord d'un cylindre."
Les deux cylindres sans fond, sont collés sur l'affiche.
Interrogés sur ce qu'ils voulaient faire réellement, les membres du groupe ont expliqué qu'ils voulaient, après leur avoir fait un fond, transvaser l'eau d'un cylindre dans l'autre, mais qu'ils pensaient que les deux volumes étaient identiques.

Groupe 2 :

"Pour savoir celui des deux cylindres qui contiendra le plus d'eau, nous avons fait deux cylindres un cylindre en large et un cylindre en longueur. En faisant les calculs nous pensons que c'est le cylindre en longueur."
Les deux cylindres sans fond sont également collés sur l'affiche et figure ensuite le calcul suivant : $28{,}2 \times 10 = 282$ à côté du cylindre le plus bas.
Questionnés sur leur méthode de résolution ils n'ont pu expliquer leur calcul.
C'est le seul groupe qui semble douter de l'égalité des volumes.

Groupe 3 :

L'affiche contient les deux cylindres sans fond.
A côté de chacun d'eux figure le calcul suivant :
$3 \times 20 = 60$ (pour le cylindre roulé en longueur). Le nombre 3 représente une approximation du diamètre de la base.
$6 \times 10 = 60$ (pour le cylindre roulé en largeur). Le nombre 6 représente une approximation du diamètre de la base.
Conclusion : les deux cylindres ont le même volume.

Groupe 4 :

"Le cylindre est roulé en largeur. Pour savoir lequel en contient le plus on transvase (l'un dans l'autre ou en utilisant un verre gradué). Le cylindre est roulé en longueur."
Là encore les deux cylindres sans fond sont collés sur l'affiche.

Les trois autres groupes ont produit une affiche du même genre que celle du groupe 4.

Il est à noter que deux groupes seulement sur sept appuient leurs dires sur un calcul.

On constate que pratiquement toute la classe est convaincue de l'égalité des volumes.

La séance se termine sans que la réponse réelle soit connue. Je propose aux enfants de faire la vérification expérimentale chez eux avec de l'eau ou du sable comme certains l'ont proposée et de revenir avec leur réponse la fois prochaine.

Deuxième activité : vérification

En fait mon objectif était d'amener les enfants à vérifier leurs dires par le calcul.

A la séance suivante je demande aux enfants ce qu'a donné leur vérification expérimentale. Aucun élève ne l'a faite, expliquant qu'ils sont sûrs que les deux volumes sont égaux et qu'en conséquence la vérification est inutile. Un élève a cependant fabriqué les deux cylindres avec un fond de carton et enveloppé le tout avec une couche épaise de ruban adhésif pour "rendre le cylindre étanche". Mais lui non plus n'a pas effectué la vérification se contentant simplement de remplir l'un des cylindres d'eau pour vérifier l'étanchéité de son procédé. Le "ficelage" des cylindres avec le scotch est tel qu'on ne peut plus être sûr des dimensions du cylindre et que de ce fait on ne peut faire sérieusement la vérification en classe. La plupart des élèves ont réalisé un fond en carton en dessinant le contour à l'aide du cylindre et l'ont également collé avec du ruban adhésif. Beaucoup ont évoqué la difficulté de rendre étanche le cylindre de carton. Est-ce la seule raison qui les a empêchés de faire l'expérience ? C'est peu probable étant donné la force de leur certitude. Ils auraient pu utiliser du sable par exemple.

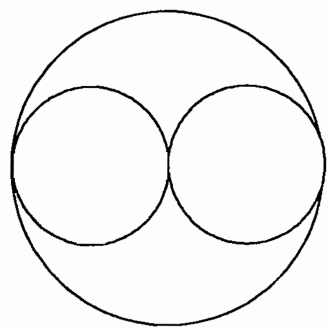
On constate à quel point leur sens commun les empêche d'avoir une démarche scientifique. Il faut trouver quelque chose qui leur permette de le remettre en cause afin de poursuivre l'activité.

Je reprends les deux cylindres et je les mets l'un à côté de l'autre et je demande aux enfants s'il n'y a pas une autre façon de les comparer, espérant qu'ils proposeront le calcul des volumes. En fait cette idée ne leur vient pas. J'attends une proposition des enfants sans intervenir.

Les mesures des deux cylindres sont telles que la hauteur de l'un est la moitié de la hauteur de l'autre et que le diamètre du premier est de fait le double du diamètre du deuxième. Un élève a trouvé un moyen de répondre à la question : "les deux cylindres ont-ils un volume différent ?" par une méthode expérimentale très astucieuse n'utilisant aucun calcul. Elle ne peut cependant pas être utilisée systématiquement avec un rectangle de mesures quelconques.

Il propose de mettre le cylindre le plus haut dans le cylindre le plus bas, puis, après un temps de réflexion, suggère de couper le morceau qui dépasse et de le mettre à côté de l'autre, à l'intérieur du cylindre le plus bas. Il constate alors qu'il reste encore de la place à l'intérieur du cylindre le plus bas. Il en conclut que le cylindre de moindre hauteur a un volume plus important que le cylindre le plus haut. Tous les enfants viennent aussitôt constater le fait.

Vu du dessus cela donne :



La preuve de la différence de volume est faite de façon irréfutable. La classe est très surprise de ce résultat. Certains enfants sont interloqués et viennent revoir les deux cylindres l'un dans l'autre.

Je propose alors de vérifier cette constatation par le calcul. J'écris la formule du volume du cylindre au tableau, expliquant la signification des différentes lettres et je demande aux enfants de faire le calcul. Ils acceptent de bonne grâce de le faire. On est en cours de mathématiques, il n'est donc pas étonnant de devoir calculer !

Tous les enfants connaissent la relation liant le rayon et le diamètre d'un disque mais ils ne sont pas en mesure de trouver la valeur du diamètre par un calcul utilisant le périmètre du cercle. Ils entreprennent donc de mesurer le diamètre de chacun des deux cylindres.

Dans un groupe un enfant propose de plier légèrement en deux chaque cylindre de façon à avoir deux points diamétralement opposés, de reformer ensuite les cylindres et d'effectuer ainsi la mesure de chaque diamètre. C'est d'ailleurs le groupe qui obtiendra les mesures les plus proches des mesures théoriques des diamètres. Les enfants effectuent les calculs à la calculatrice et retrouvent le résultat constaté expérimentalement.

Ils sont étonnés de ne pas tous trouver le même résultat numérique alors qu'ils ont tous utilisé les mêmes cylindres. Ils prennent alors conscience que leurs différents calculs sont très approximatifs étant donné la manière dont ils ont mesuré le rayon des disques. Ils veulent savoir "qui a bon".

Je propose de se pencher sur ce problème la fois suivante.

Troisième activité : calcul du rayon à partir du périmètre du cercle

L'objectif de cette activité est d'amener les enfants à trouver comment calculer le rayon des disques de base.

Je leur propose donc de trouver une méthode mathématique pour calculer le rayon de chacun des disques. Les enfants n'ont aucune idée sur la manière de procéder. Je leur demande s'ils se souviennent de la formule du périmètre du cercle. Ils la connaissent tous sous la forme : périmètre du cercle = πd. L'ayant alors écrite au tableau je leur demande comment trouver le diamètre connaissant le périmètre. La réponse est immédiate : il suffit de diviser le périmètre par π. Ce qui gêne les enfants c'est qu'ils pensent ne pas connaître le périmètre des disques de base. Il faut alors revenir à la fabrication des cylindres pour qu'ils comprennent que la largeur et la longueur du rectangle de départ correspondent respectivement au périmètre de chacune des bases des deux cylindres.

Les calculs sont assez laborieux car, bien qu'utilisant la calculatrice, les enfants perdent le fil de leurs calculs et ne savent plus ce qu'ils cherchent à chaque étape. Il faut donc les guider en les aidant à élaborer le plan de travail suivant :

- calcul du diamètre
- calcul du rayon
- calcul de l'aire de la base
- calcul du volume du cylindre.

Le calcul des rayons théoriques est le suivant :

20 : 3,14 = 6,36 et R1 = 3,18 cm ou plus généralement $2k : \pi = R1$
10 : 3,14 = 3,18 et R2 = 1,59 cm ou plus généralement $k : \pi = R2$

Pour les volumes théoriques on obtient :

$V1 = 3,14 \times 3,18^2 \times 10 = 317,52\ cm^3$ou plus généralement $((2k)^2k\ ) :\pi = 4k^3 : \pi$
$V2 = 3,14 \times 1,59^2 \times 20 = 158,76\ cm^3$ou plus généralement $(k^2 \times 2k) : \pi = 2k^3 : \pi$

Etant donné les mesures du rectangle de départ, les enfants constatent que le volume du cylindre le plus haut vaut la moitié du volume du cylindre le plus bas.

Ils remarquent alors que tous les

groupes trouvent les mêmes résultats, et que ce qui a été observé expérimentalement se vérifie exactement par le calcul.

J'explique alors, qu'en fait, il s'agit d'un résultat approché puisque nous avons pris une valeur approchée de π. Comme toute la classe a pris la même approximation nous trouvons tous le même résultat.

Les élèves m'assaillent alors de questions au sujet de π. Ils veulent savoir qui l'a calculé et comment on s'y est pris. Ils semblent fascinés par ce nombre. Je propose alors de faire une nouvelle activité sur π.

Quatrième activité : une estimation de π

Le premier objectif est de faire trouver un moyen de calculer π en utilisant la formule du périmètre. Le second objectif est de permettre aux élèves de trouver différentes méthodes pour mesurer le périmètre d'un cercle.

Je demande aux enfants de tracer, sur un morceau de carton rigide, un cercle dont le rayon est un nombre entier, afin de faciliter les calculs.

Ils proposent alors de mesurer le périmètre en utilisant du fil posé le long de la circonférence. Cette méthode étant assez laborieuse, d'autres enfants suggèrent d'utiliser des épingles disposées régulièrement le long de la circonférence et de tendre un fil tout autour ce qui s'avère nettement plus pratique.

D'autres élèves proposent de faire la même chose mais en utilisant des punaises plantées à l'envers du carton. Le fil bouge beaucoup moins encore qu'avec les épingles et la mesure semble plus précise.

Quelques enfants utilisent une aiguille et cousent un fil le long de la circonférence.

A chaque fois les enfants coupent le fil à ras et mesurent sa longueur avec leur double décimètre. Le plus souvent la mesure est faite à deux car le fil n'est pas rigide. L'un des enfants immobilise le fil et l'autre effectue la mesure. Ils doivent parfois refaire plusieurs fois la mesure.

Un groupe d'élèves propose enfin d'utiliser un curvimètre (1). Je suis très étonnée de constater que les enfants connaissent cet appareil. En fait ils m'expliquent que le directeur de l'école leur en a parlé car il possède une montre munie d'un curvimètre, c'est donc l'occasion de s'en servir.

Tous les élèves ont trouvé que pour calculer π il suffit de diviser la mesure de la circonférence par celle du diamètre du cercle choisi.

Voici quelques uns des résultats obtenus par les enfants :

Périmètre	Diamètre	π
36,7	12	3,05
52	16	3,25
24	8	3
42	12	3,5
24	6	4
38,5	11,6	3,31
32	10	3,2
62,3	20	3,11
62	20	3,1
32,2	10,2	3,15

On peut constater que les résultats

(1) Appareil permettant de mesurer la longueur d'une ligne courbe au moyen d'une petite roue reliée à un cadran gradué.

proposés sont assez convenables, compte tenu des instruments utilisés.

Je termine l'activité en exposant rapidement l'histoire du calcul de π et en expliquant l'une des méthodes de calcul de π, à savoir celle utilisant l'approximation du périmètre par des polygones à n côtés. On peut remarquer que c'est grossièrement l'une des méthodes qu'ont utilisée les enfants lorsqu'ils ont planté des épingles ou des punaises le long de la circonférence et qu'ils ont ensuite tendu un fil tout autour. De même les enfants qui ont cousu un fil le long de la circonférence ont en fait réalisé un polygone plus ou moins régulier à n côtés.

Les élèves sont surpris d'apprendre que les valeurs connues de π ont été si différentes variant suivant les époques de 3 à la valeur actuelle. Le fait que la valeur de π dans le système décimal ne soit pas connue avec exactitude les étonne particulièrement. Ils me demandent si on la connaîtra un jour. Je leur explique qu'on a démontré qu'il est impossible de connaître exactement cette valeur dans le système décimal car π n'est pas un nombre décimal. Ils sont très intrigués. C'est l'occasion de parler de la différence entre les nombres comme π et les nombres décimaux.

Pour conclure

J'ai utilisé avec cette classe d'autres activités de type historique, par exemple un travail sur les mesures de l'ancien régime (activité proposée par P. Johan à des maîtres du primaire en formation (1)). Les élèves ont particulièrement apprécié ces différentes approches historiques et les activités proposées. Elles ont permis de donner du sens aux savoirs mathématiques qui sont vus alors comme le résultat d'une réelle activité de recherche évoluant au cours des siècles.

Lors de la recherche du problème de Galilée, tous les élèves ont été actifs, la discussion était âpre et les questions fusaient.

Il semble que les objectifs qu'on s'est assignés ont été atteints. Les enfants ont été intéressés et même passionnés par ces différentes activités. L'intérêt du problème proposé ne fait aucun doute. Il a amené les enfants à remettre en cause leur sens commun et à élaborer des preuves confirmant ou infirmant leurs premières impressions. Un problème vieux de près de quatre siècles a pu tenir en haleine des élèves de 11 ans du XX^{e} siècle. La recherche de la valeur de π a également été suffisamment motivante pour mettre en activité ces mêmes enfants. Ils ont cherché, confronté leurs résultats, et ont été attentifs et curieux jusqu'au bout. Ils ont pu prendre conscience, au travers de l'histoire de π, que les savoirs ne sont pas éternels, ils ont été inventés et modifiés au cours du temps pour répondre à certains problèmes.

La recherche du problème de Galilée menée avec des maîtres du primaire en formation continue a rencontré un intérêt semblable. Ces enseignants ont en fait les mêmes difficultés que les enfants de primaire. En effet, au début, ils sont persuadés que les deux cylindres ont le même volume "puisqu'ils sont faits avec le même rectangle". La différence est que ces maîtres pensent tout de suite à vérifier leur affirmation par le calcul. Certains d'entre eux éprouvent la même difficulté à réaliser que la largeur et la longueur du rectangle correspondent aux périmètres des disques de base. Les enseignants comprennent bien à posteriori la raison de cette différence de volume en constatant que l'élévation au carré du rayon fait varier davantage le volume que le simple fait de multiplier par une hauteur fusse-t-elle double de la première.

Il est intéressant de proposer aux maîtres de comparer les volumes de deux cônes obtenus en faisant tourner une équerre autour de chacun des côtés de l'angle droit afin de vérifier si l'activité a porté ses fruits !

BIBLIOGRAPHIE

(1) P. JOHAN : "Les unités de mesure de l'Ancien Régime : donner du sens aux techniques opératoires", *Repères* n°18, janvier 1995.

(2) F. CERQUETTI-ABERKANE : "Une expérience d'utilisation de l'histoire des mathématiques dans une classe de CM2 (5^e^ primaire) et une classe de CE2 (3^e^ primaire)", *in Actes* de la 47^e^ CIEAEM, Berlin, Allemagne, 1995.

(3) F. CERQUETTI-ABERKANE, P. JOHAN, A. RODRIGUEZ : "Les Maths ont une histoire : activités au cycle 3", *Hachette Education*, Mai 1997.