
UN PROBLÈME DE DÉS EN TERMINALE

Martine BÜHLER
groupe M.:A.T.H. IREM Paris VII

Les élèves arrivent en terminale scientifique avec des passés fort divers en ce qui concerne les probabilités : depuis ceux qui n'en ont jamais fait jusqu'aux redoublants qui, *a priori*, devraient connaître déjà le programme de terminale.

Avant même de faire en classe la moindre allusion aux probabilités ou aux dénombrements, je donne à faire aux élèves l'exercice suivant en classe, inspiré de FRUGIER, *exercices de probabilités ordinaires*, ELLIPSE (problème à l'origine historique).

Georges et Méré, comme chaque jour à midi, jouent au 421 sur le comptoir du bar de Port-Royal, près de la station de R.E.R. Une discussion s'engage sur les paris :

Il est évidemment désavantageux de parier qu'on obtiendra 6 en lançant un dé. Est-ce encore le cas si on parie qu'on obtient au moins une fois 6 en lançant deux fois le dé ? En le lançant trois fois ? En le lançant quatre fois ?

Est-il plus fréquent d'obtenir un 6 (au moins une fois) en lançant quatre fois un

dé que d'obtenir une paire de six (au moins une fois) en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Georges se tourne alors vers son voisin de droite, un certain Blaise Pascal, pour lui demander son avis. Retrouver la réponse de celui-ci en développant ses raisonnements.

Questions supplémentaires

1°) On lance un dé quatre fois : quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois le numéro 6 ? Exactement deux fois

2°) On lance un dé douze fois : est-il plus fréquent d'obtenir exactement une fois le numéro 6 ou de l'obtenir exactement deux fois ?

Je livre là l'énoncé tel que je l'ai donné à mes élèves, malgré ses défauts. La question sur "la fréquence" n'est certainement pas très heureuse (et je vais la changer) car le lien entre fréquence et probabilité n'est pas si évident. Si on veut éviter le terme "probabilités" dans les premières questions, il serait plus

UN PROBLÈME DE DES EN TERMINALE

judicieux de s'en tenir à la notion d'"avantageux" ou "désavantageux".

L'exercice a été traité dans trois classes : une terminale C de 20 élèves (année 93-94), une terminale scientifique de 31 élèves (année 95-96 ; spécialités physique et biologie), une terminale scientifique de 35 élèves (année 96-97 ; spécialité mathématiques). Ces trois classes avaient un profil assez différent : la terminale C était une classe homogène, d'élèves au départ de niveau moyen mais très motivés, la terminale S-95 était au contraire très hétérogène et la terminale S-96 une classe de très bon niveau, avec une "excellente tête de classe".

Les trois années, les élèves ont été mis par groupes de quatre (par affinités), avec deux heures devant eux pour résoudre le problème et rendre une solution rédigée. Ils ont l'habitude de résoudre des problèmes en classe sans que pourtant il s'agisse d'"applications du cours" : par exemple, avant le moindre cours sur les suites, nous faisons un travail de recherche d'approximations de racines carrées, au cours duquel nous découvrons des suites définies par récurrence. Je ne suis pas du tout intervenue au début (première demi-heure) car je ne voulais pas suggérer de méthode particulière. La première idée de certains groupes est qu'on double les chances d'obtenir un six en lançant deux fois le dé, qu'on les triple en le lançant trois fois, etc. Parmi ces groupes, certains reconnaissent eux-mêmes leur erreur en s'apercevant que, s'il en était ainsi, on serait certain d'obtenir au moins un six en six lancers, ce qu'ils savent être faux. D'autres ont besoin qu'on les incite à aller jusqu'au bout de leur raisonnement pour apercevoir l'erreur.

Le fait de travailler ensemble sur un problème ouvert fait débattre les élèves entre eux ; ils argumentent, s'investissent

dans une démarche mathématique, comprennent leurs erreurs. Ils le font éventuellement avec mon aide car ils m'appellent à la rescousse si besoin.

A chaque fois, la classe a fourni quatre ou cinq solutions différentes, ce qui fait que je suis actuellement en possession de sept méthodes différentes pour résoudre le problème, méthodes que je vais exposer maintenant, autant que possible en citant mot à mot les copies des élèves.

Première méthode

Un groupe de la TC-94 commence par examiner le cas de deux lancers de la manière suivante :

"Si on lance un dé, on a $\frac{1}{6}$ chance d'avoir 6 et $\frac{5}{6}$ chance de ne pas l'avoir. En combinant les probabilités de deux dés :

premier dé deuxième dé	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

Résultat : on a $\frac{1}{36}$ d'avoir deux six et $\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$ d'avoir un six. On a donc $\frac{11}{36}$ d'avoir 6."

A la question : "comment allez-vous faire avec trois lancers de dés ?", les élèves me renvoyèrent à mon bureau afin d'y réfléchir. Voici le résultat de leurs réflexions :

“pour le lancer de trois dés : on combine la probabilité d’avoir 6 avec deux dés et celle d’avoir 6 avec un dé. Pour le premier dé, on a une chance sur six d’avoir un six et $\frac{5}{36}$ de ne pas l’avoir. Pour les deux autres, on a $\frac{11}{36}$ de chance de l’avoir et $\frac{25}{36}$ de ne pas l’avoir.

	$\frac{11}{36}$	$\frac{25}{36}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{25}{216}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{55}{216}$	

On a donc 91 chances sur 216 d’avoir six ($\frac{55}{216} + \frac{25}{216} + \frac{11}{216} = \frac{91}{216}$)”

“Pour quatre lancers de dés, on obtient :

	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{91}{216}$	$\frac{91}{1296}$	$\frac{455}{1296}$
$\frac{125}{216}$	$\frac{125}{1296}$	

$$\frac{91 + 455 + 125}{1296} = \frac{671}{1296}$$

quand on lance quatre fois les dé, on a $\frac{671}{1296}$ chances d’avoir au moins un six.”

J’ai retrouvé ce type de tableau en 96-97 dans un groupe qui envisageait deux stratégies possibles, dont celle-ci. Finalement, le groupe s’est décidé pour l’autre méthode, mais l’un d’eux a ensuite

développé la méthode du tableau pour répondre aux questions supplémentaires. Je parlerai de sa résolution plus bas.

Deuxième méthode

On peut essayer de faire la liste des résultats possibles pour le lancer d’un dé ou pour deux lancers successifs. Cela devient inenvisageable pour trois dés. D’où l’idée de s’appuyer sur le résultat de deux dés pour obtenir le nombre de “cas favorables” pour trois lancers :

“En deux lancers, on a 36 combinaisons possibles dont 11 contenant au moins un 6 :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

En trois lancers, on a alors $6^3 = 216$ combinaisons possibles. Or, si sur un dé, on obtient 1, alors, avec les deux autres, on a 11 chances d’obtenir un 6. De même pour 2, 3, 4 et 5. Enfin, si on obtient un 6, alors on a 36 chances sur 36 d’obtenir un 6 ; on a donc $5 \times 11 + 36 = 91$ chances sur 216 d’obtenir un 6.”

Le même raisonnement permet à ce groupe d’obtenir, dans le cas de quatre lancers, $5 \times 91 + 216 = 671$ “cas favorables” pour $6^4 = 1296$ “cas possibles”. Ce type de raisonnement mène les élèves (si on les y pousse) à établir une relation de récurrence liant u_n et u_{n+1} , u_n étant le nombre

UN PROBLEME DE DES EN TERMINALE

de cas favorables si on lance n fois un dé :

$$u_{n+1} = 5u_n + 6^n$$

Cette année, un groupe a également fait cette étude pour résoudre la deuxième question : ils ont immédiatement pensé que lancer deux dés à 6 faces équivalait à lancer un dé à 36 faces (ce n'est pas toujours aussi immédiat pour les élèves !). Lorsqu'on lance n fois un tel dé, il y a 36^n résultats possibles et si on appelle q_n le nombre de résultats où apparaît au moins une fois un double six : $q_{n+1} = 35q_n + 36^n$ donc $p_{n+1} = \frac{35}{36}p_n + \frac{1}{36}$ si p_n est la probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant n fois successivement deux dés. Ils m'ont alors demandé mon aide pour savoir si on pouvait obtenir une expression de p_n à l'aide de n, ce qu'ils ont fait en cherchant a pour que la suite (r_n) définie par $r_n = p_n - a$ soit géométrique.

Troisième méthode

"Au premier lancer, on a $\frac{1}{6}$ chance d'obtenir un 6. On distingue ainsi deux cas :

- * $\frac{1}{6}$ d'avoir 6 : on s'arrête
- * $\frac{5}{6}$ d'avoir autre chose : on continue.

Deuxième lancer : on y a recours à $\frac{5}{6}$ chances et là encore il y a $\frac{1}{6}$ chance d'obtenir un 6 d'où une probabilité de $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ d'obtenir 6 avec deux jets.

De même avec 3 jets, on aura $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$ comme chance d'avoir 6.
...

Avec 4 dés, on a :

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \text{ c.a.d. } \frac{671}{1296}$$

chances soit 51,8%.

Là, le pari sera favorable (mais d'un petit peu).

On en déduit ainsi les relations suivantes où n est le nombre de jets et p_n la probabilité d'obtenir au moins un 6 :

$$p_{n+1} = p_n + \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6}$$

$$p_n = \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^i \right]$$

on a

$$p_n = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{6}} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)}$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

Le même raisonnement conduit ce groupe, dans le cas de n lancers de 2 dés (assimilés à un dé à 36 faces) à :

$$q_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{36} \left(\frac{35}{36}\right)^i$$

(pour q_n probabilité d'obtenir au moins un double six en n lancers de deux dés), d'où

$$q_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

C'est en fait seulement cette année qu'un groupe a exploité aussi totalement (et aussi brillamment) cette idée, d'autres groupes ne poussant pas l'étude jusqu'à n lancers.

Quatrième méthode

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ obtenir 2 fois de suite 6
 "2 lancers $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ obtenir 6 au premier lancer et pas au deuxième
 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ obtenir 6 au deuxième lancer et pas au premier."

Même chose pour trois lancers. Et une remarque intéressante pour quatre lancers :

"4 lancers :

* $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$ obtenir 6 quatre fois de suite
 * 4 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{1296} \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{1296} \\ \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{1296} \\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{1296} \end{array} \right.$ obtenir trois fois un 6
 * 6 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{1296} \\ \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{1296} \\ \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{1296} \\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{1296} \\ \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{1296} \\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{1296} \end{array} \right.$ obtenir deux fois un 6
 * 4 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \end{array} \right.$ obtenir une fois un 6

Chance d'obtenir au moins une fois un 6 en lançant 4 fois le dé :

$$\frac{1}{1296} + 4 \times \frac{5}{1296} + 6 \times \frac{25}{1296} + 4 \times \frac{125}{1296} = \frac{671}{1296}$$

Ce groupe (95-96) a reconnu le 1 4 6 4 du triangle de Pascal (vu au moment de linéariser $\cos^n x$ avec la formule d'Euler, pas du tout dans un cadre de dénombrement, mais pour être capable de développer $(a + b)^n$ pour de "petites valeurs" de n). Ils ont alors pensé qu'il y avait sûrement une formule du même type pour 24 lancers d'un dé à 36 faces, qu'on pourrait écrire si on avait le courage de former le triangle de Pascal jusqu'à la vingt-quatrième ligne.

Cinquième méthode : dénombrement systématique

"3 lancers :

Ici on a $6^3 = 216$ combinaisons possibles.

Ainsi on a $\frac{1}{216}$ chance d'obtenir un triple 6.

$\frac{3}{216}$ chance d'obtenir un double 6 et un 1.

De même avec 2, 3, 4, 5. On a donc

$5 \times \frac{3}{216} = \frac{15}{216}$ chance d'obtenir un chiffre et un double-six.

$\frac{75}{216}$ chance d'obtenir un 6 et un couple (un double ou deux différents). En effet 6 peut sortir au premier ou au deuxième ou au troisième lancer. Or, à chaque fois, il a

$\frac{25}{216}$ chance de sortir (nombre de solutions restantes au carré). Donc on obtient bien

$3 \times \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$ chance.

Donc on a $\frac{91}{216}$ chance de sortir au moins un six."

UN PROBLEME DE DES EN TERMINALE

Pour quatre lancers, il a bien fallu formaliser un peu plus :

“4 lancers :

On a $6^4 = 1296$ combinaisons possibles.

Ainsi on a $\frac{1}{1296}$ chance de sortir quatre 6.

On a 4 possibilités avec un triple 6 :

6	6	6	●	● (représente 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5)
6	6	●	6	
6	●	6	6	
●	6	6	6	

Pour chacune il y a 5 combinaisons.

Donc on a : $\frac{4 \times 5}{1296}$ chances d'obtenir un triple 6 et un autre chiffre.

On a 6 possibilités avec un double 6 :

6	6	●	1
6	●	1	6
●	1	6	6
●	6	●	6
6	●	6	1
●	6	6	1

Pour chacune, il y a $5^2 = 25$ combinaisons.

Donc on a $\frac{6 \times 25}{1296} = \frac{150}{1296}$ chance d'obtenir un double 6 et 2 autres chiffres.”

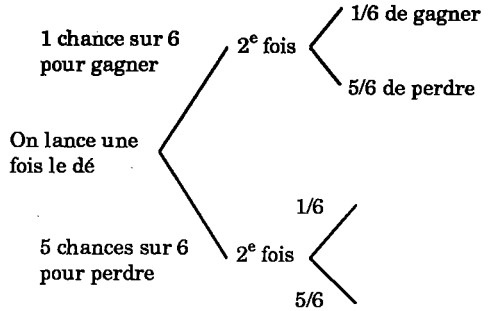
Le groupe procède de même pour la probabilité d'obtenir exactement un seul six.

Cette méthode permet bien sûr de répondre aux questions supplémentaires, que peu de groupes ont vraiment le temps de traiter.

Sixième méthode :
un arbre de probabilités

“En lançant 2 fois le dé, on obtient l'arbre

de probabilités suivant :



On a donc $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ chances de perdre à chaque fois. On a 25 chances sur 36 de perdre de toute manière.

Le reste du temps, on obtient un 6 au moins une fois. Par conséquent, on a $\frac{36}{36} - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ chance de gagner au moins une fois.”

Même arbre pour 3 lancers et 4 lancers. L'arbre fait pour 4 lancers permet de répondre à la première question supplémentaire, les élèves trouvant 4 “chemins” pour lesquels on obtient exactement une fois le numéro 6. On a donc 4 “chemins” soit

$$4 \times \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \right) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} \right)^3 = \frac{500}{1296}$$

chance d'obtenir exactement un 6.”

Il m'est arrivé de trouver chez certains groupes un raisonnement assez semblable mais illustré par un tableau plutôt que par un arbre. Ce groupe n'a d'ailleurs remarqué qu'il était plus simple d'examiner l'unique chemin “perdant” plutôt que les chemins favorables qu'à la fin du travail.

Septième méthode : l'événement contraire

Un groupe la première année a vu tout de suite que les probabilités des événements contraires ("ne jamais obtenir 6 en quatre lancers" et "ne jamais obtenir de double-six en vingt-quatre lancers de deux dés") étaient plus faciles à déterminer. Ce qui permet de résoudre facilement l'exercice.

S'attaquant alors aux questions supplémentaires (placées là entre autres pour cette raison), ce groupe a adopté une méthode de dénombrement systématique.

Reste évidemment ensuite à exploiter le matériau très riche des copies d'élèves. J'ai passé chaque fois au moins deux heures à faire en classe une synthèse des méthodes trouvées. J'ai essayé d'exploiter au maximum chaque méthode.

Les deux premières méthodes mènent à des relations de récurrence et à l'étude de suites ; la troisième donne une expression de p_n comme somme des termes d'une suite géométrique. Plusieurs méthodes amènent à parler d'événements indépendants et de produits de probabilités dans ce cas.

On voit apparaître un schéma de Bernoulli.

Le dénombrement systématique permet de voir l'intérêt de savoir de combien de façons on peut placer deux 6 dans 4 tirages et donc d'introduire la notion de combinaisons et le problème de leur calcul.

On peut être amené à parler de nombre de fois où apparaît le nombre 6 lors de n tirages comme étant une variable aléatoire.

J'ai remarqué lors de chaque synthèse un intérêt très vif des élèves pour les méthodes trouvées par les autres groupes, certains élèves la première année soulignant même les côtés positifs -systématique ou astucieux- de ces méthodes.

Par ailleurs, les élèves éprouvent un certain plaisir à voir un cours se faire avec LEURS idées (et aussi un certain étonnement de voir la quantité de choses qu'ils peuvent trouver - réflexion explicite d'une élève de la TS-95).

Il est cependant parfois difficile à certains élèves de "s'approprier" la méthode des autres.

Enfin, il faut souligner l'investissement très grand des élèves dans ce type de travail. L'un d'eux cette année m'a rendu la copie suivante :

"C'est la première fois que je me lève à 4h51 par envie de faire des mathématiques. En effet je me suis réveillé et je n'ai pas pu me rendormir parce que je n'arrêtais pas de penser aux probas. Je vais donc poursuivre les "questions supplémentaires" au nom de mon groupe (je leur en parlerai vendredi).

Tout d'abord, je me suis dit que j'étais bête de ne pas avoir pensé à cette formule plus tôt : $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. En effet, le "1" correspond à l'ensemble des possibilités et le $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ représente le taux d'échec. D'où la différence pour obtenir le taux de réussite.

...

Je vais maintenant continuer les questions supplémentaires.

UN PROBLÈME DE DES EN TERMINALE

Exactement une fois le numéro 6 :

Je crois qu'on avait trouvé :

pour un dé : $\frac{1}{6}$ chance pour 2 dés : $\frac{10}{36}$

pour 3 dés : $\frac{75}{36}$ pour 4 dés : $\frac{500}{1296}$

Exactement 2 fois le numéro 6 :

pour 1 dé : impossible : on ne peut qu'avoir un seul 6.

pour 2 dés : il est évident que ça fait $\frac{1}{36}$;

cela s'obtient soit par $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ (réussite à obtenir 2 fois de suite) ou par : $1 - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right)$ (méthode du 1 appliquée aux échecs au lieu de la réussite).

Pour 3 dés : retour à l'échiquier.

2 dés ----- 1 dé	$\frac{25}{36}$ (pour zéro 6)	$\frac{25}{36}$ (pour un 6)	$\frac{1}{36}$ (pour deux 6)
$\frac{5}{6}$ (pour zéro 6)			$\frac{5}{216}$
$\frac{1}{6}$ (pour un 6)		$\frac{10}{216}$	

D'où $\frac{15}{216}$ de gagner (d'obtenir deux 6 avec 3 dés).

Pur 4 dés : encore un échiquier :

2 dés ----- 2 dés	$\frac{25}{36}$ (pour zéro 6)	$\frac{10}{36}$ (pour un 6)	$\frac{1}{36}$ (pour deux 6)
$\frac{25}{36}$ (pour zéro 6)			$\frac{25}{1296}$
$\frac{10}{36}$ (pour un 6)		$\frac{100}{1296}$	
$\frac{1}{36}$ (pour deux 6)	$\frac{25}{1296}$		

D'où $\frac{150}{1296}$ chances de gagner (d'obtenir deux 6 avec quatre dés).

Question supplémentaire numéro 2 :

Pour savoir ce qui se passe avec douze dés, on cherche d'abord ce qui se passe pour huit dés puis avec douze dés.

D'après l'échiquier précédent nous déduisons qu'avec quatre dés :

- $\frac{625}{1296}$ d'obtenir zéro 6 $\left(\frac{25}{36} \times \frac{25}{36}\right)$
- $\frac{500}{1296}$ d'obtenir un 6 $\left(\frac{10}{36} \times \frac{25}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{25}{36}\right)$
- $\frac{150}{1296}$ d'obtenir deux 6 $\left(\frac{1}{36} \times \frac{25}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{36}\right)$
- $\frac{20}{1296}$ d'obtenir trois 6 $\left(\frac{1}{36} \times \frac{10}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{1}{36}\right)$
- $\frac{1}{1296}$ d'obtenir quatre 6 $\left(\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}\right)$

1 d'obtenir quelque chose (on néglige le cas où le dé est cassé)

UN PROBLEME DE DES EN TERMINALE

On fait donc un échiquier quatre dés/quatre dés pour déterminer ce qu'on obtient avec huit dés (cf. ci-dessous).

Dans la première colonne, n. n' signifie $\frac{n}{1296}$ chances d'obtenir n' six. Même notation dans le tableau mais ce n'est plus sur 1296 mais sur $1296^2 = 1679616$.

Remarque : en plus, le tableau (échiquier) est symétrique par rapport à sa diagonale. On déduit de l'échiquier, sur 1679616 chances :

- 390625 d'obtenir 0 fois le numéro 6
- 625000 d'obtenir 1 fois le numéro 6
- 437500 d'obtenir 2 fois le numéro 6
- 175000 d'obtenir 3 fois le numéro 6
- 43750 d'obtenir 4 fois le numéro 6
- 7000 d'obtenir 5 fois le numéro 6
- 700 d'obtenir 6 fois le numéro 6
- 40 d'obtenir 7 fois le numéro 6
- 1 d'obtenir 8 fois le numéro 6
- 1679616 d'obtenir quelque chose.
- ...

Sachant ce qu'on obtient avec 8 dés à six

faces et 4 dés à six faces, on peut faire un échiquier 8D/4D pour déterminer ce qui se passe avec 12 dés (cf. page suivante).

Dans la première ligne du tableau, c'est sur 1296 et dans la première colonne, c'est sur 1679616.

$(a,b) \in \mathbb{N}^2$. a. b se lit : a chances sur 2 176 782 336 d'obtenir b six avec 12 dés.

Donc : nombre de chances sur 2 176 782 336 d'obtenir... six soit x%

244 140 625	0	11,2%
585 937 500	1	26,9%
644 531 250	2	29,6%
421 875 000	3	19,4%
193 359 375	4	8,9%
...		

Ainsi, on a plus de chances d'avoir deux six qu'un seul avec 12 dés."

La copie se termine par la résolution de deux problèmes "personnels" que se pose l'élève : "quel est le nombre de jets nécessaires pour avoir au moins 90% de chances

4 dés 4 dés	625 1296 d'obtenir 0 six	500 1296 d'obtenir 1 six	150 1296 d'obtenir 2 six	20 1296 d'obtenir 3 six	1 1296 d'obtenir 4 six
625 . 0	390625 . 0	312500 . 1	93750 . 2	12500 . 3	625 . 4
500 . 1	312500 . 1	250000 . 2	75000 . 3	10000 . 4	500 . 5
150 . 2	93750 . 2	75000 . 3	22500 . 4	3000 . 5	150 . 6
20 . 3	12500 . 3	10000 . 4	3000 . 5	400 . 6	20 . 7
1 . 4	625 . 4	500 . 5	150 . 6	20 . 7	1 . 8

UN PROBLEME DE DES EN TERMINALE

4 dés 8 dés	625 . 0	500 . 1	150 . 2	20 . 3	1 . 4
390625 . 0	244140625 . 0	195312500 . 1	58593750 . 2	7812500 . 3	390625 . 4
625000 . 1	390625000 . 1	312500000 . 2	93750000 . 3	12500000 . 4	625000 . 5
437500 . 2	273437500 . 2	218750000 . 3	65625000 . 4	8750000 . 5	437500 . 6
175000 . 3	109375000 . 3	87500000 . 4	26250000 . 5	3500000 . 6	175000 . 7
43750 . 4	27343750 . 4	21875000 . 5	6562500 . 6	875000 . 7	43750 . 8
7000 . 5	7375000 . 5	3500000 . 6	1050000 . 7	140000 . 8	7000 . 9
700 . 6	437500 . 6	350000 . 7	105000 . 8	14000 . 9	700 . 10
40 . 7	25000 . 7	20000 . 8	6000 . 9	800 . 10	40 . 11
1 . 8	625 . 8	500 . 9	150 . 10	20 . 11	1 . 12

d'obtenir 12 six avec 12 dés ? Combien de temps cela prend-il si on suppose qu'il faut 1" pour lancer les dés, 1" pour lire le résultat et 1" pour récupérer les dés, en négligeant le temps de sommeil et celui de tout autre activité ?"

Il est remarquable de constater que cette solution est très proche de ce que propose Huygens pour ce même problème, avec les mêmes procédés pour réduire les calculs (les résultats pour 4 et 8 lancers permettent d'obtenir ceux pour 12 lancers) ; Cet élève invente même une double indexation lorsqu'il en a besoin.

Je n'ai malheureusement pas eu le temps d'exploiter convenablement en

classe les trouvailles de cet élève ; en combinant une méthode type "chemins favorables" ou "dénombrement systématique" et sa méthode pour passer de q et r lancers à $n = q + r$ lancers, on peut obtenir des formules sur les C_n^r .

A la fin de l'année scolaire 1997, j'ai fait remplir un questionnaire-bilan (anonyme) aux 35 élèves de la classe. Je leur ai en particulier demandé quel était le problème qui leur avait le plus appris et celui qui les avait le plus intéressés. On retrouve 11 fois ce problème dans les réponses (les deux autres problèmes plébiscités étant des problèmes "historiques" sur le nombre π).