
QU'EST-CE QUE LE HASARD ? COMMENT LE MATHÉMATISER ?

Claude CHRÉTIEN,
Dominique GAUD
Lycée Pilote Innovant de Jaunay-Clan

Dans cet article ⁽¹⁾, nous présentons un travail réalisé dans les classes de terminales S et L sur la notion de hasard ainsi que sur la façon dont les mathématiciens "apprivoisent" celui-ci. Notre objectif est, entre autres, de mieux situer le rôle des probabilités dans la modélisation des phénomènes aléatoires. Mais notre démarche s'inscrit plus largement dans le cadre d'un travail interdisciplinaire ⁽²⁾ autour de la philosophie des sciences qui se déroule au Lycée Pilote Innovant. Elle a d'ailleurs pris forme au terme d'une lente maturation, dans le cadre d'un groupe de réflexion et de formation mutuelle qui a associé au lycée pendant un an des professeurs de mathématiques, de philosophie, de

sciences physiques et de sciences de la vie et de la terre. Donc, après avoir justifié l'intérêt transdisciplinaire d'un travail sur la notion de hasard, nous procéderons à une analyse de cette notion en puisant aux sources les plus classiques. Puis nous exposerons le travail mené en classe, en reproduisant l'intégralité de la "feuille de route" distribuée aux élèves, accompagnée des principaux commentaires et explications proposés en cours.

A. ORIGINES HISTORIQUES ET ATTENDUS THÉORIQUES

1. Le hasard : une idée trop familière pour être claire

"Dans la formation d'un esprit scientifique, le premier obstacle, c'est l'expérience première, c'est l'expérience placée avant et au-dessus de la critique qui, elle, est nécessairement un élément intégrant de l'esprit scientifique. [...] En effet cette observation première se

(1) Nous remercions Michel Henry de l'IREM de Besançon et les membres de l'atelier "philomaths" de l'IREM de Poitiers pour les aides et les critiques qu'ils nous ont apportées.

(2) Pour de plus amples informations, lire AUTEURS *in Repères* n°18 "Interdisciplinarité mathématique et philosophie. Un exemple : le raisonnement par récurrence".

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

présente avec un luxe d'images ; elle est pittoresque, concrète, naturelle, facile. Il n'y a qu'à la décrire et à s'émerveiller. On croit alors la comprendre."

Gaston Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique*, Vrin 1980, pp. 23 et 19.

La notion de **hasard** fournit un exemple remarquable de l'*"obstacle épistémologique"* selon Bachelard. Y a-t-il en effet notion plus familière, fascinante et obscure à la fois ? Non seulement le hasard défie l'intelligence, mais, favorable ou défavorable, il n'est jamais neutre ; il joue avec les espoirs et les désirs des hommes : pour ou contre... L'affectivité et le jugement moral se mêlent ici à la pensée pour identifier le hasard, selon les cas, comme chance ou malheur, providence miraculeuse ou destin cruel. Janus au double visage, il est quasiment personnifié et l'évocation de son seul nom semblera souvent apporter une explication suffisante plus que désigner un problème. L'obstacle que constitue l'expérience première se double alors de ce que Bachelard toujours appelle l'*"obstacle verbal"* : cette illusion qui voudrait que le mot **explique** ce qu'il ne fait qu'**exprimer**. Donnons-en pour preuves quelques exemples d'intervention du hasard spontanément proposés par nos élèves :

– En 1986, j'ai retrouvé ma meilleure amie, que je n'avais pas vue depuis cinq ans, dans un pays étranger. Le hasard avait voulu que nous choissions le même camping.

– Au cours d'une partie de belote, j'ai eu par hasard huit cartes de la même couleur.

– Parce que mon petit-neveu avait laissé traîner une bille par terre, mon

frère est tombé et s'est cassé la jambe deux jours avant ses tests de sélection pour l'UFRAPS. A cause de cet accident stupide, il a dû faire d'autres études et renoncer à son projet professionnel.

– Le 6 juin 1944, Rommel était parti en Allemagne fêter l'anniversaire de sa femme. L'armée allemande s'est donc trouvée désarmée pour faire face au débarquement allié en Normandie. La réussite de l'opération et le sort de la guerre se sont ainsi décidés sur un hasard.

2. De la naïveté ordinaire à la confusion scolaire

On pourrait s'attendre à ce que cette notion (ou prénotion) commune soit, comme beaucoup d'autres (3), passée au crible de la culture scolaire, et ainsi décantée et précisée. Mais un rapide survol des programmes du lycée montre que, selon les disciplines et parfois même selon les situations, le hasard est évoqué en des sens différents et toujours implicites. Dans les sciences physiques, on appellera "hasard" le jeu des causes secondaires, incontrôlables ou négligeables, qui font varier les mesures expérimentales et on traitera comme aléatoire la distribution des mesures réelles autour de la valeur théorique attendue. Il s'agit alors d'une marge d'incertitude affectant les conditions de l'expérience, qui n'empêche ni la connaissance d'être exacte ni le réel d'être parfaitement déterminé. Il en va tout autrement dans la désintégration radioac-

(3) Par exemple, *force, travail, énergie, résistance, champ* en physique ; *ensemble, groupe, fonction, complexe* en mathématiques ; *essence, substance, principe, valeur, contingence* en philosophie ; *règne, classe, famille* en sciences naturelles...

tive ou dans les franges d'interférences lors de l'expérience des fentes de Young, où le hasard n'est pas loin d'apparaître comme un agent naturel, irréductible et bien sûr imprévisible. Dans les sciences de la vie, il est censé présider à la rencontre des gamètes, à la transmission des caractères héréditaires, aux mutations génétiques, voire pour certains à l'évolution des espèces. Mais dire que tout cela se décide au hasard ne laisse pas d'être ambigu, comme le reconnaît le généticien Albert Jacquard : *"Le hasard est le sujet du verbe choisir lorsque ce sujet est inconnu, ou inconnaissable, ou même, peut-être, inexistant"* (*Moi et les autres, Initiation à la génétique*, Seuil 1983, coll. Points, p. 24). Trois interprétations, bien sûr, radicalement différentes, puisqu'elles font du hasard soit une limitation de la connaissance (limitation contingente et provisoire dans un cas, limitation nécessaire et définitive dans l'autre) soit une effraction dans le déterminisme naturel !... Le hasard n'intervient pas seulement dans les mécanismes biologiques, mais aussi dans les mécanismes qui font l'histoire, et on verra ainsi les historiens ou les philosophes de l'histoire le compter parmi les facteurs historiques (4). Imprévisibilité des événements, rencontres fortuites, disproportion des causes et des effets, désordre et confusion des motifs et actions individuels... le hasard est partout présent dans l'histoire des hommes, sous de multiples visages. En outre, s'il y agit aveuglément – conformément à sa nature –, quand il s'agit d'affaires humaines on se défend mal

de toute subjectivité et on voit volontiers dans le phénomène fortuit une intention (5) : ce qui réinjecte dans la notion toute la charge d'affectivité et d'évaluation morale qu'on observait déjà dans ses emplois ordinaires. On retrouve ainsi, dans la notion "scolaire" du hasard, toute la palette de sens, toutes la polysémie et la confusion de la prénotion commune. D'où l'intérêt de s'arrêter sur cette notion et d'en proposer une clarification à ce moment de la scolarité où elle est spécifiquement mise en jeu : dans l'étude mathématique des probabilités en classes de première ou de terminale.

3. Essai d'analyse appuyé sur l'histoire des idées

Le hasard présente d'emblée deux aspects, qu'on peut dire **objectif** et **subjectif** selon qu'il affecte la réalité elle-même ou bien les démarches de l'esprit. Dans le premier cas il met en cause le déterminisme naturel ("**indéterminisme**"), dans le second les représentations humaines ("**incertitude**", "imprévisibilité", voire ignorance totale). Mais dans la mesure où la connaissance est un dialogue ou une interaction entre l'esprit et le réel, cette distinction toute théorique peut difficilement être maintenue, ce qui engendre les confusions relevées précédemment. En fait, le hasard apparaît comme une difficulté à appliquer le principe logique de **causalité**, qui est le ressort de toute explication. Aussi "*qui dit hasard en science parle du diable dans un couvent*" (Christian Magnan, *La Nature*

(4) "Je sais que plusieurs ont cru et croient encore que les choses de ce monde sont gouvernées, soit par la Providence divine, soit par le hasard, d'une manière telle que la prudence humaine ne peut rien contre les événements" Machiavel, *Le Prince*, 1513.

(5) Ce qui conduit Bossuet à ne voir dans ce qu'on nomme "hasard" que le masque de la Providence divine, comme d'autres pourront y voir aussi bien celui du Démon.

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

sans foi ni loi, Belfond, 1988, p.164). Expliquer un phénomène, c'est le relier à d'autres en découvrant sa (ou ses) cause(s). Or ce principe de causalité ⁽⁶⁾ – qui pose que “*tout phénomène a une cause*” et que “*dans les mêmes conditions les mêmes causes engendrent les mêmes effets*” – est d'abord une exigence interne et *a priori* de la pensée, une règle nécessaire à son fonctionnement. Pour pouvoir prétendre à la connaissance, la pensée doit soumettre le réel à cette exigence. Ce qui implique deux choses : que le réel obéisse **en droit** à cette même règle ; qu'on trouve les moyens **en fait** d'appliquer la règle. Si l'on échoue sur l'un ou l'autre point, on parlera de “**hasard**” : hasard “objectif” ou “essentiel” si, dans telle ou telle de ses manifestations, le réel ne répond pas à l'exigence de causalité et produit des phénomènes sans cause ; hasard “subjectif” ou “contingent” si les causes (supposées existantes) ne peuvent être décelées et connues.

Ayant bien distingué ces deux faces du hasard, on peut maintenant les conjoindre pour rechercher de quelles manières le dénommé “hasard” met en difficulté le principe de causalité.

– Ce peut être d'abord en le niant purement et simplement : on attribue au hasard ce qui n'a pas de cause (réelle ou connue). C'est la forme la plus radicale.

Commentant la *déclinaison fortuite*

(6) Leibniz énonce le principe de la raison suffisante de la manière suivante : “*Jamais rien n'arrive, sans qu'il y ait une cause ou du moins une raison déterminante, c'est-à-dire quelque chose qui puisse servir à rendre raison a priori, pourquoi cela est existant plutôt que non existant, et pourquoi cela est ainsi plutôt que de toute autre façon.*” (*Essais de théodicée*, 1710, coll. GF, p. 128).

des atomes dans la physique épicurienne, Cicéron définit ainsi le hasard :

“Faisant dévier les atomes de leur route, Épicure se charge de deux difficultés insolubles : l'une qu'il puisse arriver quelque chose sans cause, d'où il résulte que quelque chose naît de rien – ce qu'il n'admet lui-même pas plus qu'aucun physicien –, l'autre, que, de deux atomes tombant dans le vide, l'un suive la verticale et l'autre s'en écarte [les mêmes causes produisant donc des effets différents].”

Cicéron, *Traité du Destin*, IX, 18 ; c'est nous qui soulignons).

– Mais ce peut être aussi en niant seulement une des clauses du principe de causalité : l'égalité de la cause et de l'effet. En effet la raison pose qu'il ne doit y avoir rien de plus dans l'effet (total) que dans la cause (totale), sous peine que le surplus soit lui-même sans cause. C'est pourquoi on impute aussi au hasard toute disproportion des causes et des effets du style “*petites causes grands effets*”. Et quand l'affectivité et le jugement moral s'en mêlent, l'inégalité a vite fait de passer pour une iniquité et une injustice !

“[L'amour...] La cause en est un je ne sais quoi (Corneille), et les effets en sont effroyables. Ce je ne sais quoi, si peu de chose qu'on ne peut le reconnaître, remue toute la terre, les princes, les armées, le monde entier.

Le nez de Cléopâtre : s'il eût été plus court, toute la face de la terre aurait changé.” (Pascal, *Pensées*, § 180).

“Cromwell allait ravager toute la chrétienté ; la famille royale était perdue, et la sienne à jamais puissante, sans un petit grain de sable qui se mit

dans son uretère. Rome même allait trembler sous lui ; mais ce petit gravier s'étant mis là, il est mort, sa famille abaissée, tout en paix, le roi rétabli. "

(Pascal, *Pensées*, § 221).

– Enfin on dénommera aussi "hasard" ce qui, sans violer le principe de causalité, en rend l'application impossible :

* Soit les causes sont trop nombreuses (surdétermination causale) et enchevêtrées pour qu'on puisse les démêler et suivre la production de leurs effets.

"Le hasard ne signifie que l'ignorance des causes qui produisent l'effet, et pour chaque effet il faut un concours de toutes les conditions suffisantes, antérieures à l'événement ; donc, il est visible que pas une ne peut manquer, quand l'événement doit suivre, parce que ce sont des conditions ; et que l'événement ne manque pas non plus de suivre quand elles se trouvent toutes ensemble, parce que ce sont des conditions suffisantes. Ce qui revient à dire ce que j'ai dit tant de fois, que tout arrive par des raisons déterminantes, dont la connaissance, si nous l'avions, ferait connaître en même temps pourquoi la chose est arrivée, et pourquoi elle n'est pas allée autrement. "

Leibniz, *Réflexions sur l'ouvrage que M. Hobbes a publié en anglais, de la liberté, de la nécessité et du hasard.*

Annexe aux *Essais de Théodicée*, 1710 ; coll. G-F p. 375.

* Soit les causes sont infinitésimales et échappent à toute observation.

"Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous

semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Même si la symétrie est parfaite, une trépidation légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale".

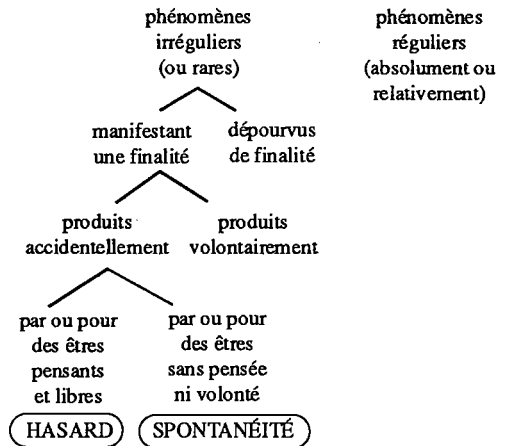
Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, 1908, pp. 67-68.

Le hasard est apparu jusqu'ici comme une infraction ou une entrave au principe de causalité. Mais la notion se complique encore de ce qu'on en fait souvent une **cause** à part entière. D'obstacle à l'explication, il devient alors principe d'explication. Il se présente dans ce nouveau rôle avec des caractères paradoxaux qui en font une causalité bien singulière. En effet il agit de manière instable, désordonnée, contrairement aux règles mécaniques et nécessaires qui régissent normalement les phénomènes de la nature. Il agit aussi de manière aveugle, contrairement aux êtres libres et intelligents qui visent un but. Ni nécessité mécanique donc, ni finalité intentionnelle. Et pourtant il ne semble légitime de parler de hasard que si cette causalité, tout en étant contingente et accidentelle, ne paraît pas neutre mais intentionnelle : comme le montrent Aristote ou Bergson, le hasard semble toujours favorable (ou défavorable) à quelque fin, sans que cette fin soit pour quelque chose dans sa production.

**QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?**

“Parfois aussi on met le hasard et la spontanéité au rang des causes ; et l'on dit de bien des choses qu'elles sont produites, ou qu'elles existent, d'une manière spontanée et par hasard. Examinons donc de quelle façon il est possible de [les] placer parmi les causes énumérées par nous. [...] Un premier point évident, c'est que, parmi les choses, les unes étant éternellement d'une manière uniforme et les autres étant d'une certaine façon dans la pluralité des cas, le hasard ni rien de ce qui vient du hasard, ne peut du tout être la cause ni des unes ni des autres. [...] Parmi toutes les choses qui ont lieu, les unes sont produites en vue d'une certaine fin, les autres ne sont pas produites ainsi. [...] Par conséquent, il se peut évidemment que, même parmi les choses qui ne relèvent pas de la nécessité, ou qui vont contre le cours ordinaire des choses, il y en ait qui ont un certain but. [...] Si ces choses arrivent indirectement et accidentellement, nous les rapportons au hasard. [...]

Ainsi, les causes qui produisent les effets du hasard sont nécessairement indéterminées ; et cela donne à croire que le hasard est dans le domaine de l'indéterminé, et qu'il reste profondément obscur pour l'homme. [...] On peut dire aussi avec toute vérité que le hasard est quelque chose de déraisonnable ; car la raison éclate dans les choses qui restent éternellement les mêmes, et dans celles qui sont le plus souvent d'une certaine façon. Le hasard, au contraire, ne se rencontre que dans les choses qui ne sont ni éternelles ni ordinaires ; et comme les causes de ce dernier ordre sont toujours indéterminées, le hasard est indéterminé comme elles. [...]



Analyse dichotomique de la notion de hasard d'après Aristote

La différence entre le hasard et le spontané, c'est que le spontané, ou ce qui arrive de soi-même, est plus compréhensif que le hasard, attendu que tout hasard est du spontané, tandis que tout spontané n'est pas du hasard. En effet, le hasard et tout ce qui est de hasard n'est jamais rapporté qu'aux êtres qui peuvent avoir un hasard heureux, du bonheur.”

Aristote, *Physique*, livre II, chapitres IV, V, VI.

“Que le jeu tout mécanique des causes qui arrêtent la roulette sur un numéro me fasse gagner, et par conséquent opère comme eût fait un bon génie soucieux de mes intérêts, que la force toute mécanique du vent arrache du toit une tuile et me la lance sur la tête, c'est-à-dire agisse comme eût fait un mauvais génie conspirant contre ma personne, dans les deux cas je trouve un mécanisme là où j'aurais cherché, là où j'aurais dû rencontrer,

semble-t-il, une intention ; c'est ce que j'exprime en parlant de hasard. Et d'un monde anarchique, où les phénomènes se succéderaient au gré de leur caprice, je dirai encore que c'est le règne du hasard, entendant par là que je trouve devant moi des volontés, ou plutôt des décrets, quand c'est du mécanisme que j'attendais. Ainsi s'explique le singulier ballottement de l'esprit quand il tente de définir le hasard. Ni la cause efficiente ni la cause finale ne peuvent lui fournir la définition cherchée. Il oscille, incapable de se fixer, entre l'idée d'une absence de cause finale et celle d'une absence de cause efficiente, chacune de ces deux définitions le renvoyant à l'autre. Le problème reste insoluble, en effet, tant qu'on tient l'idée de hasard pour une pure idée, sans mélange d'affection. Mais, en réalité, le hasard ne fait qu'objectiver l'état d'âme de celui qui se serait attendu à l'une des deux espèces d'ordre et qui rencontre l'autre."

Bergson, *L'Évolution créatrice*, chap. III, 1907.

4. Une conception qui va servir de cadre au calcul des probabilités

L'intérêt de la définition de Cournot, proposée ensuite à nos élèves, est qu'elle purifie la notion de hasard de toute "contamination" par la finalité et l'affectivité : les états d'âme du voyageur accidenté ou du témoin apitoyé sont d'emblée écartés. Le hasard est défini **objectivement** comme rencontre fortuite de séries causales indépendantes. "Ce n'est point parce que les événements sont rares et surprenants qu'on doit les qualifier de résultats du hasard. Au contraire, c'est parce que le hasard les amène, entre beaucoup d'autres auxquels donneraient

lieu des combinaisons différentes, qu'ils sont rares." (A.A. Cournot, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843, § 42). Cette inversion conduit à localiser le hasard dans la réalité elle-même, et non plus seulement ni d'abord dans notre connaissance. Or cela va contre toute une tradition qui, des logiciens de Port-Royal à Leibniz et Laplace, ramène le hasard aux limitations, et donc aux degrés de certitude et d'incertitude, de la connaissance humaine. Pour Cournot, le hasard affecte la nature elle-même et pas seulement la relation de notre esprit avec les choses ; et donc la probabilité va, dans ses travaux mathématiques, évaluer les chances qu'un événement se réalise, avant de mesurer l'incertitude de notre connaissance. Il donne ainsi à la probabilité le statut de mesure du degré de réalisation d'un phénomène objectif.

Pour autant, il n'enfreint pas le principe logique de causalité sans lequel il n'y a plus aucune explication possible : "Aucun phénomène ou événement n'est produit sans cause ; c'est là le principe souverain et régulateur de la raison humaine, dans l'investigation des faits réels, [...] une règle absolue et nécessaire." (Cournot, *op. cit.*, § 39). Pour faire une place au hasard dans le monde, il suffit d'admettre, contre le déterminisme absolu d'un Laplace, qu'il y a un peu de jeu dans le système universel des causes et des effets. Le monde n'est pas une mécanique où tout serait parfaitement enchaîné, ajusté, engrené. Il est certes constitué de chaînes causales rigoureusement déterminées en elles-mêmes, mais celles-ci, relativement indépendantes les unes des autres, peuvent se heurter, se croiser et interférer de manière contingente et aléatoire. On ne peut pas dire pour autant que le hasard **produit** des phénomènes ; il n'est pas véritablement une

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

cause (7) et Cicéron avait sans doute raison de dire que quelque chose ne peut pas naître de rien. Le hasard est seulement dans la **rencontre** ; il lie entre eux des phénomènes qui sont, chacun de leur côté, totalement déterminés. Cette mise en relation peut n'avoir rien d'intéressant ou de spectaculaire, elle tient pourtant du hasard si elle rapproche des pans du réel objectivement indépendants. "On remarquera le hasard qui a fait périr deux frères le même jour [dans des circonstances rigoureusement indépendantes], et l'on ne remarquera pas, ou l'on remarquera moins celui qui les a faits mourir à un mois, à trois mois, à six mois d'intervalle ; quoiqu'il n'y ait toujours aucune solidarité entre les causes qui ont amené tel jour la mort de l'aîné, et celles qui ont amené tel autre jour la mort du cadet, ni entre ces causes et leur qualité de frères." (Cournot, *op. cit.*, § 42). Pour être de hasard, la rencontre doit seulement être pure rencontre, c'est-à-dire n'être en rien prédéterminée ou favorisée, avoir *a priori* égalité de chances de se produire ou de ne pas se produire. Ce point de la définition nous importe d'autant plus qu'il va fonder philosophiquement le calcul des probabilités tel que Cournot contribue à l'instaurer et tel qu'on l'enseignait encore il y a quelques années au lycée. La probabilité d'un événement, c'est en effet le rapport de celui-ci au nombre total des éventualités, déterminé par une **combinatoire a priori** de tous les possibles. Autrement dit, elle porte sur des combinaisons ou **liaisons**, ce qui est conforme à l'essence d'un hasard dont toute l'efficace consiste à relier ce qui est. Et elle suppose l'indépendance des événements qui entrent dans la combinaison (par exemple lancés de dés ou tirages à la loterie

successifs) pour garantir que la liaison entre eux est bien purement aléatoire.

5. La mathématisation du hasard

Rendre intelligible des phénomènes relevant du hasard est une préoccupation ancienne :

– on trouve trace des jeux de hasard dès l'Antiquité et le fameux problème (8) des partis apparaît dès le XIII^e siècle. C'est, on le sait, en résolvant ce problème que Pascal et Fermat dégageront les idées qui sont à l'origine du calcul des probabilités.

– dès l'Antiquité aussi apparaissent des études statistiques. Tacite raconte qu'Auguste fit procéder à de vastes enquêtes sur la richesse de l'empire : il dénombra les soldats, les richesses, les revenus, etc.

Les statistiques furent purement descriptives jusqu'au XVIII^e siècle, où des tables de mortalité furent dressées à des fins d'assurance. Huyghens et surtout Jacques Bernoulli (9) jetteront les ponts entre les statistiques et les probabilités.

(8) Ce problème ancien est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard (type pile ou face) et misent chacun la même somme. Le premier qui aura gagné un nombre déterminé de parties sera vainqueur. Le jeu est interrompu avant la fin. Le problème est alors de savoir comment la mise doit être équitablement partagée.

(9) Soit E une issue possible d'une épreuve de Bernoulli de probabilité p . Cette épreuve est répétée un grand nombre n de fois. Soit f_n la fréquence de réalisation de E au cours de ces n épreuves. Le résultat de Bernoulli affirme que pour tout réel a , $\lim [P (|f_n - p| \geq a)] = 0$; ce qui signifie intuitivement que lorsque le nombre d'épreuves augmente, la probabilité pour que la fréquence diffère beaucoup de la probabilité de E est de plus en plus faible.

(7) En tout cas pas une "cause efficiente" au sens d'Aristote, tout au plus ce qu'on pourrait appeler une "cause occasionnelle", en un sens bien sûr différent de Malebranche.

Cette approche dite “**fréquentiste**” des probabilités est celle que nous enseignons actuellement. De fait cette approche exclut la recherche de la probabilité d'un événement singulier, donc non reproductible, que Bayes avait introduite dès 1763. Ce qui ne va pas sans poser des difficultés d'enseignement car on n'hésite pas en langage courant à parler de la probabilité d'un événement singulier.

Les probabilités sont-elles le seul modèle pour décrire des phénomènes où intervient le hasard ?

“Quelle était donc l'idée centrale de mes travaux sur les finances ? L'idée, si l'on ose dire ambiante, était que les prix sont des fonctions continues du temps et que les fluctuations ne sont pas plus sévères que celles que décrit la distribution bien classique de Gauss. Le hasard auquel faisaient appel ces théories peut être très légitimement qualifié de “bénin”. Mais l'examen des faits montre le contraire : des fonctions discontinues et des fluctuations tout à fait extrêmes. Je dus vite conclure qu'il s'agissait d'une tout autre forme de hasard qu'on peut qualifier de “sauvage”.

Mandelbrot, “Du hasard bénin au hasard sauvage”, *Pour la Science*, HS, avril 1996, p. 12.

Ainsi à l'instar de Mandelbrot qui “classe les hasards” – mais aussi de nombreux autres mathématiciens et physiciens – de nouvelles théories apparaissent pour rendre compte de phénomènes aléatoires :

“Le premier effet de la théorie du chaos [...] est d'élargir la palette des modèles disponibles pour représenter

des phénomènes irréguliers ou aléatoires. Jusqu'à présent, lorsque le physicien, le biologiste, l'économiste rencontrait des problèmes de ce type, il cherchait un modèle stochastique, dans l'idée qu'un modèle déterministe conduisait nécessairement à un comportement régulier prédictible, en contradiction justement avec le phénomène qu'il cherchait à modéliser.”

Ekeland, *Le Chaos*, coll. Dominos, Flammarion, 1995, p. 98.

B. LE TRAVAIL EN CLASSE

Nous avons fait le choix de reproduire sous la forme où elle est présentée aux élèves la “feuille de route” sur **le hasard et les probabilités**. Pour faciliter la lecture, elle a seulement été découpée en six parties et placée en encadrés, chacune des parties étant suivie d'une synthèse du travail fait en cours.

Ces “feuilles de route” sont régulièrement remises aux élèves afin :

– qu'il puissent travailler à la fois chez eux à leur propre rythme et en classe au rythme de leur groupe : le travail par groupes permettant d'une part de confronter les points de vue – ce qui s'avère très utile sur ce sujet – et d'autre part d'effectuer un rapide bilan avec un seul porte-parole par groupe. Chaque exercice ou groupe d'exercices est suivi d'une synthèse magistrale.

– qu'ils aient une vision globale du thème traité et une représentation du travail à effectuer.

**QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?**

Ce travail a été fait dans plusieurs classes de terminales S (toutes options confondues) et dans une classe de terminale L (spécialité mathématiques). Il est préparé, quelques jours à l'avance, par la production par les élèves des représentations spontanées qu'ils ont du hasard, parmi lesquelles nous effectuons une sélection (cf. annexes) qui permet d'amorcer l'analyse de la notion. L'ensemble de l'étude est ensuite divisé en quatre séquences et les synthèses sont effectuées par les deux professeurs, soit en cours de philosophie (la notion de hasard ; en

liaison avec le cours sur la philosophie de l'histoire), soit en cours de mathématiques. Les questions et objections témoignent d'un réel intérêt de la part des élèves. Les principales résistances portent sur la modélisation et l'hypothèse d'un indéterminisme foncier : la première donne l'occasion de revenir sur l'indépendance des mathématiques par rapport au réel et sur le statut "idéal" (ou "idéel") des objets mathématiques⁽¹⁰⁾ ; la seconde montre l'intérêt qu'il y aurait à associer à cette réflexion un professeur de sciences physiques.

1. LA NOTION DE HASARD

Recherche préalable : proposez cinq situations ou phénomènes où il vous semble que le hasard intervient.

Exercice 1 :

Voici un choix d'exemples que vous avez proposés⁽¹¹⁾. Essayez de les classer en dégageant les différents sens du mot hasard.

Exercice 2 :

Pouvez-vous rattacher ces exemples aux définitions suivantes du hasard ?

- le hasard fait que "*quelque chose arrive sans cause*" (Cicéron, 1^{er} siècle avant J.C.).
- "*Le hasard n'est rien qu'un mot imaginé pour couvrir l'ignorance où l'on est des causes agissantes dans une nature dont la marche est souvent inexplicable*" (d'Holbach, 1770).
- "*La cause en est un je ne sais quoi et les effets en sont effroyables*" (Pascal, vers 1657).
- "*Je trouve un mécanisme là où j'aurais dû rencontrer, semble-t-il, une intention : c'est ce que j'exprime en parlant de hasard*" (Bergson, 1934).

(10) Problème déjà abordé dans des actions interdisciplinaires, notamment à propos des nombres complexes.

(11) On trouvera deux sélections d'exemples proposés par les élèves à la fin de cet article, dans les annexes 1 et 2.

Synthèse 1 : qu'est-ce que le hasard ?

Une exigence indéracinable de l'esprit humain est le **principe de causalité** : *tout phénomène a une cause, les mêmes causes produisent les mêmes effets, et de ce fait il y a des lois fixes qui déterminent l'état futur d'un système d'après son état actuel (principe du déterminisme)*. Or la notion de hasard fait problème parce que, d'une manière ou d'une autre, elle remet en question cette exigence de causalité.

Ainsi dans les exemples proposés par les élèves on peut relever trois sortes d'infractions au principe de causalité :

1 - Hasard = absence apparente de cause. Se produit par hasard ce qui arrive sans qu'aucune loi ait été décelée et, en

conséquence, apparaît comme contingent et imprévisible.

2 - Hasard = disproportion des causes et des effets. Est imputé au hasard ce qui, arrivant accidentellement ou par nécessité mécanique, revêt cependant l'apparence de la finalité, semble répondre à une intention.

3 - Hasard = surdétermination causale. On attribue au hasard ce qui résulte du jeu complexe d'une profusion de causes impossibles à démêler.

L'examen de la définition avancée par Cournot permet ensuite de préciser et d'approfondir ce premier effort de clarification selon les indications fournies précédemment.

Exercice 3 : Le hasard est-il subjectif ou objectif ?

A.A. Cournot (1801-1877) est philosophe et mathématicien. Il donne une définition du hasard susceptible de fonder son travail mathématique sur les probabilités.

Définition : *“ Le hasard n'est point, comme on l'a tant répété, un fantôme créé pour nous déguiser à nous-mêmes notre ignorance, ni une idée relative à l'état variable et toujours imparfait de nos connaissances, mais bien au contraire la notion d'un fait vrai en lui même [...] Le hasard consiste dans l'indépendance mutuelle de plusieurs séries de causes et d'effets qui concourent accidentellement à produire tel phénomène, à amener telle rencontre, à déterminer tel événement, lequel pour cette raison est qualifié de fortuit. ”*

Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, 1872.

Exemple : *“ Il prend au bourgeois de Paris la fantaisie de faire une partie de campagne, et il monte sur un chemin de fer pour se rendre à sa destination. Le train éprouve un accident dont le pauvre voyageur est la victime, et la victime fortuite, car les causes qui ont amené l'accident ne tiennent pas à la présence de ce voyageur : elles auraient eu leur cours de la même manière lors même que le voyageur se serait déterminé, par suite d'autres influences, ou de changements survenus dans son monde à lui, à prendre une autre route ou à attendre un autre train. Que si l'on suppose, au contraire, qu'un motif de curiosité, agissant de la même manière sur un grand nombre*

**QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?**

de personnes, amène ce jour-là et à cette heure-là une affluence extraordinaire de voyageurs, il pourra bien se faire que le service du chemin de fer en soit dérangé et que les embarras du service soient la cause déterminante de l'accident. Des séries de causes et d'effets, primitivement indépendantes les unes des autres, cesseront de l'être, et il faudra au contraire reconnaître entre elles un lien étroit de solidarité. "

Cournot, *Essai sur le fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, 1851, p. 38.

Questions :

Quelles sont les deux options principales à propos du hasard ? Qu'est-ce que Cournot retient des trois définitions du hasard présentées dans la synthèse 1 ? Qu'est-ce qu'il rejette ?

2. PHÉNOMÈNES DÉTERMINÉS, PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES

La science commence par l'observation. Pour étudier un phénomène, il faut d'abord recueillir sur lui un maximum de données : soit par une observation "grandeur nature" soit, artificiellement, par sa schématisation ou sa reconstitution en laboratoire. Mais observer, décrire, et même mesurer ne suffit pas. Pour rendre le phénomène intelligible, il faut l'intégrer dans des cadres et un modèle théoriques, ce qui met en jeu le principe de causalité :

- le phénomène a-t-il des causes ?
- toutes les causes sont-elles décelables ?
- peut-on maîtriser toutes les causes ?
- les effets sont-ils prévisibles, qualitativement et quantitativement ?
- les "mêmes causes" conduisent-elles toujours aux "mêmes effets" ?
- la cause et l'effet sont-ils du même ordre de grandeur ? par exemple des variations infimes des causes engendrent-elles des variations infimes des effets ?
- etc.

Exercice 4 : déterminés ou aléatoires ?

Pour chacun des sept exemples donnés ci-dessous :

- répondre aux questions
- préciser si le phénomène est déterminé ou aléatoire.

Exemple 1 : Les accidents de la route dans une ville.

Pour étudier les accidents dans une ville, on recueille des données : l'heure des accidents, les lieux où ils se produisent (quartier, situation routière : carrefour, feux, lignes droites...), le sexe, le taux d'alcoolémie et l'âge des conducteurs, la couleur de la voiture, etc. Apparemment, tous les résultats sont aléatoires : il y a des accidents à toute heure, dans tous les quartiers, avec des voitures de toutes les couleurs, les conducteurs sont de tous âges, etc. Cependant, une étude précise des résultats peut montrer que certains quartiers de la ville sont plus touchés que d'autres, que les fréquences des accidents avec des conducteurs jeunes ou âgés sont plus élevées, que les voitures rouges sont plus impliquées dans les accidents que les autres véhicules...

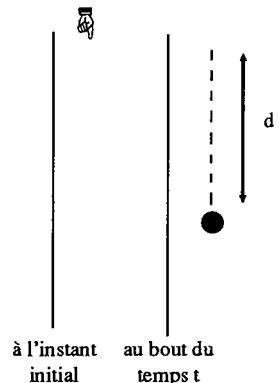
Question : vous êtes assureur ; quelles dispositions " équitables " pourriez-vous prendre ?

Exemple 2 : la chute d'une bille

On lâche une petite bille en acier d'une hauteur de 5m. Un physicien néophyte réalise un tableau de mesures : il mesure (en mètres) la distance parcourue par la bille suivant le temps écoulé (de dixième de seconde en dixième de seconde).

Question : Peut-on prévoir la position de la bille au bout de 2.6 secondes ?

d	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
t	0	0,05	0,2	0,44	0,8	1,2	1,76	2,4	3,13	4	4,9



Exemple 3 : les trajectoires des planètes.

A l'aide des mesures des astronomes antérieurs (notamment Tycho-Brahé), Kepler imposa une nouvelle vision du ciel : les trajectoires des planètes sont des ellipses et les positions des planètes suivent des lois mathématiques. Ce sont les lois connues sous le nom de " lois de Kepler ".

Question : Peut-on, à l'aide de ces lois, connaître la position du système il y a 5000 ans ou en l'an 20362 ?

**QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?**

Exemple 4 : La roulette du casino

Une roulette comporte des cases rouges et noires. Pour un contrôle de qualité du matériel du casino, on adopte la procédure suivante : on s'intéresse à la fréquence d'apparition du rouge et pour cela on réalise quatre séries d'expériences ; chaque série portant successivement sur 10, 25, 50, 75, 100, 250, 500, 750, 1000 lancers.

Nombre de lancers	Première série	Deuxième série	Troisième série	Quatrième série
10	0,7	0,4	0,3	0,6
25	0,64	0,51	0,4	0,54
50	0,54	0,53	0,44	0,48
75	0,51	0,507	0,397	0,494
100	0,52	0,52	0,42	0,54
250	0,528	0,482	0,440	0,494
500	0,532	0,498	0,476	0,5
750	0,528	0,501	0,469	0,503
1000	0,514	0,495	0,475	0,493

Questions :

- 1- Peut-on prévoir, au 1001^e lancer suivant le millième de la première série, la case où s'arrêtera la bille ?
- 2- La roulette est-elle truquée ?

Exemple 5 : la désintégration du carbone radioactif.

Selon la théorie des phénomènes radioactifs, la désintégration d'un noyau radioactif peut se produire à un instant quelconque. On ne peut prévoir à quel instant elle aura lieu. Cette désintégration est indépendante des désintégrations éventuelles des noyaux voisins. L'étude de l'évolution d'un échantillon d'un nucléide radioactif relève donc de méthodes statistiques. La loi donnant le nombre moyen de désintégrations par seconde (ou activité) à l'instant t pour un échantillon actif est :

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

où A_0 est l'activité à l'instant $t = 0$ et λ , la constante radioactive caractérisant le radionucléide étudié.

Question : le hasard qui intervient ici est-il de même nature que dans l'exemple précédent ?

Exemple 6 : l'évolution d'une population animale.

Verhulst (1804-1849) a étudié l'évolution de populations animales. Dans certaines conditions (espace vital disponible en particulier), il a constaté que la population ne pouvait pas dépasser N individus et que le rapport u_n entre le nombre d'animaux à la n-ième année et N suivait la loi :

$$u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n) \text{ (avec } u_0 \text{ donné entre 0 et 1)}$$

Voici une étude des termes de la suite affichés par "Excel".

1 ^{er} terme	0,145675	0,145676	0,145677	0,145678	0,145679	0,14568	0,145681
5 ^e terme	0,00030547	0,00030468	0,00030389	0,0003031	0,00030231	0,00030152	0,00030073
10 ^e terme	0,28154362	0,28089111	0,28023907	0,27958749	0,27893638	0,27828573	0,27763555
20 ^e terme	0,68050091	0,05064547	0,24352358	0,90598791	0,82512645	0,14899191	0,11551439
30 ^e terme	0,32583677	0,00163096	0,4013845	0,94299101	0,84813086	0,25665412	0,01115616
50 ^e terme	0,93519138	0,07577607	0,7316414	0,90487213	0,75326693	0,00963676	0,36792856
75 ^e terme	0,47529157	0,19089128	0,70293674	0,09868112	0,5081033	0,78464958	0,74238822
100 ^e terme	0,0821713	0,99249075	0,83412469	0,81889649	0,57436847	0,00515782	0,66615766

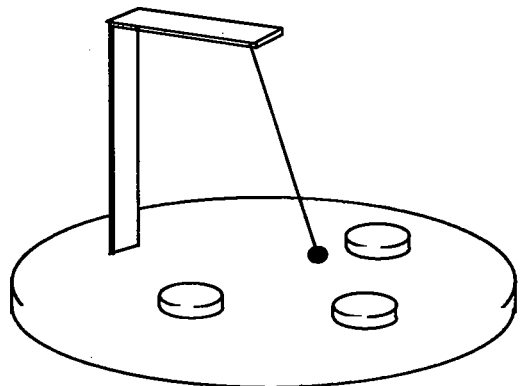
Questions :

1. Quelles remarques ce tableau de nombres vous suggère-t-il ?
2. Expliquez à l'aide de la représentation graphique des suites récurrentes le phénomène observé.
3. Refaites la même expérience avec votre calculatrice.
4. Refaites la même expérience avec la même suite en partant de $u_0 = 0,1425624176$ avec deux calculatrices différentes. Qu'observez-vous ?

Exemple 7 : L'expérience du pendule et des trois aimants ⁽¹²⁾

Un pendule aimanté, placé devant vous, oscille au dessus de trois aimants.

Repérez une position initiale, lâchez la bille et observez la trajectoire.



(12) On peut se procurer à la Cité des Sciences de La Villette cet appareil appelé " decision maker ".

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

Recommencez l'expérience à partir de la même position initiale. Obtenez-vous la même trajectoire ?

Pensez-vous que vous observerez une stabilisation de la trajectoire si vous recommencez cent fois l'expérience à partir de la même position initiale ?

Synthèse 2 : Phénomènes déterministes ou pas ?

Une étude des exemples au cas par cas nous semble nécessaire :

Exemple 1 : la simple mise en ordre des données permet de faire "parler" les nombres collectés. C'est déjà une façon de surmonter le désordre et l'irrationalité du phénomène. Peut-on aller plus loin et en déduire qu'il y a des régularités et que les accidents ne se produisent pas tout à fait au hasard ? L'étude de données statistiques permet alors de montrer des **corrélations** mais non d'affirmer qu'il existe des **causalités**.

Avec les élèves il convient d'illustrer cette distinction avec de nombreux contre-exemples : une enquête peut faire apparaître que les conducteurs ont moins d'accidents depuis la mise en place du permis à points, mais une autre enquête peut faire apparaître qu'il y a eu moins d'explosions dues au gaz depuis la mise en place du permis à points !

Exemple 2 : pour répondre à la question, la démarche la plus simple semble être de rechercher s'il existe une **relation de dépendance** entre le temps et la distance. Une relation approchée semble être :

$$d = 4.9 t^2$$

La mise à l'épreuve de cette relation consiste à recommencer d'autres expériences avec d'autres billes. On constate que cette relation se vérifie. A partir de ces expériences, on en déduit **une loi expérimentale** :

"quand on lâche une bille, elle tombe à la verticale et la distance d parcourue est donnée par la relation $d = 4.9 t^2$ ".

La nature semble obéir à des lois. Il faut remarquer cependant que les lois sont extrapolées à partir d'observations et de mesures plus ou moins précises et donc peuvent être affinées ou précisées.

De tels faits sont dits **déterministes** : *"les faits ont une cause ; les mêmes causes produisent les mêmes effets ; d'où il résulte que les faits sont régis par des lois nécessaires et universelles"* (Larousse). La cause est ici la gravitation et le phénomène n'est donc pas régi par le hasard. On parle de **déterminisme de fait** : cela signifie par exemple que pour connaître la distance parcourue en 5,2 secondes par une bille lâchée 10 m plus haut, il est inutile de reproduire l'expérience. La connaissance de la loi et des conditions initiales (vitesse de départ nulle) suffit pour prévoir la position de la bille.

Exemple 3 : l'état du système solaire au regard des lois de Kepler est donc un **phénomène déterministe**. Cependant

les lois de Kepler sont expérimentales, c'est-à-dire obtenues à partir de mesures. Ces lois peuvent être affinées, par exemple par des relevés plus précis. Quoi qu'il en soit, on ne peut pas dire que les trajectoires relèvent du hasard : elles peuvent s'expliquer par la théorie de la gravitation. Il s'agit de déterminisme de fait si on admet que les corps obéissent à la loi de gravitation. Une autre théorie affirme que, bien que déterministe, l'état du système solaire n'est pas prévisible à très long terme (500.000 ans). Cette théorie relève du chaos (voir ci-après)

Exemple 4 : on peut admettre que la roulette est "équitable" dans le sens où les fréquences entre l'obtention du rouge et l'obtention du noir tendent à s'équilibrer. Autrement dit, il y a une certaine régularité dans le phénomène bien que nous ne puissions pas prévoir le résultat lors d'un lancer précis. Le lancer particulier semble relever du hasard mais la série des lancers semble bien suivre une loi : on parle d'un **déterminisme statistique**. Cette loi, ici la **stabilité des fréquences** (on se rapproche de 0.5), permet de **modéliser** par la théorie des probabilités.

Cependant, pourquoi un lancer particulier de la bille relève-t-il du hasard ? On peut faire l'analogie avec le lancer de dé :

"Quoi de plus déterministe qu'un lancer de dés ? Ce petit cube homogène quitte la main du lanceur, est soumis à la gravitation terrestre et à la résistance de l'air, rebondit sur une surface que l'on choisit exprès élastique et plane, et s'immobilise après avoir perdu son énergie dans les chocs et les frottements. Il n'est soumis qu'à des lois mécaniques bien connues, abondamment étudiées, et, en principe, une fois donnée l'impulsion

initiale, tout le reste du mouvement peut être déterminé par le calcul. D'un autre côté, quoi de plus aléatoire que le lancer de dés ? Le mot même d'aléa ne désigne-t-il pas dé en latin."

Ekeland, *Le Calcul, l'imprévu*, 1984, p. 64.

Exemple 5 : Comme pour l'exemple précédent, il y a un déterminisme statistique. Mais il est difficile d'interpréter le hasard qui fait que tel noyau est ou non désintégré. S'agit-il de causes inconnues ou d'un **hasard essentiel** ?

Toujours est-il que la désintégration de la population de noyaux présente une telle régularité qu'on a fondé sur elle une méthode de datation des matières organiques contenues dans les roches.

Exemples 6 et 7 : De petites variations au départ conduisent très rapidement à des résultats très différents et très fluctuants ; les résultats sont alors imprévisibles. De ce point de vue, un système déterministe peut "générer de l'imprédictibilité", ce que l'on appelle souvent "hasard".

Le premier à avoir perçu ce que l'on appelle maintenant le chaos déterministe est Henri Poincaré :

"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons un phénomène fortuit."

Poincaré, *Science et méthode*,
1908, pp. 68-9.

Un phénomène peut être déterministe, c'est à dire répondre à des équations, sans pour autant être prévisible. En effet, les conditions initiales ne sont connues qu'avec une certaine imprécision due aux mesures. Or, contrairement à ce que pensait Laplace, des petites causes peuvent produire de grands effets.

Dans l'exemple de l'évolution des populations animales :

– les statistiques montrent que, contrairement à ce qui se passe pour la "roulette", aucune régularité n'apparaît ; ce qui ne permet pas de modéliser par des probabilités.

– une étude mathématique simple montre que, si l'on part de deux valeurs qui diffèrent de a , à l'itération suivante les valeurs diffèrent de ka , où k est strictement plus grand que 1. Au bout de n itérations, l'écart entre les perturbations obtenues peut être très grand...

Si on connaissait la valeur exacte de départ, tous les termes de la suite seraient parfaitement connus et il n'y aurait plus de hasard. Mais cette situation est totalement théorique car nous ne pouvons connaître exactement u_0 . Quand bien même nous ferions abstraction de la situation biologique du départ pour nous intéresser simplement à la situation mathématique, l'ordinateur ne pourrait que nous conduire à des résultats aberrants : en effet celui-ci ne peut prendre en compte les valeurs exactes de chaque calcul car il tronque les nombres – au mieux il ne prend en compte que les 10 ou 20 premières décimales.

3. DÉTERMINISME ET INDÉTERMINISME

Exercice 5 : Le déterminisme de Laplace

Pour la science classique qui se développe à partir du XVII^e siècle, la nature est intelligible, elle obéit aux lois qui sont aussi celles de l'esprit humain ⁽¹³⁾ et en particulier à l'exigence de causalité ; elle est donc considérée a priori comme régie par un strict déterminisme. Simon Laplace (1749-1827) exprime au mieux cette conviction intransigeante : l'univers est régi par des lois rigoureuses qui permettent de connaître les états futurs comme les états passés de tout phénomène, pourvu qu'on en connaisse la loi et les conditions initiales.

“Nous devons envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux...”

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1825, pp. 32-3.

Questions :

- 1- Si, dans les faits, nous ne pouvons pas connaître parfaitement le passé et le futur de certains phénomènes, quelles en sont les raisons selon Laplace ?
- 2- Que devient le hasard dans une telle conception du monde ?

Exercice 6 : Le déterminisme remis en cause

Dans la physique du XX^e siècle, avec les développements de la mécanique quantique, le principe du déterminisme a été sérieusement ébranlé. Voici par exemple le témoignage de Max Planck, un des principaux acteurs de cette aventure scientifique :

“Tout ce qui se passe dans le monde est-il déterminé jusque dans le détail ou non déterminé ? Autrement dit existe-t-il des lois qui gouvernent la marche des événements, aussi bien dans l'ordre de la nature que dans l'ordre de l'esprit ? ou bien avons-nous affaire, au moins jusqu'à un certain degré, au règne du hasard, de l'arbitraire, de la liberté, selon le terme qu'il nous plaira de retenir ? Quand quelqu'un est frappé par la foudre ou gagne le gros lot, est-ce l'œuvre de la nécessité ou un événement fortuit ? [...]

(13) Elle est écrite par Dieu en langue mathématique, écrit Galilée.

**QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?**

Ces réflexions peuvent nous servir d'introduction à l'étude d'une question qu'a soulevée le développement de la mécanique ondulatoire et dont l'importance n'intéresse pas seulement les physiciens. Le problème est le suivant : les événements physiques qui se situent au cœur de la matière, les processus atomiques, sont-ils déterminés ou non ? Abordons le sujet par un exemple concret. Soit un faisceau d'électrons se mouvant à la même vitesse, dans la même direction, mais sans ordre et indépendamment les uns des autres. Ces électrons tombent en oblique sur une très mince feuille de cristal. Un certain pourcentage d'entre eux, pourcentage que l'on peut calculer très exactement, sera réfléchi par le cristal, tandis que les autres le traversent. Laissons de côté le cas où un électron reste pris dans le cristal, ce qui ne se produira pas si nous choisissons une feuille suffisamment mince. Si un seul électron tombe sur le cristal, il sera donc réfléchi par la feuille ou la traversera. L'électron reste toujours un tout, et sa scission en deux parties est impossible. La loi de la réflexion des électrons par le cristal est donc une loi statistique. Elle prévoit le comportement d'un grand nombre d'électrons, mais non celui de chaque électron en particulier. Autrement dit : lors du heurt d'un électron contre un cristal, ce n'est pas l'électron qui se scinde d'une manière déterminée, mais la probabilité que l'électron prenne l'une ou l'autre voie."

Planck, *L'Image du monde dans la physique moderne*, 1933,
Gonthier, coll. Médiations, pp. 31 et 36-37.

Questions :

- 1- Quel type de déterminisme atteint-on dans l'expérience citée ?
- 2- Peut-on rapprocher cette expérience d'un des exemples cités précédemment ?
- 3- Pourquoi a-t-on parlé à ce propos d'indéterminisme ? Qu'est-ce qui est indéterminé ?.

Synthèse 3 : déterminisme et indéterminisme

Laplace ne met pas en doute le fait que tout ce qui s'observe dans l'effet est déjà dans la cause. Donc, si nous ne pouvons pas connaître le passé et le futur de certains phénomènes, c'est, d'après lui, soit que nous ne connaissons pas les causes ou les lois, soit que nous ne maîtrisons pas les conditions initiales – celles-ci pouvant être trop nombreuses ou difficilement mesura-

bles – et seule une super "intelligence" (on l'appelle *démon de Laplace*) pourrait y parvenir. De ce point de vue le hasard paraît être le nom donné à notre ignorance. Ce point de vue est depuis le début du siècle contesté. Mais l'interprétation d'expériences telles que celle décrite par M. Planck a divisé physiciens et épistémologues : sommes-nous en présence d'un **indéterminisme foncier** à la base du comportement des électrons et autres particules ou bien sommes-nous seulement

dans l'*ignorance des facteurs* qui déterminent le comportement individuel de ces êtres microscopiques ? Autrement dit, le hasard ici reconnu est-il dans l'*essence* du phénomène ou dans l'*ignorance* de l'homme ?

– Les uns avec Einstein ne peuvent admettre un indéterminisme radical au sein de la nature (*“le Vieux [= Dieu] ne joue pas aux dés”*) et, pour expliquer les données paradoxales de la mécanique quantique, ils préfèrent évoquer *“des paramètres cachés”* ou mettre en cause les limites de nos connaissances et les perturbations introduites par nos instruments de mesure. Mais ils ne doutent pas que chaque électron par exemple a toujours une position, une vitesse, et donc une trajectoire parfaitement déterminées dans la **réalité**, même si nous ne pouvons pas les connaître et si le modèle quantique les décrit de manière probabiliste.

– Les autres autour de Niels Bohr et de l'école dite de Copenhague, considèrent, d'une part, que cela n'a pas de sens de postuler une réalité que nous ne pouvons pas connaître et, d'autre part, que les instruments que nous utilisons pour observer la nature sont eux-mêmes des phénomènes physiques. En conséquence ils n'admettent pas la distinction entre plan

de la connaissance et plan de la réalité, avec laquelle les autres cherchent à se rassurer. Cela n'a donc aucun sens d'assigner à l'électron une réalité individuelle, avec une localisation précise dans l'espace-temps. Le hasard est dans la nature même des phénomènes microscopiques, et comme ceux-ci sont à la base de tous les phénomènes, les lois macroscopiques elles-mêmes ne sont que des lois de probabilité.

“Une loi statistique ou probabiliste dit que, pour des valeurs déterminées de grandeurs données, il existe une distribution probabilitaire spécifique des autres grandeurs. Or l'existence de lois probabilistes signifie l'effondrement de la thèse déterministe. La majorité des physiciens d'aujourd'hui n'acceptent pas le déterminisme au sens strict où nous l'avons défini ci-dessus ⁽¹⁴⁾. Il n'y a guère qu'une petite minorité d'entre eux qui croient que la physique y reviendra un jour. Einstein lui-même n'a jamais abandonné cet espoir. Il a cru fermement pendant toute sa vie que le rejet du déterminisme en physique n'était que provisoire. On ne saurait dire, à ce jour, s'il était ou non dans le vrai ⁽¹⁵⁾.”

Rudolf Carnap, *Les Fondements philosophiques de la physique*,
A. Colin 1973, p. 211.

(14) A savoir : *“il est possible, à partir d'une description complète de l'état global du monde à un instant déterminé, de calculer, à l'aide de lois, n'importe quel événement passé ou futur”*.

(15) Il semble bien cependant que l'expérience réalisée en 1983 par Alain Aspect et son équipe du laboratoire d'Orsay apporte des arguments décisifs en faveur de la thèse indéterministe.

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

4. MATHÉMATISATION DU HASARD

Les mathématiques en tant que science autonome (et non en tant qu' "outil" au service des autres sciences) portent, à la différence de ces autres sciences, non pas sur tel secteur de la réalité ou tel phénomène qui se produit dans le monde extérieur, mais sur des entités idéales, sur des constructions et des opérations de l'esprit humain. Or le hasard mettant en jeu directement nos principes logiques, et le plus fondamental d'entre eux, le principe de causalité, il ne peut apparaître que comme un défi pour les mathématiciens. C'est pourquoi ceux-ci n'ont eu de cesse d'appriivoiser et de circonvenir une "réalité" aussi rebelle. En témoigne le ton triomphaliste de Pascal, adressant à l'Académie Parisienne de Science le programme de ses travaux mathématiques : "*En joignant les démonstrations mathématiques à l'incertitude du hasard, et en conciliant ces choses apparemment contraires, elle [= sa géométrie] peut, recevant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant : la Géométrie du hasard*" (Pascal, *Adresse à l'Académie Parisienne*, 1654, *Œuvres*, Pléiade, p. 74, traduction personnelle).

Pour mathématiser le hasard plusieurs moyens peuvent être mis en œuvre :

a. les statistiques

Il s'agit d'une méthode *a posteriori* qui consiste à recueillir, traiter et interpréter un grand nombre de données d'observation, l'effet de masse permettant de réduire le caractère aléatoire de celles-ci.

Exercice 7 :

Voici les notes obtenues à un examen de mathématiques par les élèves de terminales d'un lycée :

18	17	8	7	17	14	12	7	13	17	17	18	7	15	8	14	6	12	16	20
18	16	10	8	13	19	16	18	9	14	19	16	16	17	16	13	13	13	9	8
17	17	5	16	13	14	18	18	16	20	7	12	15	12	16	16	8	14	13	18
19	5	2	13	15	16	15	8	8	9	20	16	13	15	15	15				

Questions :

- 1- Quelles informations le lycée peut-il tirer de cet ensemble de notes ?
- 2- On suppose que l'on possède l'âge des élèves, leur milieu social, leur collège d'origine, la profession des parents. Quelles informations supplémentaires le lycée peut-il tirer de cet ensemble de données ?

b. Les probabilités

A partir de la description d'une expérience réelle, il s'agit d'en idéaliser les conditions pour qu'un formalisme mathématique permette d'en dénombrer les issues possibles et d'évaluer les chances que telle ou telle se réalise.

Exercice 8 : Comment s'articulent phénomène réel et modèle ?

Voici une situation : Dans l'ensemble des familles de trois enfants, on en choisit une au hasard.

- 1- Quelle est la probabilité de l'événement A "obtenir des enfants des deux sexes"?
- 2- Quelle est la probabilité de l'événement B "la famille a au plus une fille" ?
- 3- Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Question : quelles hypothèses implicites doivent être placées à la base de la modélisation pour pouvoir répondre aux questions ?

Synthèse 4 : Les statistiques et les probabilités

Les statistiques

Les statistiques – comme il a déjà été dit – offrent un ensemble de concepts et de techniques qui permettent de faire parler les données : elles permettent de résumer la série de nombres, tantôt par la moyenne, tantôt par la médiane, d'examiner les dispersions autour de la moyenne, ou, dans le cas de plusieurs séries statistiques, d'établir des corrélations, etc. En plus de leur rôle descriptif (mettre de l'ordre là où il y avait du désordre), inductif (généraliser à une population entière des données recueillies sur un échantillon) ou heuristique (suggérer des causes à partir des régularités mises en évidence), elles permettent d'établir dans certains cas des hypothèses de modèles probabilistes.

Les probabilités :

Elles permettent de formaliser *a priori*

une situation purement idéale pour en dénombrer les issues possibles et évaluer les chances que telle ou telle se réalise. Le hasard est ici étroitement enserré dans les conditions formelles qui définissent le modèle initial : par exemple, équiprobabilité des issues possibles, indépendance des expériences aléatoires (lancers de dés, tirages au sort...), similitude des conditions initiales, etc.

Reprenons l'exemple (16) : "Choisir une famille au hasard" suppose que l'on considère qu'il y a équirépartition de la probabilité sur l'ensemble des familles de trois enfants. Est-ce le cas ?

Comment modéliser ? Il semble *raisonnable* d'envisager l'ensemble des huit triplets $\{(f, f, f); (f, f, g); (f, g, f)...\}$: en effet choisir une famille de trois enfants revient

(16) Cité par Michel Henry dans la brochure "Modélisation en probabilités", 1997, publiée par la commission Inter-IREM "Statistiques et Probabilités".

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

à choisir un des triplets précédents parmi les huit possibles. La modélisation mathématique consiste alors à tirer au hasard une boule parmi huit boules, un triplet étant assimilé à une boule.

Les huit triplets sont-ils équiprobables ? Par exemple le sexe d'un enfant dépend-il du sexe des deux autres ? Comment prendre en compte les problèmes de gémellité ?... La probabilité p d'avoir à la naissance un garçon est-elle la même que celle q d'avoir une fille ?

Si nous nous plaçons dans le modèle le plus "confortable" – les huit triplets sont équiprobables, c'est-à-dire que le sexe d'un enfant ne dépend pas de celui des deux autres et que la probabilité d'avoir une fille égale celle d'avoir un garçon –, alors la réponse est "oui" à la dernière question. Si on suppose maintenant que la probabilité d'avoir un garçon est différente de celle d'avoir une fille la réponse est "non".

Quel modèle est le plus à même de décrire la situation ? Seule l'expérience peut valider le recours à tel ou tel modèle. Ainsi une étude statistique montre que la fréquence de naissance d'un garçon est de 0,514 alors que celle des filles est de 0,486... Notons qu'utiliser comme hypothèse $p = q = 0,5$ ne conduit pas à un résultat mathématiquement faux mais conforme à l'hypothèse posée. Dans ce cas, c'est la modélisation qui est incorrecte.

Le problème étant modélisé, le mathématicien travaille, en probabilité comme en géométrie ou en analyse, sur des objets idéaux ou conceptuels (un cercle n'existe que par sa définition qui en fait un objet idéal). Ainsi, en probabilité, l'expérience réelle est modélisée par ce que l'on appelle une *expérience aléatoire* : ce qui signifie que l'expérience est *intellectuelle*, que

l'issue de l'expérience est *incertaine* (il y a hasard) mais qu'on peut faire la *liste des issues possibles* et que l'expérience est, à l'infini ⁽¹⁷⁾, *reproductible à l'identique*.

Ekeland donne un exemple amusant de la différence entre expérience réelle et expérience aléatoire :

"Torten Frode raconte qu'en Hising se trouvait une ville qui avait lié son sort tantôt à la Norvège tantôt à la Suède. Les deux rois convinrent alors de tirer au sort à qui elle reviendrait : ils lanceraient des dés, et le gagnant serait celui qui aurait le total le plus élevé. Le roi de Suède obtint un double six, et dit que ce n'était pas la peine que le roi Olav jouât. Mais celui-ci répondit, secouant les dés dans son poing : "Il reste encore deux six dans ces dés, et il n'est pas difficile à Dieu mon Seigneur des les faire sortir." Il lança, et ce fut un double six. Puis le roi de Suède lança, et l'un des dés sortit encore un six, mais l'autre se brisa en deux morceaux, si bien qu'il indiqua sept. La ville lui revint donc."

Ekeland, *Au hasard*, Seuil, coll. points, p. 13.

La probabilité utilisée pour construire un modèle tient compte de la fréquence statistique calculée à l'aide d'expériences réelles répétées dans des conditions bien définies (protocole expérimental). Cependant, dans le langage courant, le mot *probabilité* est employé alors qu'il n'est pas possible de déterminer par une approche

(17) On pourra consulter à ce sujet la brochure "Enseigner les probabilités au collège" publiée par la commission Inter-IREM "Statistiques et Probabilités".

statistique la probabilité d'un événement. Par exemple : il est 22h 30, le samedi 15 avril au Parc des Princes ; c'est la séance de tirs au but pour départager les équipes du PSG et de Marseille qui disputent la finale de la Coupe de France de football. L'avant-centre marseillais pose le ballon et

s'apprête à tirer. Quelle est la *probabilité* que le gardien parisien l'arrête ?

Dans le cas *d'un événement singulier*, parier sur une issue plutôt que sur une autre est une pratique courante ; mais peut-on quantifier la probabilité ?

c. La théorie du chaos déterministe

Exercice 9 :

Questions :

- 1- Sur l'exemple de la suite de l'exemple 6 dans l'exercice 4, expliquez pourquoi le modèle probabiliste ne s'applique pas à l'exploitation des données statistiques ? (Comparez avec l'exemple de la roulette)
- 2- Quelle est la part du déterminisme dans les deux exemples précédents ? Quelle est la part du hasard ?

Synthèse 5 : Le chaos déterministe ⁽¹⁸⁾

Même si le hasard peut sembler imputable seulement à l'insuffisance de nos connaissances sur la valeur initiale (hasard = nom donné à notre ignorance), peut-on donner du sens à une valeur qui n'est pas (humainement et physiquement) calculable ? Le hasard ne relève plus ici de limitations de *fait* de la connaissance humaine mais des limites et impossibilité de *droit* de la calculabilité.

"Entre le modèle mathématique et la réalité physique, un espace intermédiaire a été découvert, qui est celui du calcul"

Ekeland, *Le Chaos*, coll. Dominos, Flammarion, 1995, p. 105.

Les phénomènes actuellement modélisés par la théorie du chaos – cours de la bourse, météo, système solaire, expériences chimiques et physiques... – ne sont pas prévisibles à long terme. La théorie montre que toutes les possibilités ne sont pas envisageables : dans le cas du pendule toutes les trajectoires ne sont pas possibles. De même en météo, les équations qui gèrent les situations météorologiques sont chaotiques (voir l'image du papillon de Lorenz) et les météorologues s'accordent pour dire qu'une prévision au-delà de vingt jours restera impossible ; mais on sait aussi qu'il ne neige pas aux Antilles...

Les phénomènes chaotiques sont déconcertants. Ainsi dans l'espace des phases ⁽¹⁹⁾, l'état du système décrit une

(18) En quoi cette dénomination est-elle paradoxale ?

(19) La notion d'espace de phases peut être expliquée de manière simple à l'aide d'un pendule ordinaire.

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

courbe que l'on appelle "attracteur étrange" : on constate alors que le système semble obéir à des lois, mais celles-ci ne permettent pas de prévoir l'état futur du système. Cet "attracteur étrange" ne peut pas être correctement compris dans le cadre de la géométrie "ordinaire". Il a une nature fractale...

"[Prenons] un système de trois variables régies par trois équations différentielles [...] Le système lui-même, ou plutôt son état à un instant donné, est représenté par un point de l'espace à trois dimensions⁽²⁰⁾ : les trois coordonnées de ce point donnent les valeurs des trois variables descriptives à l'instant considéré. Une fois choisi le point initial, l'évolution du système est entièrement déterminée par les équations de Lorenz, et ce que représente le dessin est la trajectoire correspondante. On la voit s'enrouler alternativement autour d'une anse, puis de l'autre, puis de nouveau de la première, puis encore de la seconde, indéfiniment, et de manière aléatoire, sans que l'on puisse jamais prévoir à quel moment la trajectoire basculera d'un côté ou de l'autre. [...] La zone médiane, où se croisent les deux anses, est une sorte de carrefour d'où bifurquent visiblement plusieurs routes, les unes se dirigeant vers la gauche, les autres vers la droite. Ces routes s'enchevêtrent très intimement et forment un réseau inextricable, si bien qu'une différence minime à l'arrivée dans cette zone fera que l'on prendra une route plutôt que sa voisine, et que l'on s'orientera vers la gauche plutôt que vers la droite.[...]"

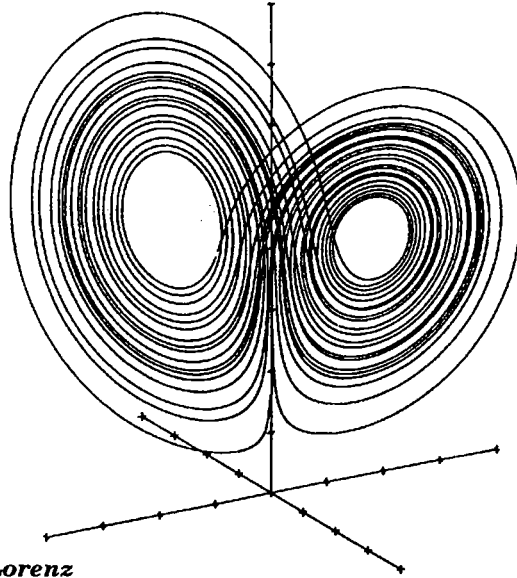
(20) Ce que les physiciens appellent l'espace des phases.

On rentre [donc] les équations du mouvement dans la machine, on place le point de départ, et vogue la galère : à partir de ce seul point se développe une trajectoire qui, au fil de ses volutes, dessine dans l'espace initialement vide un objet à deux anses qui ne ressemble à rien de ce que nous connaissons, tout à fait étranger aux figures classiques de la géométrie dans l'espace, le plan, le cube ou la sphère, objets peints et lisses, alors que celui-ci semble fait de lacunes et d'angles, comme s'il était étranger à notre espace à trois dimensions et avait du mal à l'occuper.[...]"

La théorie du chaos propose un modèle déterministe, mais laisse aussi un espace au hasard, une dimension à l'imprévisible. Le système est confiné sur son attracteur étrange, certes ; mais son mouvement sur l'attracteur nous échappe. Plus exactement, le temps caractéristique T pose une borne aux possibilités de prévision ; rappelons que c'est le temps nécessaire pour qu'une erreur de positionnement ou une perturbation du mouvement soit multipliée par dix. Pour des durées inférieures à T , on peut sans problème suivre le système par calcul. Pour des durées supérieures à $10T$, on perd complètement sa trace ; tout ce que l'on peut dire (et c'est déjà une précision importante) est qu'il est quelque part sur l'attracteur étrange. Où exactement, on l'ignore.

Admirable et subtil dosage du hasard et de la nécessité !"

Ekeland, *Le Chaos*, coll. Dominos, Flammarion, 1996, pp. 56-58 et pp. 102-104.



Exemple : l'attracteur de Lorenz

ANNEXE 1

Dans les vingt situations suivantes, il est question de hasard. Classez-les en fonction du type de hasard qu'elles mettent en jeu et essayez d'en déduire les différents sens de ce mot.

- 1- On lance un nouveau produit sur le marché et on ne sait pas s'il va marcher. C'est le hasard qui décide.
- 2- *"En quelle année Bernard Hinault a-t-il pour la dernière fois remporté le Tour de France ?"* Comme je n'en ai pas la moindre idée, je donne une réponse au hasard.
- 3- Nous venons de faire une partie de belote et par hasard j'ai eu 8 cartes de la même famille.
- 4- En 1986, j'ai retrouvé ma meilleure amie, que je n'avais pas vue depuis 5 ans, dans un pays étranger. Le hasard avait voulu que nous choissions le même camping.
- 5- Si un singe qui joue avec une machine à écrire tape un bout de phrase sensé, c'est le hasard.
- 6- J'appelle une amie au téléphone au moment-même où, par hasard, elle-même était en train de m'appeler.
- 7- Pour la Fête des Pères, toute la famille se retrouve. Les enfants sont heureux de se voir car il est très rare que la famille soit réunie. Lorsque le père ouvre ses cadeaux, il découvre avec surprise que ses enfants lui ont offert par hasard le même cadeau.

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

8- Un fermier du Texas rompt ses fiançailles ; le frère de la jeune-fille, voulant venger l'honneur de celle-ci, tire une balle en pleine tête de l'infidèle et le laisse pour mort. Mais, par miracle, la balle a traversé la joue de la victime et est allée s'enfoncer dans un arbre derrière elle... Vingt ans et l'oubli passent sur ce drame. Un jour, le fermier veut abattre l'arbre qui est devenu envahissant et il place une charge de dynamite. L'explosion fait jaillir la balle qui vole un instant et va se planter droit dans la tête de l'homme, le tuant net.

9- Deux sœurs jumelles sont séparées dès leur naissance. L'une grandit en Amérique et l'autre en France, sans jamais se connaître. Elles mènent toutes les deux une vie normale et tranquille. Elles découvrent 40 ans après qu'elles ont vécu la même vie : elles se sont mariées le même jour, elles ont eu deux filles, ces dernières sont presque nées en même temps...

10- La détermination du sexe à la naissance est un effet du hasard dû à la loterie de la course des spermatozoïdes vers l'ovule.

11- Comptine : "Pif, paf, pouf, pic et pic et colégram, ce sera toi qui..."

12- Un jeune homme arrive chez le marchand de journaux et décide, pour une fois, d'acheter un banco. Il gratte et il découvre qu'il vient de gagner la somme de 10000 F. Pour une fois qu'il joue à ce jeu, il gagne : quel hasard !

13- Deux frères sont nés le même jour à quelques années d'intervalle.

14- Quand un biologiste intervient sur le message d'ADN contenu dans les cellules des plantes et modifie le code génétique, il ne peut prévoir la couleur qu'auront les fleurs. Celle-ci résulte du hasard.

15- Les dates de notre naissance et de notre mort sont déterminées par le hasard.

16- En lançant un dé, j'obtiens 10 fois de suite le même chiffre.

17- C'est le hasard qui souvent frappe dans les accidents de voiture.

18- Ma meilleure amie est née le même jour que moi, dans la même clinique, et nous ne nous sommes connues que 5 ans plus tard, à l'école maternelle.

19- Après un accident de la route, je devais faire un constat à l'amiable avec l'autre conducteur. Mais je ne savais pas comment procéder et j'avais peur que celui-ci en profite pour m'imputer les torts. Heureusement, ce jour-là le hasard était avec moi : un policier avait vu toute la scène et se dirigeait vers nous.

20- Par hasard les chevaux gagnants au tiercé portaient les numéros 1, 2 et 3.

ANNEXE 2

Dans les vingt situations suivantes, il est question de hasard. Classez-les en fonction du type de hasard qu'elles mettent en jeu et essayez d'en déduire les différents sens de ce mot.

- 1- C'est le hasard qui m'a fait rencontrer ma petite amie.
- 2- Avant de commencer une partie de tennis de table, un joueur prend la balle dans une de ses mains et il dissimule celles-ci sous la table. C'est au hasard que l'autre joueur choisit la main pour savoir qui aura le service.
- 3- En préparant un examen, je fais l'impasse sur une partie du programme d'histoire. Par hasard, le sujet tombe sur la partie révisée.
- 4- Vacances d'hiver dans une station des Pyrénées. Malgré le mauvais temps, il y a énormément de monde. Au bas d'une piste, je tombe par hasard sur un camarade du lycée qui était également en vacances ici pour une semaine.
- 5- Courses dans un grand magasin. Il y avait des bulletins à remplir pour gagner des lots (voitures, voyages...). On remplit plusieurs bulletins au nom de membres de la famille. Mais en sortant du magasin, ma mère regrette de n'avoir pas fait de bulletin au nom de son ami et elle va réparer son oubli. Trois jours plus tard, coup de téléphone : le bulletin établi au nom de l'ami a gagné une Peugeot 106.
- 6- Jeu de dés, tirage du loto, distribution de cartes, pile ou face...
- 7- Un lundi matin, en allant au lycée, j'ai pris du retard à cause du mauvais état de la route. Je croyais arriver en retard, mais, comme par hasard, le cours n'a pas eu lieu car le professeur avait eu un accident.
- 8- Mes parents et moi étions partis en promenade, mais, pour diverses raisons, nous rentrâmes plus tôt que prévu. Quand nous arrivâmes à la maison, la cheminée était en feu et si le hasard n'avait pas raccourci notre promenade, la maison aurait été entièrement ravagée par l'incendie.
- 9- Durant un voyage en voiture, je m'endors et me mets à rêver qu'une Ferrari débouche à un carrefour sur notre droite. Quelques instants après, mon grand-père me réveille soudain pour me dire de regarder à l'arrière la voiture qui se prépare à nous doubler : une Ferrari !
- 10- Finale de la coupe du monde de football en 1986. Ma tante qui ne connaît rien au football a participé à un jeu de pronostic et proposé l'Argentine gagnante par 3 buts à 2. Plus tard, on regarde le match à la télé. Résultat au coup de sifflet final : 3 à 2 en faveur de l'Argentine...
- 11- La détermination du sexe à la naissance est un effet du hasard.
- 12- Mon voisin a gagné au loto bien qu'il y joue très rarement.
- 13- En première, c'est le hasard qui a voulu que j'aie le professeur de français que j'espérais.
- 14- C'est le hasard qui détermine l'issue d'une partie de poker, surtout quand je perds.
- 15- J'ai trouvé une pièce de 10F dans la rue.

QU'EST-CE QUE LE HASARD ?
COMMENT LE MATHÉMATISER ?

- 16- A un tirage au sort, je tire trois fois de suite le même numéro.
- 17- Parce que mon petit-neveu avait laissé traîner une bille par terre, mon frère est tombé et s'est cassé la jambe deux jours avant ses tests de sélection pour l'UFRAPS. A cause de cet accident stupide, il a dû faire d'autres études et renoncer à son projet professionnel.
- 18- A la Pentecôte, je suis allé à la plage avec mes parents. Là-bas nous avons rencontré mon oncle. Nous étions allés au même endroit sans le savoir.
- 19- J'ai un sosie que je ne connais pas mais que toutes les personnes qui me connaissent dans la région ont rencontré.
- 20- Le 6 juin 1944, Rommel était parti en Allemagne fêter l'anniversaire de sa femme. L'armée allemande s'est donc trouvée désemparée pour faire face au débarquement allié en Normandie. La réussite de l'opération et le sort de la guerre se sont ainsi décidés sur un hasard.

BIBLIOGRAPHIE

- DOSSIER POUR LA SCIENCE, *Le chaos*, janvier 1995.
- DOSSIER POUR LA SCIENCE, *Le hasard*, avril 1996.
- Hors série SCIENCES ET AVENIR, *Le hasard est-il prévisible ?*, juin 1996.
- BERGER, POMMEAU, DUBOIS-GANCE, *Des Rythmes au Chaos*, Odile Jacob, 1994.
- EKELAND, *Au Hasard*, Seuil, 1991.
 — *Le Chaos*, Dominos, Flammarion, 1995.
- GLEICK, *La Théorie du Chaos*, Champs Flammarion, 1991.
- HENRY, *L'enseignement des probabilités*, IREM de Besançon, 1994.
 — "Modélisation : le cas des probabilités", Actes de l'université d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont, 1996.
- IREM DE POITIERS, *Les fractales*, 1996.
 — *Hasard et Chaos*, à paraître, 1998.
- MARTIN, "Cournot", in IREM, *Les philosophes et les mathématiques*, Ellipses, 1996.
- NOËL et al., *Le Hasard aujourd'hui*, Points Sciences, 1991.
- STEWART, *Dieu joue-t-il aux dés*, Champs Flammarion, 1994.
- INTER-IREM, *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM "Statistiques et probabilités", 1997.
 — *Modélisation en probabilités*, Commission Inter-IREM "Statistiques et probabilités", 1997.
- POINCARÉ, *Science et méthode*, Flammarion, 1908.
 — *Cours de probabilités, 1912, rééd. Gabay.*