REPERES - IREM . N° 32 - juillet 1998

EXPÉRIMENTER, SIMULER EN CLASSE

Michèle GANDIT
Claire HELMSTETTER
IREM de Grenoble

A. OBJECTIFS EN PROBABILITÉS ET DIFFICULTÉS

"L'objectif est d'entraîner les élèves à décrire quelques expériences aléatoires simples et à calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois." (Programme 1991). Voilà en quelques mots, l'objectif fixé à cette introduction des probabilités au lycée. Essayons de cerner les difficultés inhérentes à ce chapitre.

Un élève de terminale donnait un jour son point de vue : "en probabilités, au début, c'est trop simple, pile ou face avec une pièce, les apparitions du six avec un dé, etc., et puis, tout d'un coup, on s'aperçoit qu'on n'y comprend plus rien". Ce témoignage ne suggère-t-il pas que le tremplin des situations trop simples n'est pas suffisant, et est peut-être même nuisible pour "débuter en probabilités" ?

"Je vais lancer une pièce, je pense qu'elle a la probabilité 1/2 de tomber sur pile", c'est l'entrée la plus courte possible en probabilités. Le professeur a l'impression d'emporter l'adhésion de toute la classe, parce que nous avons tous, dans cette situation, le même modèle naturel. Le premier conflit se présente lorsque le "modèle naturel" de l'élève et le "modèle mathématique" du professeur sont différents. C'est le cas dans la situation suivante : "on va lancer deux pièces : quelle est la probabilité d'avoir un "pile" et un "face" ? L'opposition se manifeste entre ceux qui répondent 1/3 et ceux qui répondent 1/2. Et, dans la classe, la question inévitable, et nécessaire, est posée : "comment savoir ce qui est vrai et ce qui est faux ?"

La réponse à cette question, posée à propos de "pile ou face" ou de tout autre chose, est longue, elle prend du temps puisqu'elle passe par la description de l'expérience, peut-être une simulation, sûrement par la prise de conscience de la modélisation, et ...la réflexion sur le vrai et le faux dans le cadre du modèle choisi.

Que comptons-nous qu'il reste chez nos élèves ? Peut-être simplement (mais ce n'est sûrement pas simple) le souvenir d'une démarche allant de la réalité au modèle et du modèle à la réalité, en passant par la simulation.

B. PERMETTRE AUX ÉLÈVES DE SE CONSTRUIRE UNE "INTUITION PROBABILISTE"

Pour entrer en probabilités, il faut prendre du temps. La situation simple évoquée ci-dessus, "je vais lancer une pièce, je pense qu'elle a la probabilité 1/2 de tomber sur pile", cache le passage de l'expérience réelle à l'acte de modélisation : l'étude statistique semble inutile et on ne voit pas l'intérêt de la probabilité.

Se construire "une intuition probabiliste" consisterait à associer mentalement à une situation aléatoire qu'on nous soumet, tout un parcours :

– comprendre en quoi la situation est aléatoire,
– voir quelle simulation pourrait aider à l'explorer,
– comprendre qu'on peut proposer un modèle pour penser cette situation et en trouver un,
– un événement étant extrait de cette situation, avoir un regard critique allant des fréquences empiriques obtenues (par réalisation de l'expérience aléatoire ou par simulation) aux probabilités calculées dans le modèle, relatives à cet événement.

Cette "intuition probabiliste", nous pensons qu'ils vont la construire et la développer en prenant en charge des phénomènes aléatoires, presque "du début à la fin", au travers d'expérimentations pratiques, de simulations, et que ceci va les aider à franchir le pas de la modélisation.

Supposons-nous face à un phénomène où il s'agit de modéliser comment le hasard intervient : par exemple, "le lapin". Voici la situation :

> Jean, Pierre et Paul sont des chasseurs d'adresse différente ; Jean touche sa cible 7 fois sur 10, Pierre, 5 fois sur 10 et Paul 1 fois sur 10. Ils tirent simultanément sur le même lapin. Quelle est la probabilité que le lapin soit touché par les trois chasseurs ?

Elle va nous permettre de présenter quatre aspects de la démarche, que nous avons adoptée avec les élèves, pour étudier un phénomène aléatoire.

1. Un premier aspect : nous réalisons matériellement une première simulation

Comment définir un protocole expérimental qui (sans lapin et sans fusil) recrée le même phénomène aléatoire : c'est un pas vers le modèle par une première simulation, que l'on peut réaliser pratiquement. Et nous pensons qu'il est indispensable de procéder au moins une fois matériellement à une expérimentation.

"Sachant que Jean touche sa cible 7 fois sur 10, il tire sur le lapin" peut être remplacé par : on tire au hasard une boule dans une première urne qui contient 10 boules indiscernables au toucher, 7 noires et 3 blanches. "Sachant que Pierre touche sa cible 5 fois sur 10, il tire sur le lapin" peut être remplacé par : on tire au hasard une boule dans une deuxième urne qui contient 10 boules indiscernables au toucher, 5 noires et 5 blanches. "Sachant que Paul touche sa cible 1 fois sur 10, il tire sur le lapin" peut être remplacé par : on tire au hasard une boule dans une troisième urne qui contient 10 boules indiscernables au toucher, 1 noire et 9 blanches. Le résultat du tir des trois chasseurs sur le lapin est donc le résultat du tirage d'une boule de chaque urne, constitué de la couleur de la boule tirée de la première urne, la couleur de la boule tirée de la deuxième urne et la couleur de la boule issue de la troisième urne. "Le lapin est touché par les trois chasseurs" est assimilé au tirage de trois boules noires. Cette réflexion sur le protocole expérimental amène peut-être un autre regard sur l'énoncé. Notons de plus qu'ici on suppose que les chasseurs n'ont aucune influence l'un sur l'autre, autrement dit que les tirages dans chacune des urnes sont indépendants.

Mais nous n'avons ni urnes, ni boules ! Alors on peut remplacer les boules par des petits papiers et les trois urnes par trois sacs : une boule noire devient alors un papier portant la marque "Touché" et une boule blanche un papier portant la marque "Manqué".

Par l'intermédiaire de cette expérience aléatoire, nous avons avancé dans la réponse à la question posée dans "le lapin" : la réflexion relative au protocole expérimental nous a presque conduits au choix du modèle. Et c'est bien au travers de la discussion qui entoure la mise au point de ce protocole que les élèves sont pleinement confrontés à ce qu'est une expérience aléatoire, comment le hasard intervient.

2. Un deuxième aspect : nous simulons avec une table de nombres au hasard, une calculatrice ou un ordinateur

Certes lorsque nous tirons un papier dans chacun de nos trois sacs, nous procédons déjà à une simulation. Mais celle-ci est réalisée pratiquement. Nous voulons maintenant évoquer une simulation où le matériel utilisé est peut-être moins représentatif pour les élèves de ce qui se passe "en réalité" : il s'agit de tables de nombres au hasard, de calculatrices ou encore d'ordinateurs. Il est certain que beaucoup d'élèves croient mieux voir ce qui se passe lorsqu'ils tirent des papiers que lorsqu'ils font afficher des nombres pseudo-aléatoires à leur calculatrice. Il nous semble néanmoins important de les entraîner à ce type de simulation, et ceci pour au moins deux raisons.

a) Formalisation de l'expérience aléatoire

Entreprendre une démarche de simulation nécessite une réflexion approfondie sur la façon dont le hasard intervient puisqu'il s'agit, ou bien de programmer sa calculatrice ou son ordinateur, ou bien de définir un protocole d'utilisation de sa table de nombres au hasard.

Pour simuler le "lapin" avec ma calculatrice,

* comment vais-je coder le résultat du tir d'un chasseur ? Par exemple, 1 pour "touché" et 0 pour "manqué".
* Comment vais-je coder le résultat du tir simultané des trois chasseurs ? Par exemple, par un triplet, la première composante du triplet étant par exemple attribuée à Jean, la deuxième à Pierre et la troisième à Paul.
* Comment vais-je faire intervenir le hasard dans le tir de chaque chasseur ? Par exemple, pour la première composante du triplet, qui représente Jean, je dois faire en sorte que la probabilité qu'elle prenne la valeur 1 soit de 0,7.

Ainsi le codage permet la transposition : "Jean touche sa cible 7 fois sur 10" est transposé de la manière suivante. La fonction *rand* prend des valeurs uniformément réparties sur [0,1[, il y a donc 7 chances sur 10 que *rand* donne un nombre inférieur à 0,7 et 3 chances sur 10 que *rand* donne un nombre supérieur à 0,7 ; d'où l'instruction : "si rand < 0,7, alors le résultat de Jean est 1, sinon, le résultat de Jean est 0".

Voici un programme que l'on peut écrire pour une calculatrice TI 92.

```
Prgm(n)
newList(3) → r          Dans la liste r, on
                        place le résultat
                        des trois chasseurs.
For i, 1, n
Fill 0, r
If rand() < 0,7 Then
1→r[1]                  Jean a touché le lapin
EndIf
If rand() < 0,5 Then
1 → r[2]                Pierre a touché le lapin
EndIf
If rand() < 0,1 Then
1 → r[3]                Paul a touché le lapin
EndIf
Disp r                  Affichage du résultat
                        des trois chasseurs.
EndFor
EndPrgm
```

Quel genre de résultats obtient-on ?

(1, 0, 0)
(0, 0, 1)
(0, 1, 1)
(0, 1, 0)
(1, 1, 1)...

Au cours de cette démarche, il peut apparaître que des possibilités sont oubliées, que certaines sont distinguées inutilement, que le codage des résultats possibles est inadapté à l'expérience. Simuler permet donc d'approfondir le modèle que l'on va utiliser.

b) Rassembler un grand nombre de résultats

La simulation, à la calculatrice ou à l'ordinateur notamment, permet d'obtenir en peu de temps un grand, voire très grand, nombre de résultats expérimentaux. Pour le lapin, on modifie le programme pour comptabiliser le nombre de fois où l'on obtient le triplet (1, 1, 1) (et ne pas afficher tous les triplets). Mais reste à apprendre à exploiter ces résultats, qui peuvent illustrer la loi empirique de stabilisation des fréquences (dont nous parlons dans la suite).

3. Un troisième aspect : nous faisons prendre conscience aux élèves de l'acte de modélisation

Voici un énoncé tiré des annales du baccalauréat.

> Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : une noire, une noire, une noire, une blanche.

Pas d'allusion à un ou des exemples, pas d'allusion à l'ensemble des résultats possibles.

Imaginons un de nos élèves devant cet énoncé : il est confronté à une expérience aléatoire qu'il cerne à peine et on lui demande la probabilité d'un événement E.

Il nous semble que les élèves de terminale ont à apprendre à déterminer l'univers, puis la loi de probabilité sur cet univers. De quel apprentissage s'agit-il exactement ?

Reprenons l'exemple du lapin.

Quelle démarche souhaitons-nous le voir entreprendre ?

Tout d'abord, qu'il se demande quel est un résultat possible de cette expérience, qu'il en donne un exemple, d'abord sous la forme : le lapin est touché par Jean, par Pierre et pas par Paul. Qu'il se donne ensuite un autre résultat possible : le lapin n'est pas touché par Jean, mais il est touché par Pierre et par Paul. Qu'il se demande quel codage il peut utiliser pour représenter ces deux résultats possibles : qu'il pense ainsi à attribuer un code pour "le lapin est touché par un chasseur", par exemple T, et pour "le lapin n'est pas touché par un chasseur", par exemple N, ensuite, un code pour différencier les chasseurs. Qu'il parvienne donc ainsi à (T, T, N) pour le premier résultat possible et à (N, T, T) pour le deuxième.

L'énoncé demandant la probabilité de l'événement E, "le lapin est touché par les trois chasseurs", qu'il reconnaisse que E n'est constitué que de l'éventualité (T, T, T).

Qu'il se demande comment modéliser l'intervention du hasard : quelles sont les chances d'obtenir (T, T, T) ?

Autrement dit, nous souhaitons le voir **se poser la question du choix du modèle** de probabilité dans lequel il est en train de faire ses calculs.

Aussi souhaitons-nous voir disparaître des épreuves du baccalauréat tous ces sujets où il n'est fait référence à aucun acte de modélisation, et, plus encore, ceux qui utilisent les résultats d'une enquête statistique avec le statut d'un modèle de probabilité, sans le dire.

4. Un quatrième aspect : nous faisons le lien entre résultats empiriques et théorie des probabilités

Le programme officiel des classes de première rappelé ci-dessus fait allusion à la passerelle entre expérimentation et théorie des probabilités, les résultats de la première étant modélisés par des éléments de la seconde. Mais cette passerelle ne se franchit pas que dans un seul sens. Etant donnée une expérience aléatoire, faisant appel à un certain univers Ω, il n'est pas toujours possible de trouver une loi de probabilité connue qui permette de modéliser le phénomène aléatoire en question : c'est à ce moment-là que "la loi empirique de stabilisation des fréquences dans des échantillons statistiques" permet d'évaluer la loi de probabilité inconnue. Et c'est bien dans ce sens que le programme officiel demande à franchir la passerelle puisqu'un élève qui arrive en classe de première n'a aucune idée de ce qu'est une loi de probabilité.

Lorsque l'on répète n fois une expérience aléatoire, de manière identique et indépendante pour tester à chaque répétition la réalisation d'un certain événement et que l'on calcule la fréquence, notée f_n, de réalisation de cet événement au cours des n répétitions de l'expérience, on remarque expérimentalement que, plus n augmente, plus f_n se stabilise : **c'est ce résultat tiré de l'expérience que l'on appelle la loi empirique de stabilisation des fréquences. Une explication en est donnée dans la théorie des probabilités par le théorème (que l'on appelle souvent "loi") des grands nombres.** Il n'est évidemment pas question de démontrer ce théorème en classe de lycée, mais il nous semble utile de faire sentir qu'il y a, d'un côté, des résultats empiriques qui, comme en physique, obéissent à une certaine loi, et, d'un autre côté, une théorie mathématique qui permet de modéliser l'expérience.

Et pour en rester au niveau du lycée, nous estimons important d'apprendre à nos élèves à avoir un regard critique sur les résultats d'une expérimentation, d'une part, et sur le calcul d'une probabilité, d'autre part : c'est une démarche indispensable dans la construction de ce que nous appelons "l'intuition probabiliste".

Nous venons de présenter quatre aspects de notre démarche en probabilités, mais nous ne voulons pas dire qu'ils doivent être tous abordés lorsque l'on étudie un phénomène aléatoire : certaines situations s'abordent plus facilement sous un certain angle que sous un autre.

C. DEUX ACTIVITÉS D'INTRODUCTION EXPÉRIMENTÉES EN CLASSE

Notre objectif étant que les élèves se construisent peu à peu cette intuition probabiliste, nous avons choisi de consacrer du temps, même en terminale S, à l'introduction du concept de probabilité, en y abordant l'expérimentation, la simulation, la loi empirique de stabilisation des fréquences, la modélisation.

Deux années consécutives, nous avons expérimenté deux introductions différentes du chapitre des probabilités dans des classes de terminale S, première L (spécialité maths ou non) : "Lancer d'une pièce sur un quadrillage" et "Le loto". Elles procèdent toutes les deux de la même démarche décrite dans le paragraphe B précédent, mais avec des différences au niveau du protocole expérimental, de la capacité des élèves à la modélisation et à la simulation.

1. Une expérience en classe : le loto

Il s'agit du loto national, ou presque ! Nous avons choisi ce thème parce qu'il nous semblait assez accrocheur pour nos élèves. Nous avons mené en classe deux expérimentations différentes. Voici le détail de l'une d'elles.

a) Le problème posé aux élèves

Un joueur choisit 6 nombres distincts dans l'ensemble des 49 entiers compris entre 1 et 49. La "Française des jeux" choisit au hasard 6 nombres distincts dans l'ensemble des 49 entiers compris entre 1 et 49. Quelles sont les chances pour le joueur d'avoir 0, ou 1,ou 2, ou..., ou 6 bons numéros ?

b) Une remarque préliminaire

Tout joueur de loto ne choisit pas nécessairement au hasard sa combinaison. Or nous ne sommes capables ni de faire une expérimentation où il soit tenu compte de la façon qu'a chaque joueur de choisir ses numéros, ni évidemment de construire un modèle tenant compte de cette complexité. Or, compte tenu de l'indépendance des tirages "Française des jeux" et "joueur", c'est le même modèle qui convient pour traduire les situations suivantes :

- les numéros du joueur et de la "Française des jeux" sont tirés au hasard,
- les numéros de la "Française des jeux" sont tirés au hasard et ceux du joueur ne sont pas choisis au hasard,
- les numéros du joueur sont tirés au hasard et ceux de la "Française des jeux" ne sont pas choisis au hasard.

c) Le protocole expérimental

Les élèves de la classe sont partagés en groupes de trois ou quatre. On simule de nombreux tirages : d'une part, dans plusieurs groupes en parallèle, d'autre part, successivement dans chaque groupe. Dans chaque groupe, un élève joue le rôle de la "Française des jeux", les autres celui de joueur. On peut d'ailleurs faire tourner dans le groupe le rôle de la "Française des jeux", pour que chaque joueur puisse jouer ce rôle privilégié. Il consiste à choisir une combinaison gagnante en utilisant une table (1) de nombres au hasard. Pour ce faire, l'élève choisit les six nombres de la combinaison gagnante dans la table. S'il trouve un nombre déjà rencontré dans cette combinaison ou strictement supérieur à 49, il le rejette (2) et considère le suivant. Il prend donc ses six nombres distincts entre 1 et 49 en suivant une ligne de la table. Chaque joueur compare la combinaison qu'il a choisie avec la combinaison dite "gagnante" et remplit un tableau tel que celui-ci :

Nombre de bons numéros	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de parties	5	4	1	0	0	0	0

Au bout de quarante minutes environ, le bilan est fait dans la classe. Sur 394 parties, on a obtenu les résultats résumés dans le tableau 2 *(page suivante)*.

d) La modélisation

Comment modéliser ? La description du protocole expérimental nous aide beaucoup

(1) Voir la table utilisée en fin d'article.

(2) Cette méthode de rejet ne change pas la "qualité" du tirage.

nombres de bons numéros	0	1	2	3	4	5	6
nombres de parties	143	173	66	9	3	0	0
fréquences	0,3629	0,4391	0,1695	0,0223	0,0076	0	0

Tableau 2

dans ce domaine. Pour les élèves, l'univers (mot que la plupart d'entre eux entendent pour la première fois) est devenu presque concret.

Nous choisissons d'associer en effet à l'expérience aléatoire (et nous insistons auprès des élèves sur l'acte de modélisation) :

– un ensemble Ω, celui de toutes les combinaisons possibles de 6 éléments choisis parmi les entiers de 1 à 49 : il y en a C_{49}^6 ;

– une mesure sur Ω permettant d'évaluer les chances qu'un élément ω de Ω soit choisi suivant le protocole décrit ; cette mesure est équirépartie sur Ω, c'est la fonction de Ω dans $[0,1]$, qui à chaque élément de Ω associe $\frac{1}{C_{49}^6}$, que l'on a appelée la probabilité équirépartie sur Ω ou encore l'équiprobabilité sur Ω.

Supposons fixée une combinaison C de 6 numéros (qui correspond au choix d'un joueur). Combien a-t-on de combinaisons de 6 numéros ayant k (compris entre 0 et 6) numéros en commun avec C ? On retrouve un problème de dénombrement : il y en a $\frac{1}{C_6^k} \times \frac{1}{C_{43}^{6-k}}$. On évalue alors la probabilité pour C d'avoir k bons numéros par $\frac{1}{C_6^k} \times \frac{1}{C_{43}^{6-k}} \times \frac{1}{C_{49}^6}$.

On obtient donc dans ce modèle :

nombre k de bons numéros	probabilité d'avoir k bons numéros
0	0,43596 à 10^{-5} près
1	0,413019 à 10^{-6} près
2	0,132378 à 10^{-6} près
3	0,017650 à 10^{-6} près
4	0,0009686 à 10^{-7} près
5	1,844 989 95 10^{-5} à 10^{-13} près
6	7,15 10^{-8} à 10^{-10} près

Tableau 3

Evidemment, on remarque que les fréquences empiriques et les probabilités "collent" assez bien tant que l'on regarde 0, 1, 2 ou 3 bons numéros, mais pour les autres ?

e) Nous simulons alors sur ordinateur

Voici *(page suivante)* ce que nous avons obtenu.

On fait remarquer aux élèves que les fréquences empiriques sont d'autant plus proches des probabilités calculées dans le modèle que le nombre de jeux est grand. "Avoir 6 bons numéros" est un événement très rare, ce qui explique l'écart entre la fréquence empirique nulle de cet événement et la probabilité de $7,15 \times 10^{-8}$ à 10^{-10} près. Et il faut attendre environ cent mille parties pour obtenir une fréquence différente de 0 pour l'événement "avoir au moins 2 bons numéros".

Pour 1 000 parties :

valeurs de k	0	1	2	3	4	5	6
nombre de tirages ayant k bons numéros	440	409	135	14	2	0	0
fréquence correspondante	0,44	0,409	0,135	0,014	0,002	0	0

Pour 10 000 parties :

valeurs de k	0	1	2	3	4	5	6
nombre de tirages ayant k bons numéros	4332	4119	1360	181	8	0	0
fréquence correspondante	0,4332	0,4119	0,136	0,0181	0,0008	0	0

Pour 100 000 parties :

valeurs de k	0	1	2	3	4	5	6
nombre de tirages ayant k bons numéros	43831	41035	13247	1796	89	2	0

Pour 1 000 000 parties :

valeurs de k	0	1	2	3	4	5	6
nombre de tirages ayant k bons numéros	436127	413081	132117	17693	965	17	0

Pour 10 000 000 parties :

valeurs de k	0	1	2	3	4	5	6
nombre de tirages ayant k bons numéros	4359136	4129863	1324282	176622	9889	208	0

f) Une variante

Au lieu de demander les chances d'avoir k bons numéros pour k = 0, 1, ... , 6, on demande de calculer les chances d'avoir au moins 4 bons numéros. L'expérimentation en classe se déroule à peu près de la même façon que ci-dessus. Sur un total de 280 parties, la fréquence empirique obtenue pour l'événement "avoir au moins 4 bons numéros" est de $\frac{4}{280}$, soit 0,014 à 10^{-3} près, alors que le modèle nous donne une probabilité de 0,001 à 10^{-3} près : on ne peut rien conclure. Nous avons alors recours à la simulation sur ordinateur comme ci-dessus : le dernier groupe de résultats (sur dix millions de parties) nous donne une fréquence empirique de 0,001 009 7.

g) Un bilan

Nous sommes prêtes à recommencer cette expérimentation en classe, d'abord, pour les raisons que nous avons évoquées dans le paragraphe B ci-dessus, ensuite, parce que nous avons noté l'intérêt porté par les élèves pour cette activité, enfin, parce qu'elle nous permet un aller-retour de l'expérience à la modélisation grâce aux deux types de simulations que nous avons introduits.

Nous remplacerons peut-être l'utilisation de la table de nombres aléatoires par celle de la calculatrice pour générer des nombres pseudo-aléatoires. Nous redéfinirons sûrement le protocole d'utilisation de cette table : nous distribuerons à tous les élèves "Française des jeux" une partie différente d'une table de nombres aléatoires, de façon à obtenir des tirages indépendants d'une "Française des jeux" à l'autre ; et chacun devra se fixer un point de départ et un sens de parcours de sa table.

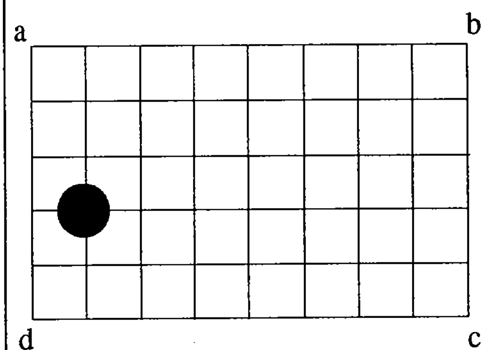
Nous insisterons davantage auprès des élèves sur le fait qu'il revient au même de tirer au hasard, d'une part, des combinaisons gagnantes, d'autre part, des combinaisons de joueurs, et de les comparer, que de jouer au loto national, même si chaque joueur joue comme il lui plaît. "Il revient au même" signifie que nous obtenons deux expériences qui relèvent du même modèle de probabilité. Il reviendrait aussi au même de considérer que la combinaison gagnante est 1, 2, 3, 4, 5, 6 et de faire jouer les élèves avec une table de nombres au hasard (ce protocole expérimental est cependant beaucoup moins attrayant pour les élèves).

2. Une autre expérimentation en classe : le lancer d'une pièce sur un quadrillage

Il s'agit d'une activité d'un autre genre, que nous avons expérimentée dans quelques classes de première et terminale, littéraires ou scientifiques, durant les années scolaires 94-95 et 95-96. Elle a été conçue d'après un exercice que nous avons trouvé dans le manuel de première ES édité par Nathan en 1993 : "Sur un sol recouvert uniformément de carreaux, on fait glisser au hasard un palet ayant la forme d'un disque..."

a) Voici l'énoncé proposé aux élèves

Voici une feuille de papier quadrillé : il s'agit d'une feuille de format A3 sur laquelle nous avons tracé un rectangle contenant 40 carrés de 5 cm de côté. Au dessus du quadrillage, on lance au hasard une pièce de 10 centimes. A combien estimez-vous les chances qu'a la pièce de couper le quadrillage ?



b) L'expérimentation en classe

Chaque groupe de deux élèves possède une pièce de 10 centimes et une feuille quadrillée. L'un des élèves lance au hasard la pièce, l'autre note si la pièce coupe ou non le quadrillage, en codant 1 si la pièce touche une ligne au moins et 0 sinon. Les élèves sont libres d'échanger ou non leurs rôles au cours de l'expérimentation. De plus, il est précisé que :

– si la pièce tombe en dehors de la feuille, le lancer est refait [3] (le secrétaire ne note ni 0, ni 1) ;

(3) Il s'agit d'une méthode de rejet : on démontre que cela ne change pas les résultats.

– si la pièce se retrouve tangente à une ligne, on considère qu'elle coupe la ligne (le secrétaire note 1) ;
– si l'on a des doutes, on annule le lancer.

Chaque équipe procède à 8 séries de 20 lancers, calcule les fréquences cumulées de l'événement codé 1 “la pièce coupe le quadrillage” et les reporte sur un diagramme comportant en abscisse le nombre de lancers (20, 40, ... , 160) et en ordonnée les fréquences cumulées correspondantes.

Le tableau ci-dessous présente un exemple de bilan obtenu : 16 groupes de deux élèves ont retenu 8 × 20, c'est-à-dire 160 lancers de la pièce au-dessus du quadrillage. Au niveau de la classe, on a ainsi obtenu 16 × 160, soit 2560 lancers retenus. Parmi ceux-ci, la pièce a coupé le quadrillage 1604 fois, d'où le calcul de la fréquence de l'événement codé 1 : $\frac{1604}{2560}$, soit 0,627 à 10^{-3} près.

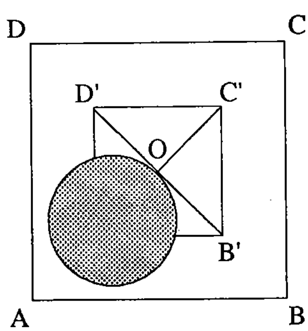
On trace ensuite un autre diagramme de fréquences pour toute la classe. En abscisse figure le nombre de lancers, de 160 à 2560, l'axe étant gradué tous les 160, en ordonnée figure la fréquence calculée sur 160, puis 320, puis... : le premier élève donne en effet sa fréquence sur 160 lancers, le deuxième la fréquence portant sur ses 160 lancers et ceux de son prédécesseur, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les élèves de la classe aient contribué au calcul de la fréquence, portant finalement sur les 2560 lancers.

Séries de 20 lancers	Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6	Série 7	Série 8	Total	Total Cl	Fréq. (%)	Fréq. cl (%)
Groupe A	10	17	11	17	11	11	16	10	103	103	64,4	64,4
Groupe B	12	10	12	10	10	11	10	12	87	190	54,4	59,4
Groupe C	10	13	11	16	12	17	11	16	106	296	63,3	61,7
Groupe D	14	12	12	9	14	12	12	12	97	393	60,6	61,4
Groupe E	13	9	7	11	12	17	10	13	92	485	57,5	60,6
Groupe F	12	18	12	16	8	13	12	10	101	586	63,1	61
Groupe G	11	13	14	12	12	11	12	13	98	684	61,3	61,1
Groupe H	14	13	11	13	12	11	8	14	96	780	60	60,9
Groupe I	16	15	14	14	13	11	12	12	107	887	66,9	61,6
Groupe J	13	14	12	14	11	17	16	14	111	998	69,4	62,4
Groupe K	13	7	16	14	12	18	13	15	108	1106	67,5	62,8
Groupe L	11	11	14	12	12	13	9	10	92	1198	57,5	62,4
Groupe M	8	12	12	12	14	12	13	16	99	1297	61,9	62,4
Groupe N	13	14	13	15	12	15	11	14	107	1404	66,9	62,2
Groupe O	13	13	11	12	12	11	12	13	97	1501	60,6	62,5
Groupe P	7	15	13	13	13	12	14	14	103	1604	64,4	62,7

c) La modélisation

Le graphique permet de visualiser la loi empirique de stabilisation des fréquences. Mais attention, **la fréquence empirique n'est pas la probabilité.** Le passage de l'une à l'autre s'opère par l'acte de modélisation. Avec les élèves, on fait apparaître que le modèle résulte d'un choix destiné à simplifier la réalité. On peut évidemment remettre ce choix en question s'il s'avère que ce qu'il permet de prévoir grâce aux calculs ne correspond pas à ce que l'on constate expérimentalement. On décide avec les élèves de considérer un modèle de probabilité où il n'y a que deux éventualités : "la pièce coupe le quadrillage" et "la pièce ne coupe pas le quadrillage", que leurs probabilités sont respectivement 0,627 et 0,373. Ce bilan s'arrête ici dans les classes de sections littéraires.

Il arrive que certains élèves, plus curieux ou plus rapides, demandent à aller plus loin dans l'explicitation d'un modèle ; on peut alors faire sentir, par exemple, un modèle fondé sur un univers infini où la probabilté est uniformément répartie et possède une densité : la probabilité de l'événement, noté $\overline{C}$, "la pièce ne coupe pas le quadrillage" dépend de la longueur des côtés des carreaux, notée h, et du rayon de la pièce, noté r.



Pour que la pièce ne coupe pas le quadrillage, il faut, et il suffit que son centre se situe dans la réunion de tous les carrés comme A'B'C'D', contenu dans ABCD qui est l'un des carreaux de 5 cm de côté du quadrillage, la distance entre les côtés [BC] et [B'C'] étant égale au rayon de la pièce, de même que la distance entre [CD] et [C'D'], que la distance entre [DA] et [D'A'], que la distance entre [AB] et [A'B'].

La probabilité de $\overline{C}$ peut se calculer sur un carreau : elle est égale au rapport de l'aire du carré A'B'C'D' à l'aire du carré ABCD, soit ici pour h = 50 et 2 r = 20, $\frac{(h-2r)^2}{h^2} = \frac{(50-20)^2}{50^2} = 0{,}36$.

La probabilité de l'événement "la pièce coupe le quadrillage" est alors de 0,64.

d) Bilan

Même si l'on parvient jusqu'à ce calcul dans certaines classes, nous ne pouvons aller plus loin sur le plan de la confrontation entre le modèle et la réalité. Des questions se posent, **que l'on n'écarte pas**, tout en précisant aux élèves qu'elles font appel à des notions qui sont en dehors du programme :

– La fréquence empirique et la probabilité calculée dans le modèle choisi sont différentes :

> * *cette différence est-elle acceptable compte tenu des erreurs expérimentales ?*
> * *Une autre expérimentation aurait sans doute donné lieu à une autre fréquence empirique. Jusqu'où peut-on aller dans l'écart entre fréquence empirique et probabilité pour remettre*

en question le choix du modèle ou l'expérimentation ?

– Le protocole expérimental est-il adapté au problème de départ ?

** Quelle est l'influence des rejets de certains lancers sur les résultats expérimentaux ?*
** Le problème des bords extérieurs : le modèle repose sur le plan (infini), or la feuille quadrillée a des contours parfaitement déterminés. Dans certaines classes, on a fait la convention suivante : désignant par abcd le rectangle quadrillé, si la pièce touche [ab] ou [ad], on dit qu'elle coupe le quadrillage, si elle touche [cd] ou [cb], on dit qu'elle ne coupe pas le quadrillage. De cette façon, on identifie [ab] à [cd] et [ad] à [bc]. Mais on peut adopter d'autres protocoles.*
** Les résultats dépendent-ils de la façon de lancer des lanceurs ?...*

3. Conclusion

Le principal avantage de l'activité "Lancer d'une pièce sur un quadrillage" par rapport au "Loto", c'est, d'une part, qu'on sort du champ des jeux de hasard, d'autre part, que la modélisation n'est pas basée sur le dénombrement. Toutefois l'univers est infini et la probabilité associée est absolument continue, il ne s'agit donc pas d'avoir des exigences auprès des élèves dans ce domaine.

Au travers de ces deux activités, nous avons voulu montrer aux lycéens un champ plus vaste que celui où se placent habituellement les problèmes posés au baccalauréat, faire ressortir certaines questions qui restent sans réponse au lycée, faire sentir certaines difficultés. Nous pensons en effet que c'est ainsi qu'ils vont pouvoir alimenter leur "intuition probabiliste".

D. ÉVALUATION EN PROBABILITÉ

Depuis sept ans qu'est apparu le changement de point de vue dans l'introduction de la notion de probabilité, nous avons vu certains sujets posés au baccalauréat partir de résultats d'une étude statistique. Hélas, les pourcentages qui y figurent prennent, sans transition et sans référence à aucune modélisation, le statut de probabilités. En voici un exemple, "4% des disquettes fabriquées sont défectueuses ; l'unité de contrôle, qui trie les disquettes en "marquées", "démarquées" ou "défectueuses", rejette 3% des bonnes disquettes et 95% des disquettes défectueuses ; quelle est la probabilité qu'une disquette soit défectueuse et acceptée" (bac 94). Presque tous les sujets posés jusqu'à maintenant au baccalauréat évacuent la difficulté liée à l'acte de modélisation, aucun n'interroge sur la simulation. La plupart du temps, on évalue seulement, à grands renforts de dénombrement, l'activité mathématique développée à l'intérieur d'un modèle. Aussi, en classe, ne tient-on pratiquement pas compte de la consigne du programme : "on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques".

Dans le cadre que nous avons choisi pour les probabilités, nous nous sommes posé ce délicat problème de l'évaluation : connaissant son impact dans le processus d'apprentissage, nous avons tenté de construire des exercices correspondant à la démarche développée dans ce qui précède, au lieu d'exercices enfermés dans un modèle, peu ou pas explicité.

Bien sûr, nous avons dû distinguer les sujets d'exercices faits à la maison, discutés en classe et ceux que l'on pose au baccalauréat. On ne peut pas, dans une épreuve d'examen, demander au candidat : "comparer les fréquences obtenues dans la simulation aux probabilités calculées", mais on peut parler de simulation.

1. Un devoir à la maison

Voici un énoncé où l'on mêle résultats empiriques et calculs de probabilité.

I - On a simulé 100 tirages de loto. Voici les résulats obtenus (ci-dessous).
Quelle est la fréquence des événements A et B suivants :

A : "un même numéro sort lors de deux tirages successifs",

B : "les six numéros d'un même tirage se terminent par des chiffres différents" ?

II - Un tirage de loto est un tirage au hasard et sans remise de 6 nombres compris entre 1 et 49.

Quelle est la probabilité de l'événement A ? Quelle est la probabilité de l'événement B ?

III - Comparaison entre fréquence et probabilité : quelles observations faites-vous ?

1/17/ 2/ 18/ 11/ 27	10/ 35/ 47/ 14/ 22/6	35/ 28/ 3/ 9/ 40/ 34	38/ 41/ 48/ 11/ 21/ 47
42/ 46/ 40/ 23/ 30/ 33	30/ 27/ 36/ 6/ 20/ 33	24/ 25/ 28/ 17/ 43/ 13	9/ 21/ 35/ 27/ 32/ 31
1/ 39/ 14/ 23/ 19/ 29	30/ 14/ 9/ 40/ 15/ 17	21/ 12/ 3/ 25/ 49/ 1	21/ 4 /13/ 48/ 18/ 20
10/ 11/ 13/ 38/ 44/ 45	37/ 23/ 27/ 2 /7/ 24	30/ 13/ 6/ 35/ 32/ 44	43/ 3/ 28/ 26/ 31/ 38
13/ 11/ 12/ 17/ 28/ 7	31/ 2/ 47/ 11/ 40/ 36	36/ 28/ 29/ 9/ 17/ 43	41/ 31/ 47/ 49/ 37/ 25
15/ 36/ 32/ 25/ 9/ 28	19/ 38/ 20/ 32/ 7/ 8	17/ 46/ 33/ 32/ 35/ 36	49/ 21/ 28/ 19/ 1/ 47
23/ 12/ 27/ 25/ 31/ 35	29/ 39/ 22/ 1/ 41/ 36	49/ 23/ 18/ 47/ 32/ 28	35/ 11/ 16/ 45/ 4/ 47
31/ 5/ 42/ 36/ 34/ 46	25/ 15/ 34/ 16/ 18/ 38	48/ 46/ 12/ 21/ 45/ 17	44/ 8/ 16/ 31/ 47/ 14
5/ 48/ 13/ 11/ 26/ 44	45/ 13/ 31/ 44/ 33/ 5	26/ 41/ 42/ 37/ 31/ 27	48/ 49/ 4/ 18/ 36/ 5
34/ 17/ 6 /19 /13 /25	1/ 49/ 5/ 13/ 27/ 21	11/ 23/ 8/ 21/ 1/ 9	6/ 21/ 47/ 3/ 19/ 1
32/ 28/ 4/ 5/ 9/ 10	10/ 14/ 18/ 2/ 37/ 8	43/ 1/ 12/ 45/ 36/ 39	43/ 30/ 15/ 48/ 29/ 32
29/ 33/ 16/ 11/ 49/ 4	9/ 27/ 42/ 6/ 19/ 10	46/ 24/ 20/ 5/ 32/ 18	13/ 47/ 7/ 29/ 39/ 27
24/ 8/ 31/ 43/ 32/ 45	48/ 19/ 22/ 12/ 2/ 11	34/ 33/ 28/ 47/ 49/ 10	2/ 30/ 38/ 27/ 3/ 17
44/ 47/ 3/ 41/ 17/ 20	29/ 42/ 25/ 15/ 39/ 45	43/ 34/ 6/ 30/ 20/ 39	42/ 20/ 25/ 45/ 35/ 32
2/ 32/ 36/ 19/ 40/ 28	4/ 40/ 30/ 47/ 39/ 6	35/ 45/ 5/ 8/ 4/ 34	20/ 13/ 25/ 45/ 35/ 32
14/ 16/ 12/ 38/ 8/ 15	40/ 31/ 5/ 48/ 28/ 18	21/ 46/ 2/ 25/ 43/ 18	43/ 33/ 17/ 2/ 20/ 40
5/ 21/ 46/ 42/ 49/ 26	37/ 36/ 49/ 5/ 23/ 15	46/ 26/ 49/ 30/ 27/ 7	26/ 19/ 35/ 33/ 12/ 28
22/ 17/ 4/ 48/ 32/ 46	42/ 43/ 25/ 4/ 44/ 10	35/ 11/ 18/ 43/ 9/ 28	26/ 31/ 24/ 12/ 13/ 22
42/ 14/ 39/ 26/ 35/ 22	13/ 8/ 33/ 24/ 42/ 16	5/ 11/ 45/ 48/ 41/ 19	23/ 37/ 22/ 20/ 5/ 46
44/ 19/ 9/ 17/ 4/ 30	7/ 47/ 36/ 15/ 32/ 9	29/ 31/ 44/ 20/ 49/ 12	30/ 32/ 9/ 39/ 23/ 47
19/ 37/ 46/ 14/ 32/ 17	20/ 26/ 42/ 31/ 15/ 27	24/ 32/ 7/ 36/ 43/ 29	14/ 3/ 16/ 21/ 46/ 15
17/ 31/ 22/ 3/ 25/ 1	10/ 2/ 34/ 13/ 39/ 25	4/ 14/ 46/ 18/ 29/ 10	46/ 47/ 37/ 44/ 15/ 11
17/ 22/ 43/ 11/ 49/ 46	5/ 46/ 11/ 45/ 9/ 40	49/ 7/ 28/ 38/ 33/ 14	1/ 31/ 45/ 13/ 23/ 34
45/ 36/ 12/ 9/ 4/ 14	23/ 30/ 9/ 7/ 48/ 2	30/ 12/ 11/ 33/ 10/ 25	49/ 13/ 36/ 19/ 2/ 16
8/ 3/ 24/ 36/ 42/ 5	22/ 43/ 24/ 26/ 28/ 4	30/ 48/ 5/ 18/ 21/ 11	29/ 12/ 8/ 39/ 41/ 1

Le tableau des 100 résultats aide celui qui cherche ces probabilités, à comprendre de quoi il est question, donc l'aide à modéliser.

Sur environ 100 expériences, on peut s'attendre à une précision de 0,1 , c'est-à-dire une distance inférieure à 0,1 entre fréquence et probabilité. Donc, satisfaction de celui qui trouve :

p(B) = 0,23 et f(B) = 0,25

et embarras de celui qui trouve

p(A) = 0,56 et f(A) = 0,76

La proximité de f (B) et p(B) ne prouve pas que le calcul de la probabilité soit juste, l'écart entre f (A) et p(A) ne prouve pas non plus que le calcul de cette probabilité soit faux. Il incite à faire une autre simulation sur une centaine d'expériences ou une simulation portant sur plus d'expériences : soit programmer le loto sur sa calculatrice, soit attendre d'un ordinateur de bonne volonté une simulation plus rapide et portant sur un plus grand nombre d'expériences. Une distance importante entre probabilité et fréquence qui se confirme dans plusieurs simulations doit inciter à remettre en question le calcul de la probabilité ou la modélisation.

Citation d'un élève : "La fréquence et la probabilité sont différentes. Ceci doit être dû au hasard et peut-être à une erreur de comptage". C'est une analyse juste, mais incomplète, puisque le calcul de la probabilité pourrait être aussi remis en question. En effet :

– on peut se tromper en comptant,
– on peut se tromper dans le choix du modèle ou dans le calcul de la probabilité,
– un événement rare peut toujours se produire, il n'est pas impossible que la fréquence expérimentale soit très éloignée de la probabilité.

2. Enoncé qu'on pourrait proposer pour un examen

Il est issu du sujet de baccalauréat, section S, juin 1997.

> Dans une urne, il y a 4 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard, successivement, sans remise, des boules de l'urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour faire sortir les 4 boules blanches.
>
> 1) a) Voici des exemples de résultats :
>
> BBBB : il y a eu 4 tirages et les 4 blanches sont sorties ;
>
> BBNNNBNB : il y a eu 8 tirages d'une boule et les 4 blanches sont sorties en 8 tirages.
>
> Donner deux autres exemples.
>
> b) Dans chaque expérience, on compte combien il a fallu de tirages pour que les 4 blanches soient sorties. On appelle X le nombre de tirages nécessaires pour que les quatre blanches soient sorties. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
>
> 2) Pour modéliser cette expérience aléatoire, on considère qu'on tire chaque fois au hasard, successivement et sans remise, les 8 boules : par exemple, BBNNNBBN est un des résultats possibles . Déterminer la probabilité de chacun d'eux.

3) a) Quelle est la probabilité pour que les 4 blanches sortent en 4 tirages ?

b) Faire la liste des résultats qui donnent les 4 blanches en 5 tirages exactement. Quelle est la probabilité pour que X = 5 ?

c) Compléter la détermination de la loi de probabilité de X.

A titre indicatif, on fournit l'information suivante : on a simulé cette expérience et on a obtenu les résultats suivants.

X	8	7	6	5	4
Nb d'expériences	484	297	153	54	12

Dans cet exercice, on oblige le candidat à passer du temps sur la description des résultats possibles et leur codage, pour faciliter le dénombrement. On donne, en fin d'énoncé, le résultat d'une simulation, ce qui fournit une aide :

– les valeurs de X sont données,
– si le candidat a obtenu des probabilités voisines des fréquences qu'on lui fournit, il est rassuré ; sinon il peut remettre en question son calcul. On tiendrait compte positivement dans le barème d'une phrase telle que "les valeurs trouvées pour les probabilités ne paraissent pas cohérentes avec les fréquences obtenues dans cette simulation...", ou on pénaliserait un élève qui, ayant obtenu des probabilités "éloignées" des fréquences fournies, ne dirait pas qu'il y a peut-être une contradiction.

3. Pour un devoir surveillé ou un examen

1) On choisit 3 personnes au hasard dans une population. On fait l'hypothèse que, dans cette population, les dates de naissance se répartissent équitablement sur les douze mois de l'année. Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes soient nées un même mois ?

2) Dans une classe de 36 élèves, on a la liste des 36 dates de naissance et on relève les mois de naissance.

	janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre	novembre	décembre
effectif	4	3	2	3	9	2	3	2	3	3	1	1

a) On choisit 3 personnes au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même mois ? Vous préciserez l'univers sur lequel votre raisonnement est basé.

b) On choisit au hasard 13 personnes de cette classe. Quelle est la probabilité pour que deux d'entre elles, au moins, soient nées un même mois ?

L'intérêt de cet exercice est, à la fois, dans la ressemblance et dans la différence entre les situations des questions 1) et 2) : apparemment, c'est la même question qui est posée, mais on fait sur les deux populations des hypothèses différentes, ce qui conduit à deux modèles différents.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

E. AMZALLAC, N. PICCIOLI, *Introduction à la statistique,* Ed. Hermann Paris, Collection Méthodes, 1978.

C. ROBERT, *L'empereur et la girafe,* Ed. Diderot, Arts et sciences, 1995.

ENGEL, *Les certitudes du hasard,* Ed. Aléas.

A. et M. HENRY (Irem de Besançon), "L'enseignement des probabilités dans le programme de première", *in Repères-IREM,* n°6, janvier 1992.

M. HENRY et H. LOMBARDI (Irem de Besançon), "Paradoxes et lois de probabilités", *in Repères-IREM,* n°13, octobre 1993.

J.-C. DUPERRET (Irem de Reims), "L'apprenti fréquentiste", *in Repères-IREM,* n°21, octobre 1995

J. HARTONG, *Probabilités et statistiques. De l'intuition aux applications,* Ed. Diderot (Arts et Sciences), décembre 1996.

COMMISSION INTER IREM STATISTIQUES ET PROBABILITÉS, *Enseigner les probabilités au lycée. Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités,* interIREM, septembre 1997.

C. PARISELLE, "Statistiques en première scientifique", *in* bulletin *APMEP* n°380, septembre 1991.

M. GHESQUIÈRE et C. PARISELLE, *Probabilités et statistiques en première, Ed. IREM de Grenoble, février 1993.*

ANNEXE 1 : UNE TABLE DE NOMBRES AU HASARD

Elle est extraite de "Sampling Numbers" et reproduite dans "Tables for Statisticians" de ARKIN et COLTON.

	1-4	5-8	9-12	13-16	17-20	21-24	25-28	29-32	33-36	37-40
1	23 15	75 48	59 01	83 72	59 93	76 24	97 08	86 95	23 03	67 44
2	05 54	55 50	43 10	53 74	35 08	90 61	18 37	44 10	96 22	13 43
3	14 87	16 03	50 32	40 43	62 23	50 05	10 03	22 11	54 38	08 34
4	38 97	67 49	51 94	05 17	58 53	78 80	59 01	94 32	42 87	16 95
5	97 31	26 17	18 99	75 53	08 70	94 25	12 58	41 54	88 21	05 13
6	11 74	26 93	81 44	33 93	08 72	32 79	73 31	18 22	64 70	68 50
7	43 36	12 88	59 11	01 64	56 23	93 00	90 04	99 43	64 07	40 36
8	93 80	62 04	78 38	26 80	44 91	55 75	11 89	32 58	47 55	25 71
9	49 54	01 31	81 08	42 98	41 87	69 53	82 96	61 77	73 80	95 27
10	36 76	87 26	33 37	94 82	15 69	41 95	96 86	70 45	27 48	38 80
11	07 09	25 23	92 24	62 71	26 07	06 55	84 53	44 67	33 84	53 20
12	43 31	00 10	81 44	86 38	03 07	52 55	51 61	48 89	74 29	46 47
13	61 57	00 63	60 06	17 36	37 75	63 14	89 51	23 35	01 74	69 93
14	31 35	28 37	99 10	77 91	89 41	31 57	97 64	48 62	58 48	69 19
15	57 04	88 65	26 27	79 59	36 82	90 52	95 65	46 35	06 53	22 54
16	09 24	34 42	00 68	72 10	71 37	30 72	97 57	56 09	29 82	76 50
17	97 95	53 50	18 40	89 48	83 29	52 23	08 25	21 22	53 26	15 87
18	93 73	25 95	70 43	78 19	88 85	56 67	16 68	26 95	99 64	45 69
19	72 62	11 12	25 00	92 26	82 64	35 66	65 94	34 71	68 75	18 67
20	61 02	07 44	18 45	37 12	07 94	95 91	73 78	66 99	53 61	93 78
21	97 83	98 54	74 33	05 59	17 18	45 47	35 41	44 22	03 42	30 00
22	89 16	09 71	92 22	23 29	06 37	35 05	54 54	89 88	43 81	63 61
23	25 96	68 82	20 62	87 17	92 65	02 82	35 28	62 84	91 95	48 83
24	81 44	33 17	19 05	04 95	48 06	74 69	00 75	67 65	01 71	65 45
25	11 32	25 49	31 42	36 23	43 86	08 62	49 76	67 42	24 52	32 45