APPROCHE ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DIVERSES CONCEPTIONS DE LA PROBABILITÉ

Jean François PICHARD
IREM et AMS, Université de Rouen

Résumé : J'indique dans cet article quelques-unes des conceptions et interprétations de la probabilité, et leur place dans l'évolution historique de la théorie. La diversité d'interprétations est la source des difficultés d'une définition de la probabilité lorsqu'on sort du cadre axiomatique et que l'on veut utiliser cette théorie pour modéliser la réalité.

La probabilité est la notion de base de la théorie probabiliste. On comprendra mieux ses diverses interprétations en la replaçant dans son évolution historique et dans le cadre général probabiliste et statistique, dont une esquisse est donnée dans la frise historique ci-après.

Introduction

Avant la réforme des programmes de lycée de 1991, l'introduction au calcul des probabilités dans les classes de Première (1) était faite suivant l'approche, qu'on appelle classique, qui définit la probabilité d'un événement comme rapport du nombre de cas favorables à l'événement au nombre total de cas, en supposant, ainsi que l'indique Bernoulli, que ces différents cas sont également possibles et par suite équiprobables ; c'est la raison pour laquelle certains ont dit qu'on définit la probabilité par la probabilité. L'approche qui est maintenant préconisée pour le secondaire (2) est celle dite fréquentiste, qui présente la probabilité d'un événement comme valeur limite de la fréquence de réalisations de cet événement dans une longue série de répétitions d'une expérience aléatoire. Ces deux

(1) A l'occasion de l'introduction du calcul des probabilités dans les programmes de lycée (1965), concomitante à la réforme dite des "mathématiques modernes", des réflexions très intéressantes ont été menées sur cet enseignement ; citons, e.g., *Hasardons-nous*, brochure n°17, APMEP, 1976.

(2) B.O. Spécial n°2 du 2 mai 1991.

approches nous donnent l'interprétation des probabilités dite "objective" parce qu'elle considère que la probabilité est inhérente à l'objet.

Néanmoins, il y a d'autres interprétations de la notion de probabilité (3), par exemple subjectiviste (liée au sujet qui émet un jugement de probabilité sur la survenance de l'événement), personnelle, etc. Celles-ci sont bien sûr liées à la conception du hasard (peut-on parler de probabilité sans le hasard ?) et celui-ci au déterminisme ou l'indéterminisme, c'est-à-dire, d'après Spinoza, repris par Laplace, si la probabilité n'est que le reflet de notre ignorance dans un monde déterministe (connaissance imparfaite d'un phénomène complètement déterministe, causes cachées) ou si le hasard – et par suite la probabilité – est essentiel, inhérent à la réalité, dans la nature des choses.

La recherche aux 18^e et 19^e siècles sur les fondements philosophiques de la connaissance et de la science, en particulier de la probabilité (4), a montré la difficulté de définir la probabilité de façon cohérente et pleinement convaincante. C'est lié et peut-être même équivalent à la difficulté de définir le hasard (5). En reprenant une explication de Lindley dans la préface au traité de de Finetti (1970), "Quand une question a montré qu'il était difficile d'y répondre, une possibilité peut être que la question elle-même était mal posée, et par conséquent non résoluble.", on a une indication de la raison pour laquelle de Finetti a mis en préambule de son livre :

"LA PROBABILITÉ N'EXISTE PAS !"

Cependant, selon de Finetti, on peut développer une théorie des probabilités quelle que soit l'interprétation que l'on donne à la probabilité, et le raisonnement probabiliste est sans aucun rapport avec des controverses philosophiques générales comme celle du déterminisme contre l'indéterminisme.

1. Les premières utilisations

Commençons d'abord par retracer l'origine des mots, le nom "probabilité" et son adjectif "probable". Le dictionnaire Larousse (6) indique que le mot "probable" a pour sens : "1. Qui a une apparence de vérité, semble plutôt vrai que faux." ; ce sens est équivalent à celui de vraisemblable. La notion épistémique du "probable" est utilisée, e.g., dans une phrase du genre : Il est probable que *"Le nez de Cléopatre s'il eût été plus court toute la face de la terre aurait changé"* (7), et on la trouve depuis longtemps dans la littérature, en particulier dans Aristote (8). Le terme "probable" apparaît vers 1285 avec le sens de "qu'on peut prouver". La *probabilité* est le "caractère de ce qui est probable, vraisemblable" et le *calcul des probabilités* est la "science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement". C'est une notion utilisée en jurisprudence dès le 14^e siècle avec le sens de degré de croyance ou de crédibilité ;

(3) I.J. Good, dans *The estimation of probabilities : an essay on modern bayesian methods*, MIT Press, 1965, distingue cinq genres de probabilité.

(4) Voir, e.g., Daston, Lorraine (1988). *Classical Probability in the Enlightment*, Princeton University Press ; Gigerenzer, G. *et al.* (1989). *The Empire of Chance*, Cambridge University Press.

(5) Pour une discussion à ce sujet, voir l'article "Qu'est-ce que le hasard ?.." de C. Chrétien et D. Gaud dans ce même numéro.

(6) Dictionnaire Larousse, Langue. Encyclopédie. Noms propres. 1980.

(7) Pascal, Blaise, *Pensées* n°413, *Œuvres complètes*, L'intégrale, Seuil, 1963.

(8) Voir, par exemple, David (1962), Sheynin (1974) et Hacking (1975).

le juge rend sa sentence selon son degré de conviction, qui est une fonction du degré de croyance qu'il a dans la véracité des faits qui lui sont présentés et de l'innocence ou la culpabilité de l'accusé. Cette même interprétation de la probabilité comme degré de croyance est utilisée par les historiens et les théologiens concernant les récits historiques ou religieux et les exploits ou miracles qui sont rapportés (9).

Le degré de croyance se rapportant à l'opinion d'une personne a été appelée "probabilité subjective" par analogie avec la distinction entre évidence objective et subjective faite dans la *Logique* de Port-Royal (1662), puis par Bernoulli (1713). Cette coexistence des conceptions objective et subjective a eu lieu presque depuis le début. Elle a fait dire à Cournot (1843, p. iv) *"le double sens du mot de probabilité, qui tantôt se rapporte à une certaine mesure de notre connaissance, et tantôt à une mesure de la possibilité des choses"* et à Hacking (1975) que la probabilité est une notion duale.

2. La probabilité objective issue de l'équipossibilité

Dans l'approche introductive classique (pré-1991 au lycée), on présente habituellement une situation finie de jeu de hasard où la première chose à faire est de déterminer l'ensemble des résultats possibles ou issues (10) (l'ensemble fondamental des événements élémentaires ou observables), puis d'attribuer à ces issues des probabilités qui vérifient l'axiome d'additivité : la somme des probabilités de tous ces événements élémentaires est égale à 1. L'attribution de ces probabilités est faite très souvent à partir d'une présupposition d'équipossibilité sur la base de symétries, homogénéité et autres considérations physiques sur un objet idéalisé. C'est une évaluation *a priori*.

Cette idéalisation est probablement venue de l'expérience de joueurs fanatiques et des études sur les proportions et les principes de base des combinaisons et permutations, mais il a fallu la rencontre avec un mathématicien (un effet du hasard, croisement de chaînes causales indépendantes (11)) pour qu'émerge une théorie des chances au 16^{e} siècle (12).

Le premier saut conceptuel qui a permis cette émergence d'un calcul des probabilités – au sens mathématique du terme – est l'idéalisation d'objets fournissant des résultats dits "au hasard" comme les astragales, les dés, etc. (David, 1962). Ce saut est de même nature que le passage d'une "ligne droite", un fil tendu par exemple, à la notion de droite mathématique. C'est une "géométrisation du hasard", selon l'idée exprimée par Pascal. Dans le plus ancien traité connu (13), Cardano met à jour la no-

(9) Il y en a une discussion poussée dans la *Logique*, dite de Port-Royal, de Arnauld et Nicolle (1662).

(10) Pour un point de vue philosophique sur ce point et sur d'autres abordés ici, voir Granger, Gilles-Gaston (1995) *Le probable, le possible et le virtuel*, éd. Odile Jacob.

(11) C'est la proposition d'explication du hasard par Cournot (1843), pour assurer la possibilité de l'existence du hasard dans un monde déterministe. Cependant cette notion d'indépendance renvoie soit à la conception "naïve" dans un univers éparpillé, éclaté en une multitude de systèmes clos, soit à l'indépendance stochastique et on a une définition circulaire.

(12) Voir e.g. Hacking (1975) et mon article "La théorie des probabilités au tournant du 18^{e} siècle", *Enseigner les probabilités au lycée*, CII Stat&Proba, 1997.

(13) Cardano, G. *Liber de Ludo Alea*, vers 1560, publié en 1663.

tion d'égale facilité : "...*Par exemple, je peux aussi facilement tirer un, trois ou cinq que deux quatre ou six. Les paris seront donc posés en accord avec cette égalité si le dé est honnête.*" A partir de cette même règle générale, il calcule les chances respectives des différentes configurations pour deux et trois dés.

On dira, quelque temps après, que les épreuves associées au lancer de chaque dé sont indépendantes, mais cette notion d'indépendance ne sera dégagée qu'en 1718 par De Moivre. On peut remarquer ici que postuler le principe d'équipossibilité pour les résultats avec un dé et ceux avec deux dés est équivalent à postuler le principe d'équipossibilité pour un dé et l'indépendance stochastique des deux dés.

Pour Cardano, le but de son étude est d'établir une valeur équitable (raisonnable) d'un pari, et pour cela il pèse les chances pour et contre (ce qui détermine le sort des joueurs), en complète analogie avec le "calcul des probabilités" concernant les jugements (voir §1). L'équivalence entre l'enjeu ou mise du pari et la valeur attendue (l'espérance mathématique) est posée par Huygens comme principe premier, ainsi que le fait Pascal, alors que Fermat effectue des dénombrements comme Cardano. L'espérance est calculée comme principe d'équité, à partir d'un jeu donné comme équitable : cette première définition est encore circulaire. L'égale facilité des différents cas possibles est notée par les premiers auteurs, mais elle est considérée comme allant de soi, comme la proposition "les mêmes causes produisent les mêmes effets" prise comme principe premier (le principe de causalité) par le déterminisme.

La probabilité mathématique en tant que notion de base n'apparaît qu'au début du 18ᵉ siècle (14) et depuis n'a pas perdu son rôle de premier plan, malgré la tentative de B. de Finetti (1937) d'unification des notions de probabilité et d'espérance mathématique par ce qu'il appelle la prévision. Pour de Finetti, les événements sont des quantités aléatoires particulières par l'intermédiaire de la fonction indicatrice, qui vaut 1 si l'événement se réalise et 0 sinon (analogue de la logique bivalente). Avec cette convention, la probabilité est un cas particulier de la prévision.

J. Bernoulli précise (1713, p. 32 (15)) : "*Or je pose que tous les cas sont également possibles, ou qu'ils peuvent survenir avec une égale facilité ; autrement il faut faire intervenir une mesure commune...*" C'est une des premières expressions de l'équipossibilité, discutée par Leibniz, qui deviendra le Principe d'Indifférence ou "de raison insuffisante" (16) dans la théorie classique des 18ᵉ et 19ᵉ siècles, et la première mention de réduction à des cas également possibles.

Au sujet de ce principe d'indifférence, Poincaré disait (17) que pour calculer une probabilité et donner un sens à ce calcul, nous devons admettre pour commencer une hypothèse ou convention qui introduit toujours un certain arbitraire. Pour lui, ce principe est comme admettre la continuité ; cette croyance ne peut se justifier ou se réfuter par un raisonnement indubitable,

(14) La première mention de "degré de probabilité" en ce sens apparaît dans la *Logique* de Port Royal (1662).

(15) Les indications de page de Bernoulli sont prises de l'édition de l'IREM de Rouen.

(16) Ce qui conduit à une équiprobabilité par défaut.

(17) Poincaré, Henri (1902), *Science et hypothèse.* Réédition Flammarion, 1968.

mais sans elle, toute science est impossible.

Bernoulli, en envisageant l'application de l'art de la conjecture à la vie civile, indique aussi, en plus du problème de l'équipossibilité, une autre difficulté qui n'apparaissait pas dans les jeux de hasard : c'est la détermination de l'ensemble des cas possibles, par exemple, (p. 40) : *"Pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres."* et (p. 42) *"Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies ? Qui définira combien est plus facile à celle-ci qu'à celle-là ... d'anéantir un homme ?"*. On voit donc que Bernoulli met l'accent sur une détermination précise de l'ensemble fondamental de probabilité à la fois pour la délimitation des cas possibles et l'attribution de probabilités à ces cas.

Le passage d'un ensemble fondamental fini au cas infini va se faire pour des probabilités continues ou géométriques. Les premiers exemples sont donnés par Buffon en 1733 (18) : le jeu du Franc-Carreau et le problème de l'aiguille (19). Dans ces exemples assez simples, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble des cas possibles et l'attribution de probabilités est faite par une extension immédiate du Principe d'Indifférence, traduit souvent par "choix au hasard", qui conduit à une distribution uniforme. Pour l'événement "la pièce est franc-carreau", la probabilité est obtenue d'une façon tout à fait analogue que dans le cas fini : c'est le rapport de l'aire de la surface associée aux cas favorables sur l'aire de la surface associée aux cas possibles. L'exemple des probabilités géométriques montre de plus que la valeur d'une probabilité n'est pas nécessairement un nombre rationnel, ce que pourrait laisser croire le fait de se restreindre à des cas finis.

La difficulté qui survient pour le calcul d'une probabilité géométrique, dont un exemple fameux est celui de Bertrand (20) "Calculer la probabilité qu'une corde prise au hasard dans un cercle ait une longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit", est due à l'imprécision dans la procédure de choix "au hasard" et peut aussi se produire dans le cas fini.

Le cas infini dénombrable, cependant, ne peut pas se traiter sous cette même forme, *i.e.* application d'un principe d'indifférence. Définir une probabilité comme rapport du "nombre de cas favorables" au "nombre de cas possibles" n'a pas de sens car ces deux nombres sont infinis. L'infini dénombrable s'est d'abord présenté dans le cas de répétitions (indépendantes) d'épreuves similaires ayant un nombre fini d'issues, comme le problème de la ruine du

(18) Buffon (1777), *Essai d'arithmétique morale*, xxiii.

(19) Le cas le plus simple, le jeu de Franc Carreau, consiste à lancer une pièce "ronde" au hasard sur un sol dallé et à regarder si elle chevauche une ou plusieurs rainures, ou si elle est à l'intérieur d'un carreau. Le problème de l'aiguille est analogue : lancer une aiguille au hasard sur un sol dallé. Ce dernier est remarquable en ce qu'il fait intervenir le tout nouveau calcul différentiel et intégral. Voir l'article "Les probabilités géométriques" de R. Cuculière dans "Le hasard", dossier de *Pour la science*, avril 1996 ; et aussi "Une activité probabiliste au collège, le jeu du Franc Carreau", IREM de Rouen, 1996.

(20) Bertrand, Joseph (1889), *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars. Voir aussi l'article de Cuculière cité ci-dessus, ou M. Henry et H. Lombardi, "Paradoxes et lois de probabilité", *Repères-IREM*, n°13, 1993.

joueur [21] ou le temps d'attente de la sortie d'une boule blanche lors d'une suite de tirages avec remise dans une urne. Le traitement du cas infini dénombrable sera fait par l'intermédiaire de variables aléatoires ou de probabilités en chaînes, et n'arrivera qu'assez tard dans le développement de la théorie des probabilités, par exemple avec Poisson (1837) et Borel (1909) [22].

La question de l'attribution de valeurs de probabilité, indiquée par Bernoulli (p. 42), va l'amener à son grand théorème qui est le premier exemple d'une approche fréquentiste raisonnée.

3. L'approche fréquentiste : la probabilité statistique

Celle-ci a été rendue possible par le grand théorème de Bernoulli, dont il donne une motivation sous la forme suivante : *"Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables."* (p. 42). Ce théorème de Bernoulli a ensuite été généralisé par les lois des grands nombres, d'après l'appellation de Poisson, et le théorème limite central dû à de Moivre puis Laplace. La loi forte des grands nombres (Borel, 1909) peut s'énoncer ainsi dans le cas simple d'une épreuve ayant deux issues possibles :

> "La valeur limite de la fréquence d'un événement de probabilité p obtenue sur une répétition d'épreuves identiques et indépendantes est presque sûrement la probabilité p de l'événement."

La loi forte nous fournit donc une procédure théorique pour déterminer la valeur de la probabilité d'un événement. Cette loi forte précise la loi faible démontrée par Bernoulli et elle est peut-être plus facile à comprendre. Le point de vue fréquentiste, comme exprimé par Bernoulli, sous-entend que les événements, supposés répétables indéfiniment de façon semblable, ont chacun la même chance de survenir, et la probabilité de survenance attribuée à ces événements de la même catégorie est donc intrinsèque à cette catégorie : c'est une probabilité objective.

Cette approche peut sembler de prime abord avoir un sens plus expérimental, se rapprocher des sciences de la nature comme la physique, et éviter l'attribution de valeurs de probabilité sur la base du principe d'équipossibilité ou d'indifférence, dont le caractère quelque peu arbitraire était mis en question par des philosophes. Cette assignation d'une fréquence comme valeur de probabilité était même indispensable dans beaucoup de cas ressortant des sciences de la nature, comme l'indiquait Bernoulli. Elle avait d'ailleurs été utilisée par Christiaan Huygens, l'auteur du premier traité publié sur le calcul des chances, dans sa correspondance avec son frère où il attribuait la fréquence donnée

(21) Le problème de la ruine du joueur peut s'énoncer comme suit. Deux joueurs A et B, ayant chacun a et b jetons respectivement, jouent une suite de parties pour chacune desquelles A a la probabilité p de gagner et q = 1 – p de perdre. Quand A gagne une partie, B lui donne un jeton et quand A perd, il donne un jeton à B. Il s'agit de trouver la probabilité que A ou B soit ruiné. C'est un problème de marche aléatoire avec barrières absorbantes.

(22) Borel, "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques" (1909), *Œuvres*, vol.2, p. 1055-1079.

par une table statistique [23] pour la valeur de la probabilité de mourir à un âge donné [24]. Cette assimilation de la fréquence (probabilité statistique) avec la probabilité d'un événement a été faite pendant tout le 18^e siècle et une grande partie du 19^e siècle, en particulier pour les questions démographiques ; par exemple, Laplace dit : *"Une table de mortalité est donc une table des probabilités de la vie humaine"* et il parle de la *"plus grande facilité dans les naissances des garçons..."* et *"les résultats précédents supposent que l'on peut assimiler les naissances aux tirages de boules d'une urne"* [25].

Ce problème de la détermination d'une probabilité inconnue a été appelée problème de la "probabilité inverse" parce que dans le cas classique où la probabilité de l'événement est donnée, on cherche la probabilité d'observer une fréquence fixée dans une répétition de n épreuves (c'est la distribution binomiale), alors que le problème que cherchait à résoudre Bernoulli et ses successeurs est de pouvoir dire quelque chose sur la valeur inconnue de la probabilité à partir de l'observation de fréquences [26].

Une autre méthode pour résoudre ce problème de la probabilité inverse est celle imaginée par Bayes [27] à partir de probabilités conditionnelles [28]. Ce résultat est connu aussi comme "théorème sur la probabilité des causes", nom donné par Laplace [29]. L'application la plus célèbre et controversée est celle de la probabilité que le soleil se lèvera demain, que Buffon avait traitée d'une autre manière (1777, voir le §6).

Dans le point de vue fréquentiste, on accepte le point de vue classique, c'est-à-dire qu'à chaque classe d'événements semblables est attachée une probabilité objective de survenance (intrinsèque, qui ne dépend pas de l'observateur), et en plus on doit supposer que, dans la répétition, les épreuves sont stochastiquement indépendantes. Cette dernière notion d'indépendance, dont on a déjà vu qu'elle joue un rôle important pour calculer les probabilités d'épreuves répétées, est impossible à expliquer en termes fréquentistes.

Une objection soulevée par Borel (1938, p. 105) à propos de la théorie fréquentiste est que l'évaluation de la probabilité d'un événement comme valeur limite [30] de la fréquence (probabilité statistique) dans des épreuves répétées n'est qu'une *"justification, mais non une définition"*, mais il remarquait (p. 80) qu'on peut attribuer une

(23) Celle de Graunt (1662), qu'on peut trouver dans : Dupâquier, Jacques et Michel (1985), *Histoire de la démographie*, Librairie Perrin, Paris.

(24) Lanier, Denis "L'espérance du Hollandais", *Scholies* n°16, 1995.

(25) Laplace, *Essai*, 1986, p. 143, 82 et 85. Peut-on pour autant qu'il confondait fréquence et probabilité ?

(26) Voir, e.g., Stigler, Stephen M. (1986) *The History of Statistics*, Belknap Harvard, chap. 3.

(27) Bayes, Thomas (1764) "An essay towards solving a problem in the doctrine of Chances", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* for 1763 ; reproduit dans Pearson E.S. et Kendall M. (1970) *Studies in the History of Statistics and Probability*, Griffin. Traduction française et notes par J.-P. Cléro (1988) dans *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n°18.

(28) La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie classiquement par $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$.

(29) Laplace, Pierre Simon (1774) "Mémoire sur la probabilité des causes par les événements", *Œuvres*, vol.8, pp. 27-65 ; Essai, 6^e et 7^e principes, pp. 42-44.

(30) Cette valeur limite est inatteignable, et comme disait J.M. Keynes (1921), *A Treatise on Probability*, "à la limite, nous serons tous morts".

valeur à une probabilité avec la même précision que pour la mesure d'une constante physique et que *"le calcul des probabilités est une science analogue à la physique, à la géométrie, à la mécanique, et non à l'arithmétique ou à l'algèbre."* En particulier, la statistique comme la physique et autres sciences trouve une justification dans les succès de ses modèles de prévision.

Une autre objection, plus fondamentale, a été mise en avant par les subjectivistes. Si l'on se limite aux procédures admises par les objectivistes, un domaine considérable de phénomènes fortuits échappe alors à la science, en particulier ceux dont les occurrences ne sont pas très nombreuses (voire même uniques) et qui, pour diverses raisons, ne sont pas répétables ; de ce fait, on ne peut pas avoir de statistiques de fréquence. Par exemple, on ne peut rien dire en termes objectivistes ou fréquentistes de l'événement : "Une des centrales nucléaires françaises va exploser dans le courant de l'année prochaine" ou bien "Un tremblement de terre va dévaster une grande ville française dans le courant de l'année prochaine".

4. La probabilité subjective

J'ai déjà indiqué plus haut que le premier "calcul des probabilités" était fait dès le 14e siècle à propos de jugements de crédibilité de témoignages, de récits, etc. Par exemple, dans la *Logique* de Port-Royal, il y a la distinction entre évidence interne et externe, entre caractère objectif et subjectif des propositions, et Bernoulli fait de même dans l'*Ars conjectandi*. Il commence la partie 4 par : *"On considère la certitude d'une chose quelconque ou bien objectivement en elle-même ... ou bien on la considère subjectivement, dans son rapport à nous, et elle est la mesure de notre connaissance touchant cette vérité"*. La probabilité était considérée comme un attribut de l'opinion, un degré de crédibilité, et a été appelée subjective. Comme l'a noté van Brakel (31) et le souligne Daston (1988), les auteurs jusqu'au début du 19^{e} siècle (32) ont illustré leurs ouvrages sur le calcul des chances ou des probabilités par des exemples tirés des jeux de hasard et de la vie civile et passaient d'une signification à l'autre sans le mentionner et sans plus d'embarras.

Outre la *Logique* de Port-Royal (1662), on peut citer comme ouvrages contenant des études sur la probabilité des jugements et du témoignage, ceux de Bernoulli (1713, e.g., p. 38) qui reprend en la formalisant la discussion de la *Logique* et indique (p. 16) "*La* probabilité *est en effet un degré de certitude et en diffère comme la partie diffère du tout*", Condorcet (1790) (33), Laplace (1812 et 1814) et Poisson (1837).

Laplace nous dit (Essai, p. 34) : *"La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances"* et Poisson (1837) indique dans sa table des matières *"Le calcul des probabilités s'applique également aux choses de toute espèce, morales ou physiques, et ne dépend aucunement de leur nature"*. On peut interpréter cela comme une amorce de l'axiomatisation à venir. Laplace parle de *"motif de*

(31) J. van Brakel (1976). "Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, n°2.

(32) Le titre du traité de Poisson (1837) est tout à fait symbolique.

(33) Condorcet, Jean A.N.C. (1790) "Eléments du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie et au jugement des hommes", dans *Sur les élections*, Fayard, 1986.

croire" à propos de la probabilité, et Poisson en donne la définition suivante : *"La probabilité d'un événement est la raison de croire qu'il aura ou qu'il a eu lieu"*. Poisson illustre alors cette définition par un exemple qu'on peut appeler objectif : *"Une boule va être tirée d'une urne contenant ... des boules blanches et des boules noires"* en nombres connus, *"ou bien, elle a été tirée de cette urne et l'on m'a cachée sa couleur ; j'ai évidemment la même raison de croire que cette boule est blanche dans le premier cas, ou qu'elle sera blanche dans le second"* (34). Ce que l'on peut exprimer ainsi : tant qu'on ne connaît pas le résultat de l'expérience, la probabilité d'un événement reste toujours la même. Poisson continue : *"La probabilité dépendant des connaissances que nous avons sur un événement, elle peut être inégale pour un même événement et pour diverses personnes"*. Cette remarque, qui définit la probabilité de façon conditionnelle, peut s'appliquer aussi bien au cas objectif qu'au cas subjectif. C'est d'ailleurs d'une façon analogue que les subjectivistes (Keynes, de Finetti, etc.) définissent la probabilité.

C'est au premier tiers du 19e siècle que le passage entre probabilité objective et subjective, qui ne posait jusqu'alors aucun problème aux probabilistes, a été mis en question par les philosophes des sciences et les logiciens. L'attribution de valeurs de probabilité a paru parfois si arbitraire et même inadmissible (35), de même qu'était fortement contestée la supposition d'indépendance entre les décisions des différents jurés (36), que J.S. Mill (37) a dit au milieu du 19e siècle que l'application de la théorie des probabilités aux décisions juridiques est le "scandale des mathématiques".

Il y a eu un renouveau de la probabilité subjective au début du 20e siècle, sans doute sous la poussée des applications et des succès de la statistique. Keynes va jusqu'à dire qu'on ne peut pas parler de la probabilité d'un événement, mais seulement de la probabilité d'un jugement porté par un individu donné sur cet événement. Dans l'optique subjectiviste, la valeur de probabilité prend en compte l'ensemble des connaissances de celui qui évalue cette probabilité et correspond à un degré de confiance dans l'arrivée de l'événement, un pari sur la réalisation ou non de l'événement en fonction de l'utilité. L'attribution subjectiviste de probabilités concernant une situation incertaine doit respecter des conditions de cohérence et se faire de telle sorte qu'il n'existe pas de meilleure stratégie possible dans un état

(34) Cette discussion, qui concerne une des difficultés liée à la notion d'expérience aléatoire dans l'interprétation objectiviste, est complètement intégrée dans la conception subjectiviste et n'est alors que le reflet de la définition de la probabilité attribuée à un événement dans un système de connaissances ou d'informations donné.

(35) Poisson (1837, p. 3) dit concernant Laplace : "Soit à raison de cette hypothèse, soit à cause de leurs conséquences, qui m'ont parues inadmissibles, les solutions au problème de la probabilité des jugements que l'on trouve dans le *Traité des probabilités*,... ont toujours laissé beaucoup de doutes dans mon esprit." L'hypothèse mentionnée est que la probabilité qu'un juré se trompe est comprise entre 1/2 et 1, les valeurs étant également possibles.

(36) Borel (1938, p. 67) appelle cette hypothèse d'indépendance une erreur de principe, erreur qui se produit dans les cas ou intervient la psychologie humaine.

(37) John Stuart Mill (1806-1873), logicien anglais, donnait d'ailleurs une caractérisation du déterminisme comme suit : "Tout phénomène qui varie en quelque manière chaque fois qu'un autre phénomène varie d'une manière particulière, est soit cause, soit effet de ce dernier, à moins qu'il n'y soit relié par quelque fait causal".

donné d'information. La modification de l'information connue va entraîner une modification de l'attribution des probabilités.

La probabilité subjective est donc une probabilité conditionnelle qui se modifie en fonction des informations disponibles, ce qui rejoint le point de vue des statisticiens néobayésiens. Pour un subjectiviste, comme Ramsey ou de Finetti, une probabilité objective, ou plutôt inter-subjective, sera une évaluation de la probabilité d'un jugement commune à tous les individus correctement informés des circonstances, de la même façon que tout le monde sent, en tapant dedans, la réalité et la dureté d'un objet métallique. Les subjectivistes acceptent les valeurs de probabilité obtenues dans l'approche objective et fréquentiste comme base d'évaluation subjectiviste des probabilités. Il me semble que dans les sciences expérimentales, où les expériences sont répétables à volonté dans des conditions semblables, l'approche subjectiviste est équivalente, voire même identique, à l'approche bayésienne. Il reste donc les autres domaines (sciences humaines, événements rares) où l'approche subjectiviste garde tout son intérêt.

5. L'axiomatisation

On peut avancer diverses raisons pour l'axiomatisation de la théorie des probabilités qui a été faite par A.N. Kolmogorov en 1933. Il y a des raisons provenant des mathématiques, qui sont d'établir toutes les branches sur des fondements solides, d'abord en arithmétique et en géométrie à la fin du 19^{e} siècle (Cantor, Hilbert, etc.) puis la formalisation logique au début du 20^{e} siècle (Peano, Russel). Il y a une raison interne déjà notée par Poisson que le calcul des probabilités s'applique de la même manière, que ce soit à partir des probabilités objectives classiques ou des probabilités subjectives [38]. Il y a aussi le développement de la théorie de la mesure (Borel, Lebesgue) et l'analogie entre celle-ci et le calcul des probabilités que Borel avait déjà remarqué en 1924 dans son examen du traité de Keynes, mais qu'il n'a pas formalisé car il s'attachait avant tout aux applications, et il disait au sujet de l'axiomatisation (1938, p. 80) :

"C'est pour donner satisfaction à ceux qui désirent séparer nettement, dans toute science, la théorie des applications, que l'on a été conduit à proposer, pour le calcul des probabilités comme pour la géométrie, une théorie axiomatique."
"On sait comment l'on procède pour exposer une science, telle que la géométrie, sous une forme axiomatique ; de même que dans les bons romans policiers, on commence par la fin, c'est-à-dire que l'on pose comme définitions les propriétés essentielles que l'expérience a conduit à attribuer aux êtres géométriques : points, droites, plans."

Dans la théorie axiomatique, on prend comme point de départ un ensemble quelconque Ω sur lequel on distingue une classe $\mathfrak{I}$ de parties, les "événements observables", qui est une tribu ou σ-algèbre pour les opérations de réunion et de passage au complémentaire, et à chacune de ces parties A (suivant les cas assimilées à des événe-

(38) Ce point avait été relevé par Henri Poincaré, *Calcul des probabilités*, 2e éd. 1912, reprod. Jacques Gabay, 1987. "La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe... Une définition mathématique ici n'est pas possible ; nous devrons... faire des conventions" (p. 28) ; "tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, qui légitime telle ou telle convention ; la seconde, mathématique, qui applique à ces conventions les règles du calcul." (p. 29).

ments) on attribue une probabilité P(A). Cette fonction P de $\mathfrak{I}$ dans l'intervalle [0,1] doit vérifier $P(\Omega) = 1$ et l'axiome de σ-additivité (39) ; c'est donc une mesure de masse 1 et tous les résultats de la théorie de la mesure peuvent être appliqués, quelle que soit l'interprétation, objectiviste ou subjectiviste, qu'on en donne.

Cependant, et Borel insiste sur ce point, toutes les difficultés subsistent quand on veut faire l'application de cette théorie à des phénomènes réels : il faut alors définir les événements et les valeurs de probabilité qu'on leur attribue.

6. La probabilité personnelle

Assigner des valeurs de probabilité (objectives ou subjectives) à des événements ou des jugements de valeur, ce n'est pas seulement pour faire de pures spéculations, mais c'est aussi et peut-être surtout pour s'en servir en pratique, faire un pari dans des circonstances données ou prendre une décision dans la vie quotidienne. De la même façon qu'une expérience de physique valide une théorie si le résultat obtenu est très proche de celui indiqué par la théorie, on admet qu'un événement ou un jugement dont la probabilité est presque l'unité approche la certitude absolue, et presque impossible si la probabilité est très voisine de 0.

De nombreuses discussions ont eu lieu sur cette question, par exemple, Bernoulli (p. 16) qui l'appelle certitude morale, Buffon (1777) qui distingue des degrés : certitude morale, certitude physique, Laplace (1814), et plus près de nous Borel qui y a consacré de longs développements dans *Le hasard* (1914) et *Valeur pratique* (1938) (40). Il donne comme exemple d'événement pratiquement impossible le miracle des singes dactylographes (41), ce qui est la reprise dans une forme moderne d'un exemple de la *Logique* (1662). Mais le problème de donner une limite de la probabilité entre un événement très probable et un événement presque certain est analogue au sophisme du tas de blé : à partir de combien de grains a-t-on un tas ?

La probabilité personnelle peut être considérée comme un cas extrême de la probabilité subjective, où les événements sur lesquels on émet un jugement de probabilité ne peuvent être répétés dans des conditions semblables. Elle dépend des connaissances que l'on a sur les circonstances de l'événement, comme e.g. Poisson et Keynes l'ont noté, mais aussi des analogies avec d'autres cas plus ou moins semblables, et de la psychologie de l'individu qui émet le jugement. L'exemple le plus courant est celui des paris sur les courses de chevaux et autres manifestations sportives (42). Borel donne quelques conseils pour l'évaluation et la composition de probabilités personnelles, liées comme la probabilité subjective à la théorie de l'utilité. Mais ainsi que le note de Finetti, la probabilité personnelle est peu fiable car entachée d'une foule d'idées préconçues.

(39) Quoique les subjectivistes trouvent que l'axiome de Kolmogorov (la σ-additivité) n'est pas essentiel et qu'on peut s'en passer.

(40) Borel distingue les probabilités négligeables à l'échelle humaine (10^{-6}), terrestre (10^{-15}) et cosmique (10^{-50}).

(41) C'est-à-dire que des singes, tapant au hasard sur des machines à écrire, puissent reproduire une page donnée de Victor Hugo. Borel (1914 et 1938, p. 20).

(42) Voir Borel (1914 et 1938).

BIBLIOGRAPHIE

ARNAULD, Antoine et NICOLLE, Pierre (1662), *La logique ou l'Art de penser*, 2e éd. 1664, Edition critique par Pierre Clair et François Girbal, Ed. P.U.F., 1965 ; elle est connue sous le nom de *Logique* de Port-Royal.

BERNOULLI, Jacques (1713), *Ars Conjectandi*, Partie 4, traduit du latin par N. Meusnier, IREM de Rouen, 1987.

BOREL, Emile (1914), *Le hasard*, Ed. P.U.F., 2e éd. 1948.

— (1938), *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Ed. Gauthier-Villars, 2e éd. 1952.

— *Œuvres*, 4 vols. (CNRS, Paris), 1972.

BUFFON, G.L. LECLERC de (1777), *Essai d'arithmétique morale, Œuvres*, tome 12, Garnier Frères, 1855, et aussi *in Un autre Buffon* par J.-L. Binet et J. Roger, Ed. Hermann, 1977.

CARDANO, Gerolamo (43) (vers 1560), *The Book of Games of Chances*, Ed. Holt, Rinehard and Winston, 1961.

COURNOT, A.A. (1843), *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Ed. Hachette. Rééd. dans *Œuvres complètes*, tome 1, Librairie Vrin, 1984.

DAVID, F.N. (1962), *Games, Gods and Gambling*, Ed. Griffin, London.

DE FINETTI, Bruno (1937), "La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7.

— (1970), *Teoria Delle Probabilità*, trad. *Theory of probability*, Ed. Wiley, 1974.

HACKING, Ian (1975), *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

LAPLACE, Pierre Simon (1812), *Théorie analytique des probabilités, Œuvres*, 1886, tome 7.

— (1814), *Essai philosophique sur les probabilités*, Ed. Bourgois, 1986.

LEIBNIZ, G. W., *L'estime des apparences*, trad. et notes de Parmentier M., Ed. Vrin, 1995.

MOIVRE, Abraham de (1711), De Mensura Sortis, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London.

— (1718), *The Doctrine of Chance*, 3e éd. 1756.

MONTMORT, Pierre Rémond de (1708), *Essay d'analyse des jeux de hazard*, 2e éd. 1713.

POISSON, Siméon Denis (1837), *Recherches sur la probabilité des jugement*, Ed. Bachelier.

SHEYNIN, O.B. (1974), "On the Prehistory of the Theory of Probability", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 12 n°2.

(43) Son nom a été francisé en Jérôme Cardan.

FRISE HISTORIQUE SUR LA PROBABILITÉ ET LA STATISTIQUE
ou Bref aperçu du développement des théories probabiliste et statistique

Cette esquisse de l'évolution de la théorie probabiliste et statistique permettra peut-être d'éclairer quelques points abordés lors de la première partie sur la notion de probabilité et ses diverses conceptions. J'ai choisi de faire un découpage selon les grands thèmes qui ont traversé les époques. Ce choix est arbitraire, bien sûr, et l'on retrouvera des grands savants (avec sûrement des omissions) sur plusieurs de ces thèmes, mais un ordre chronologique aurait émietté à la fois ces grands thèmes et les apports de ces savants.

0. La préhistoire

Les jeux, l'incertain,	III^e millénaire av JC	Mésopotamie	astragales, dés en terre cuite
l'imprévisible	2^e siècle av JC	Egypte	dés cubiques équilibrés
Aristote	4^e siècle av JC	Grèce	logique distinguant le fortuit du nécessaire
juriste Ulpien	3^e siècle ap JC	Rome	tables d'estimation des rentes viagères
risques maritimes	13^e siècle	Italie	Bourses d'*assurance*
rentes viagères	13^e siècle	Pays-Bas	estimation empirique
calcul des probabilités (44)	1361	science dont le but est de déterminer la vraisemblance d'un événement	probabilité comme degré de crédibilité d'une opinion

1. Les premiers écrits : Cardan et Galilée

Gerolamo Cardano dit Jérôme Cardan	1501-1576 Italie	Traité *De Ludo Aleae*, entre 1525 et 1560, publié en 1665	notions : jeu équitable, équipossibilité des faces pour un dé honnête, la mise est proportionnelle aux chances, combinaisons pour 2 et 3 dés
Galileo Galilei	1564-1642 Italie	mémoire vers 1620, publié en 1718	problème du Grand Duc de Toscane (45)

2. Le début "officiel" : Pascal et Fermat ; le premier traité publié : Huygens

La théorie des probabilités est une mathématisation du hasard (une "géométrie du hasard", a dit Pascal).

Pierre de Fermat	1601-1665 France	correspondance de 1654, publiée en 1679	problème des partis par combinaisons
Blaise Pascal	1623-1662 France	*Traité du triangle arithmétique*, 1654, publié 1665	jeu équitable, droit d'espérer, droit conditionnel, récurrence

(44) D'après Dictionnaire Larousse, Langue. Encyclopédie. Noms propres. 1980.
(45) Jeu avec trois dés.

Christiaan Huygens	1629-1695 Hollande	Traité *De ratiociinis in Ludo aleae*, 1657	notions : jeu juste, valeur de la chance = *expectatio* d'où espérance

Le traité de Huygens est resté le seul ouvrage important en théorie des probabilités jusqu'au début du 18^e siècle.

3. Logique des événements et probabilité à la fin du 17^e siècle

Antoine Arnauld et Pierre Nicolle	1612-1694 1625-1695 France	La *Logique* ou l'art de penser, 1662	probabilité est pris au sens de degré de crédibilité et au sens probabiliste objectif de rapport de chances
Gottfried W. Leibniz	1646-1716 Allemagne	*De arte combinatoria*, 1666 divers mémoires, de 1678 à 1686, publiés en 1866 et sq., correspondance	aspects philosophiques, jeu juste, équipossiblité par principe de raison insuffisante, probabilité comme degré de possibilité
Jakob Bernoulli	1654-1705 Suisse	mémoire de 1685	introduction de série dans le calcul d'une probabilité

4. Arithmétique politique

John Graunt	1620-1674 Angleterre	Traité *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality...*, 1662	table de mortalité, critique des sources, estimation raisonnée de la population et de son évolution
William Petty	1623- 1687 Angleterre	Traité *Political Arithmetic*, vers 1673, publié en 1690	évaluation de la population, de sa croissance, et de sa distribution hommes /femmes; évaluation de divers biens et marchandises
Christiaan et Ludwig Huygens Jan Hudde	Hollande	correspondance 1669-1671, publiée en 1920	espérance de vie (conditionnelle), vie probable, courbe de mortalité (étudiée par Ch. Huygens)
Jan de Witt	1625-1672 Hollande	Rapport sur les rentes viagères 1671	évaluation des rentes viagères sur des tables de mortalité
Gottfried W. Leibniz		*De incerti aestimatione*, 1678 *Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes*, 1680, publié en 1866	vie moyenne (conditionnelle), vie probable, population stationnaire, calcul de fécondité
Edmund Halley	1656-1742 Angleterre	Mémoire "An Estimate of the degrees of the Mortality of Mankind", *Phil. Trans.* (46),1693	Première table de mortalité digne de ce nom, pour règler le tarif des assurances vie et rentes viagères

(46) *Phil. Trans.* = *Philosophical Transactions* of the Royal Society of London.

5. Le début du 18ᵉ siècle et les trois grands traités

Jakob Bernoulli		Traité ***Ars Conjectandi***, vers 1692, publié en 1713	l'urne comme modèle, schéma binomial, application aux choses morales et politiques, une "loi des grands nombres"
Pierre Rémond de Montmort	1678-1719 France	Traité ***Essay d'analyse sur les jeux de hazard***, 1708 ; 2ᵉ éd. 1713	le premier traité après celui de Huygens; traitement algébrique (combinatoire) de jeux complexes, fonction génératrice
avec Nicolas Bernoulli	1695-1726 Suisse	correspondance dans la 2ᵉ édition, 1713	l'infini dans les jeux : loi géométrique
Abraham de Moivre	1667-1754 Angleterre	mémoire "De mensura sortis", *Phil. Trans.*,1711 traité ***Doctrine of Chances***, 1718, 3ᵉ éd. 1756 *A Treatise of Annuities on Lives*, 1725.	équation de récurrence aux différences finies, traitement analytique, fonction génératrice, "loi des grands nombres" par approximation normale (47) loi de mortalité, valeur des rentes viagères sur plusieurs têtes
G.L. Leclerc de Buffon	1707-1788 France	mémoire sur le jeu de Franc-Carreau, 1733, dans *Essai d'arithmétique morale*, 1777	probabilité géométrique, intervention du calcul intégral en théorie des probabilités, première expérimentation sur le paradoxe de St Pétersbourg
Daniel Bernoulli	1700-1782 Suisse	mémoire "Specimen theoriae novae de mensura sortis" à l'Acad. Petrov, pour 1730-31, 1738	paradoxe de St Pétersbourg (48) : variable aléatoire ayant une espérance mathématique infinie, espérance morale

(47) La distribution de Laplace-Gauss a été qualifiée de "normale" par Pearson en 1893.

(48) Le problème de St Pétersbourg est le suivant : "à un jeu de pile ou face, A gagne 2^n écus si pile arrive pour la première fois au ^{n}-ième tirage. Quelle doit être la mise de A pour que le jeu soit équitable ? Voir J.-P. Delahaye, "L'espérance mathématique", *Pour la Science*, dossier "Le Hasard", avril 1996.

6. Démographie au 18^e siècle

John Arbuthnot, Nicolas Bernoulli, Buffon, Moivre, Daniel Bernoulli, ..., Laplace, Poisson	18^e siècle et début 19^e siècle	An Argument for Divine Providence, *Phil. Trans.*, 1710	rapport du nombre de naissances de garçons à celui des filles, le premier test d'hypothèse statistique
Leonhard Euler	1707-1783 Suisse	Recherches générales sur la mortalité..., 1760	relation entre table de mortalité et croissance de la population
Antoine Deparcieux	1703-1768 France	traité *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, 1746	théorie et première table de mortalité française ; durée de vie probable, moyenne dans une population non stationnaire
D. Bernoulli J. le Rond d'Alembert	1717-1783 France	mémoires vers 1760 *Opuscules mathématiques*, 1765	} dispute sur l'inoculation (49)
Pierre Wargentin	1718-1783 Suède	mémoires de 1755 et *sq*	tables de mortalité avec répartition par sexe, âge et causes de décès

7. La théorie des erreurs, vers la loi normale et le théorème limite central

C'est le problème de la combinaison d'observations discordantes d'une même quantité ou de plusieurs liées par des équations de condition, afin d'en obtenir les meilleures estimations possibles.

Thomas Simpson	1710-1761 Angleterre	*Miscellaneous tracts,...* 1757	distribution des erreurs suivant une densité continue triangulaire
Daniel Bernoulli		Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium, 1777	densité continue en arc de cercle
Johann H. Lambert	1728-1777 Allemagne	*Photometria sive de mensura*, 1760	première représentation d'une courbe des erreurs "en cloche"
Joseph L. Lagrange	1736-1813 Italie	Mémoire sur l'utilité de prendre le milieu ..., 1776	
Pierre S. Laplace	1749-1827 France	Mémoires "sur le milieu qu'il faut choisir entre les résultats de plusieurs observations", 1777; etc. *Théorie analytique des probabilités*, 1812.	diverses densités, en particulier 1re loi de Laplace et loi normale ; énoncé du TLC (50) Il fonde les bases de la théorie de l'inférence

(49) L'inoculation consistait à injecter une petite quantité de pus pour prévenir de contracter la petite vérole (variole). Problème de la comparaison d'un risque immédiat (1 à 3%) avec un avantage incertain dans l'avenir (mortalité due à la variole : 10 à 12%).

(50) TLC = Théorème Limite Central, d'après une dénomination de G. Pólya en 1920.

Adrien M. Legendre	1752-1833 France	*Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, 1805	méthode des moindres carrés
Carl F. Gauss	1777-1855 Allemagne	*Theoria Motus*, 1809 ; *Theoria combinationis observationum erroribus minimis*, 1821	méthode des moindres carrés et loi normale, *cf. Méthode des moindres carrés*, trad. Bertrand, 1855

8. Le problème de la probabilité inverse

Thomas Bayes	≈1701-1761 Angleterre	"An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances", *Phil. Trans.*, 1763	problème de l'inférence statistique à partir de probabilités *a posteriori*
Pierre S. Laplace		Mémoire sur la probabilité des causes par les événements, 1774	

9. Agrégation des préférences - probabilité des témoignages

Charles de Borda	1733-1799 France	Mémoire sur les élections au scrutin, 17810	}Cette application du calcul des probabilités aux problèmes de jugements va susciter de vivespolémiques dès le début du 19^{e} siècle
Jean A. Condorcet	1743-1794 France	*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1785	
Pierre S. Laplace		Mémoire sur les probabilités, 1781 et *Théorie Analytique des probabilités*, 1812, chap xi	
Siméon D. Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	

10. Enseignement et philosophie des probabilités

Jean A. Condorcet	1743-1794 France	*Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard ...*, 1805	le premier ouvrage destiné à l'enseignement
Sylvestre Lacroix	1765-1840 France	*Traité élémentaire du calcul des probabilités*, 1816, 1822	le premier à enseigner le calcul des probabilités en 1785 sur un plan de Condorcet ; cet ouvrage expose les différents thèmes évoqués ici
Pierre S. Laplace		*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814	premier traité de vulgarisation essai d'axiomatisation
Siméon D. Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	distinction des probabilités objective et subjective

Antoine A. Cournot	1801-1877 France	*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843	fondement de la théorie, distinction des probabilités objective et subjective ; critique de l'homme moyen de Quetelet
Joseph Bertrand	France	*Calcul des probabilités*, 1889	il signale l'ambiguïté de l'expression "au hasard"
H. Poincaré	1854-1912 France	*Calcul des probabilités*, 1900	la probabilité comme convention ; le "hasard" par mélange (cartes, etc.)
Emile Borel	1871-1956 France	*Le hasard*, 1914/1948 *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, 1938	discussion sur l'attribution de probabilité dans des cas concrets

11. La statistique économique et sociale ; les graphiques

William Playfair	1759-1823 Angleterre	*The commercial and political atlas*, 1786 *Statistical Breviary*, 1801	première publication de graphiques statistiques
André M. Guerry	France	*Essai sur la statistique morale de la France*, 1833	cartes statistiques et premier histogramme
Adolphe Quetelet	1796-1874 Belgique	*Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*, 1835	homme moyen, vérification de la distribution normale en sciences de la vie ; créateur du congrès international de statistique (1853)

12. Lois limites

Siméon D. Poisson	1781-1840 France	*Recherche sur la probabilité des jugements...*, 1837	fonction cumulative, loi des grands nombres,t variable aléatoire de Poisson, probabilités en chaînes
I. Jules Bienaymé	1796-1878 France	Considérations à l'appui de la découverte de Laplace..., 1853	égalité de Bienaymé TLC à plusieurs dimensions
P. Tchebychev	1821-1894 Russie	Des valeurs moyennes, 1867	le père de l'école russe loi des grands nombres, 1863 inégalité de B.-T., 1867
Andreï A. Markov	1856-1922 Russie	La loi des grands nombres et la méthode des moindres carrés (en russe), 1898 *Wahrscheinlichkeitsrechnung*,1912	démonstration rigoureuse du TLC en 1898 ; processus en chaîne (dit de Markov), 1906
A.M. Liapounov	1857-1918 Russie	proposition générale du calcul des probabilités, 1901	démonstration du TLC avec conditions suffisantes
Emile Borel	1871-1956 France	les probabilités dénombrables... 1909	loi forte des grands nombres ; convergence presque sûre

13. La biométrie en Angleterre

Francis Galton	1822-1911 Angleterre	*Regression towards mediocrity in hereditary stature*, 1886 *Co-relations and their measurement*, 1888	prolongement de Quetelet régression linéaire et corrélation
Karl Pearson	1857-1936 Angleterre	On the criterion that a given system of deviations from the probable ..., 1900	loi normale multi-dimensionnelle, corrélation partielle ; test du Khi2 méthode du maximum de vraisemblance
Ronald Fisher	1890-1962 Angleterre	"mathematical foundations of theorical statistics", 1922 *The design of Experiments*, 1935	statistique en géométrie multidimensionnelle ; analyse de variance ; plan d'expérience
Jerzy Neyman et Egon Pearson	1894-1981 Russie et USA 1895-1980 Angleterre	"...test criteria", *Biometrika*, 1928 "On the problem of the most efficient tests ..", 1933 (51)	estimation par intervalle de confiance ; thérie des tests d'hypothèse

14. L'axiomatisation

Emile Borel		*Leçons sur la théorie des fonctions*, 1896	théorie des ensembles et de leur mesure
Henri Lebesgue	1875-1941 France	*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904	théorie abstraite de la mesure et intégration
Maurice Fréchet	1878-1973 France	Intégrale définie sur un ensemble abstrait, 1915	espérance mathématique d'une variable aléatoire
Paul Lévy	1886-1971 France	*Calcul des probabilités*, 1925 *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 1937	loi de "0 ou 1", convergence en loi et en probabilité ; fonction caractéristique et théorème de continuité
Andreï N. Kolmogorov	1903-1987 Russie	*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsreichnung*, 1933	fondement axiomatique de la théorie des probabilités appuyée sur la théorie de la mesure

(51) Voir aussi Neyman, "L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité", *Actualités scientifiques et industrielles*, 1938.

15. Processus stochastiques (52) et problèmes limites

Andreï A. Markov	1856-1922 Russie	*Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1912	Processus en chaîne, 1906
Alexandre J. Khintchine	1894-1959 Russie	*Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933	Théorèmes limites en calcul des probabilités
Paul Lévy		*Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 1937 ; *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948	Lois stables et infiniment divisibles. Problèmes limites. Temps aléatoire, temps local, conditionnement, martingales
Andreï N. Kolmogorov et Boris V. Gnedenko	Russie	*Distribution limites de sommes de variables aléatoires indépendantes*, 1949 (en russe)	Problème des grandes déviations, 1929. Processus de Markov, lois infiniment divisibles
William Feller	1906-1970 Yougoslavie puis USA	*Introduction to probability theory*, 1950	Résolution complète de la loi des erreurs, 1935 (faite aussi par P. Lévy)
Maurice Fréchet	1878-1973 France	*Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, 1938	Compléments à la théorie de Kolmogorov
Harald Cramér	1893-1985 Suède	*Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités*, 1938	Conséquences du T.C.L. et th. de continuité fait aussi par P. Lévy
Joseph Leo Doob	USA	*Stochastic processes*, 1953	Théorie générale des processus stochastiques, martingales, séparabilité
A. Blanc-Lapierre et R. Fortet	France	*Théorie des fonctions aléatoires*, 1953	Extension à un processus défini sur un espace plus général

Et bien sûr, je ne mentionne pas les développements de la théorie probabiliste et statistique de la seconde moitié du 20^{e} siècle.

(52) Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexées sur **R**, le temps.