QUELLE INTÉGRALE POUR L'AN 2000 ?

Roger CUCULIÈRE,
Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

"A useful tool for mathematicians and scientists needing advanced integration would be a method combining the ideas of the calculus indefinite integral and the Riemann definite integral in such a way that Lebesgue properties can be proved easily, so that the student would not have such a radically fresh start as is needed for Lebesgue integration. Before the 1950's it would have seemed to be an impossible dream. But independently J. Kurzweil (1957) and the author (1955, 1961) arrived at the same construction, a simple extension of the construction of the Riemann integral. The resulting integral includes the Lebesgue and the Denjoy-Perron integrals."

Ralph Henstock, 1988 ([8], p. viii).

Quelle intégrale enseigner ?

Quelle intégrale enseigner au niveau Bac + 1 ? Il semble bien que l'on n'ait pas encore apporté à cette question une réponse susceptible d'être reconnue comme satisfaisante par les intéressés.

La réponse traditionnelle, et qui demeure en vigueur dans beaucoup d'Universités en France et à l'étranger, est la suivante : on enseigne l'intégrale de Riemann (ou R-intégrale) dans le Premier Cycle universitaire, puis l'intégrale de Lebesgue (ou L-intégrale) au niveau du Second Cycle. Dans certaines sections moins ambitieuses, on enseigne la primitivation *stricto sensu :* une fonction f admet pour primitive F sur un intervalle I si F est une fonction dérivable *en tout point de* I et si $F' = f$. On note alors : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$; c'est l'*intégrale de Newton*, ou *N-intégrale.*

Cette façon de procéder n'est pas totalement satisfaisante car ces divers modes d'intégrabilité paraissent hétérogènes, et l'étudiant qui a passé du temps à assimiler l'intégrale de Riemann peut avoir le sentiment que c'était du temps perdu et qu'il doit tout reprendre à zéro lorsqu'il doit apprendre l'intégrale de Lebesgue.

Il y a une dizaine d'années, les programmes des classes de Mathématiques Supérieures et Spéciales ont vu disparaître l'intégrale de Riemann. Les professeurs étaient libres de choisir un mode de présentation de l'intégrale sur un segment, pourvu que le cadre choisi comprît les fonctions continues par morceaux (notamment en vue de l'étude des séries de Fourier). On pouvait notamment traiter l'intégrale des fonctions réglées, en tant que limites uniformes de fonctions en escalier sur un segment : c'est ce que Jean Dieudonné appelait "l'intégrale de Cauchy" ([5], p. 150). Pour les intégrales sur un intervalle quelconque, dites généralisées ou impropres, la définition demeurait la même, celle de Cauchy-Dirichlet : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$. On ne devait plus questionner les élèves à propos de l'*intégrabilité* d'une fonction : c'était désormais "hors programme".

A la rentrée 1996, est appliqué un nouveau programme de Spéciales qui conserve "l'intégrale de Cauchy" sur un segment : ses prétentions se bornent toujours à intégrer les fonctions continues par morceaux, ce qui refoule toujours la question de l'intégrabilité, mais on assiste au retour du refoulé pour l'intégrabilité sur un intervalle non compact, avec une terminologie spécifique à la classe de Spéciales : plus d'intégrales impropres convergentes, mais des "fonctions intégrables" sur cet intervalle. Intégrables au sens de *quelle intégrale* ? On a voulu sans doute une intégrabilité au sens de Lebesgue, mais restreinte aux seules fonctions continues par morceaux, et la question de l'intégrabilité d'une fonction n'est posée que sur un intervalle non compact.

Avec la nouvelle définition choisie, ne sont réputées exister que les intégrales ci-devant " absolument convergentes", ce qui exclut notamment les intégrales d'Euler-Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$ (la clothoïde, ou spirale de Cornu, perdra-t-elle son centre ?). N'est-ce pas payer un peu cher l'innovation pédagogique ? En prime, on a des théorèmes de convergence qui imitent les théorèmes attachés à l'intégrale de Lebesgue, à un détail près : la fonction-limite doit être *par hypothèse* continue par morceaux. Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, Maurice Guigue ([7]) a publié il y a onze ans la démonstration élémentaire des théorèmes de convergence possibles : il faut admettre en hypothèse l'intégrabilité de la fonction-limite.

Est-il opportun de remplacer les intégrales "classiques" (Newton, Riemann, Lebesgue) par des notions *ad hoc* propres à tel degré et tel secteur d'enseignement ? De telles constructions peuvent être élégantes et astucieuses, mais elles vont conduire à enseigner des notions qui, sans être vraiment simples, sont sans rapport avec l'authentique développement des mathématiques vivantes. Beaucoup se souviennent, comme professeurs ou comme élèves, des grands Cosinus et Sinus qui s'enseignaient en Première et Terminale C, il y a quelques années : les élèves peinaient à les apprendre et sitôt appris, il fallait les oublier car jamais aucune mathématique authentique n'a connu pareils objets. Mieux vaudrait imiter la sagesse de Bourbaki qui déclare en tête de ses Eléments : *"On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons"* (italiques d'origine).

Quelle intégrale enseigner alors ? Le malaise demeure et les opinions diffèrent. Mais ce qui est surprenant, c'est de ne voir mentionner nulle part dans ce débat une intégrale qui est apparue au début des années 60, qui est une véritable découverte mathématique et non une invention purement pédagogique, qui a une définition d'une simplicité comparable à celle de Riemann et une puissance supérieure à celle de Lebesgue, qui est déjà enseignée avec succès en Premier Cycle dans plusieurs Universités (en particulier, depuis vingt ans à Louvain-la-Neuve, en Belgique francophone), qui par ailleurs est l'objet de recherches des plus actives, et qui pourrait bien représenter une solution d'avenir au problème mathématico-pédagogique posé ici. C'est l'intégrale de *Kurzweil-Henstock.*

Une "nouvelle" intégrale

La notion-clé de cette "nouvelle" intégrale est celle, bien connue, des *sommes de Riemann.* Rappelons cette notion dans la situation la plus simple, celle d'une fonction f définie sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et à valeurs réelles. Pour définir une somme de Riemann, il faut d'abord une *P-subdivision* (ou *subdivision pointée*) du segment $I = [a,b]$: c'est un couple de suites finies de réels $\Pi = \left((x_j)_{0 \le j \le n},\ (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ telles que : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, et que : $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j \in \{1, 2,\ldots, n\}$. La *somme de Riemann* correspondante est alors :

$$S(I,f,\Pi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

On sait que la fonction f est *intégrable au sens de Riemann*, ou *R-intégrable* sur $I = [a,b]$ s'il existe un réel J jouissant de la propriété suivante : pour tout réel $\varepsilon < 0$, il existe un réel $\delta < 0$ tel que pour toute P-subdivision $\Pi = \left((x_j)_{0 \le j \le n},\ (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ du segment $I = [a,b]$ qui vérifie : $0 < x_j - x_{j-1} \le \delta$ pour tout $j \in \{1, 2,\ldots, n\}$, on ait : $|S(I, f, \Pi) - J| \in \varepsilon$. Ce réel J, s'il existe, est unique, et c'est l'intégrale de Riemann de f sur I : $J = \int_a^b f(t)dt$ (pour un exposé classique de la R-intégrale, on a l'embarras du choix : voir [3] ou [15] par exemple).

Quand une fonction f positive est R-intégrable sur $I = [a,b]$, il est bien connu que son intégrale représente l'aire du "trapèze mixtiligne" qui est l'ensemble des points situés "sous" la courbe représentative de cette fonction, et que la somme de Riemann est une approximation de cette aire. Supposons que l'on veuille empiriquement dessiner une somme de Riemann qui approche cette intégrale du mieux possible. Spontanément, nous ferons varier le "pas" $x_j - x_{j-1}$ de la subdivision en fonction de la manière dont varie f sur le segment $[x_{j-1}, x_j]$ qui contient ζ_j : si f subit là de "grandes" variations, il faudra prendre un pas "petit" pour que $f(x)$ ne puisse trop s'éloigner de la valeur $f(\zeta_j)$; si f ne varie pas beaucoup, un pas plus grand est possible. Cette simple observation se trouvait déjà dans un écrit d'Euler de 1768. C'est elle qui a conduit à la définition de la "nouvelle" intégrale découverte indépendamment par Jaroslav Kurzweil et Ralph Henstock en 1957 et 1961.

L'idée est la suivante : un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, on ne va pas majorer uniformément le pas $x_j - x_{j-1}$ de la subdivision Π par un réel constant $\delta > 0$, mais par une *fonction* strictement positive $\delta(\zeta_j)$, plus capable de s'adapter aux variations de la fonction f : cette fonction, on l'appellera une *jauge*.

Ceci demande encore deux (petites) définitions, et ce sera tout.

On appelle *jauge* sur $I = [a,b]$ toute fonction δ définie sur I et à valeurs réelles strictement positives.

Une telle jauge δ étant définie sur un segment $I = [a,b]$, une P-subdivision $\Pi = \left((x_j)_{0 \le j \le n}, (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ de I sera dite δ-*fine* si elle vérifie : $0 < x_j - x_{j-1} \le \delta(\zeta_j)$ pour tout $j \in \{1, 2,..., n\}$.

Nous pouvons alors définir l'*intégrale de Kurzweil-Henstock* (ou *KH-intégrale*).

La fonction f est *KH-intégrable* sur $I = [a,b]$ s'il existe un réel H jouissant de la propriété suivante : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que pour toute P-subdivision δ-fine Π du segment $I = [a,b]$, on ait : $|S(I, f, \Pi) - H| \le \varepsilon$. Ce réel H, s'il existe, est unique, et c'est la KH-intégrale de f sur I : $H = \int_a^b f(t)dt$.

Preuve de l'unicité de H : si deux réels H_1 et H_2 répondent à la question avec deux jauges δ_1 et δ_2, alors $\delta = Min(\delta_1, \delta_2)$ est une jauge et toute P-subdivision δ-fine est à la fois δ_1-fine et δ_2-fine, etc.

Pour que cette définition ait un sens, il faut établir le *lemme de Cousin* : pour toute jauge δ sur un segment I, il existe au moins une P-subdivision δ-fine Π de I.

Le lemme de Cousin

Le mathématicien français Pierre Cousin (1867-1933), élève de Henri Poincaré et de Paul Appell, a énoncé et démontré en 1895 une proposition qui concernait les parties bornées et fermées de $\mathbb{R}^2$, et qui a été plusieurs fois redécouverte et généralisée par la suite (voir [12]). Appliquée à un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, elle revient à affirmer, pour toute jauge δ sur I, l'existence d'une P-subdivision δ-fine Π du segment I. La démonstration peut se faire par l'absurde, par une méthode de dichotomie. Supposons qu'il n'existe pas de telle P-subdivision ; on considère les deux moitiés du segment I : $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. L'un au moins de ces deux segments n'admet pas de P-subdivision δ-fine. On l'appelle I_1 et on lui applique le même raisonnement. Et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés pour lesquels il n'existe aucune P-subdivision δ-fine. Ces segments ont en commun un point c. La longueur du segment I_n est $\frac{b-a}{2^n}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{2^m} \le \delta(c)$: la P-subdivision triviale de I_m constituée du seul segment I_m pointé par c est δ-fine, ce qui contredit l'affirmation précédente, selon laquelle il n'existerait aucune P-subdivision δ-fine pour aucun des I_n. *CQFD.*

Ce lemme se généralise comme suit. Soit K une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^p$, et supposons qu'à chaque $x \in K$ soit associée une boule fermée $\overline{B}(x, \delta(x))$, avec bien entendu $\delta(x) > 0$; alors, il existe une suite finie $(U_j)_{1 \le j \le n}$ de parties de K dont la réunion est K, et telle que $\zeta_j \in U_j \subseteq \overline{B}(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ pour tout $j \in \{1, 2,..., n\}$. Cet énoncé évoque le théorème de Borel-Lebesgue pour les bornés-fermés de $\mathbb{R}^p$, qui a conduit à la définition des compacts par les recouvrements ouverts, et il constitue une autre caractérisation des compacts d'un espace métrique.

Ces considérations peuvent être précisées dans le cas d'un *pavé* K de $\mathbb{R}^p$, qui est un produit cartésien de p segments de $\mathbb{R}$. On peut appeler *subdivision* d'un pavé K de

$\mathbb{R}^p$ une suite finie de pavés $(K_j)_{0 \le j \le n}$ dont la réunion est K et qui sont *non-empiétants*, ce qui signifie que pour $i \neq j$ l'intersection $K_1 \cap K_j$ est toujours d'intérieur vide. Une *Psubdivision* d'un pavé K de $\mathbb{R}^p$ est un couple de suites finies $\Pi = \left((K_j)_{1 \le j \le n}\ ,\ (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ où $(K_j)_{1 \le j \le n}$ est une subdivision de K, et où $\zeta \in K_j$ pour tout $j \in \{1, 2,..., n\}$. Une *jauge* sur K est encore une fonction δ définie sur K et à valeurs réelles strictement positives. Une P-subdivision $\Pi = \left((K_j)_{1 \le j \le n}\ ,\ (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ de K est dite δ-*fine* si l'on a : $K_j \subseteq \overline{B}(\zeta_j, \delta(\zeta_j))$ pour tout $j \in \{1, 2,..., n\}$.

Avec ces définitions, le *lemme de Cousin* s'énonce de même : pour toute jauge δ sur un pavé K, il existe au moins une P-subdivision δ-fine Π de K. Il se démontre comme dans le cas d'un segment de $\mathbb{R}$, par dichotomies (ou plutôt "2^p – tomies") successives, et avec le même argument de "pavés emboîtés" qui ont nécessairement une intersection non vide.

Avant que les programmes de Mathématiques Supérieures et Spéciales n'instaurent le tout-séquentiel, on enseignait la définition des compacts par les recouvrements ouverts, et certains résultats tombaient plus facilement, par exemple le théorème de Heine-Borel-Lebesgue sur la continuité uniforme, qui n'est d'ailleurs pas étranger aux considérations développées ici. Le lemme de Cousin fournit aussi une caractérisation de la compacité. Il conduit à des démonstrations des théorèmes fondamentaux de l'Analyse réelle, comme le Théorème des valeurs intermédiaires ou le Théorème des bornes atteintes sur un segment. En présentant ce théorème, on obtiendrait un enseignement des principes généraux de l'Analyse réelle qui serait cohérent avec l'enseignement du Calcul intégral. Nous y reviendrons plus loin.

L'intégrale de Kurzweil-Henstock sur un segment de $\mathbb{R}$

Notons d'abord que cette intégrale a les bonnes propriétés que l'on est en droit d'en attendre. L'ensemble $P(I\mathbb{R})$ des fonctions KH-intégrables sur un segment $I = [a,b]$ et à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On a la *linéarité* et la *positivité* de l'intégrale. On a la propriété de *restriction* : une fonction KH-intégrable sur un segment $I = [a,b]$ est KH-intégrable sur tout segment inclus dans I. On a aussi l'*additivité* relative aux segments d'intégration : si $c \in [a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

(Théorème de Chasles).

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est *continue* sur I, et *dérivable* en tout point où f est continue.

Pour démontrer la KH-intégrabilité d'une fonction sans connaître *a priori* la valeur de l'intégrale, on dispose du *critère de Cauchy* : la fonction f est *KH-intégrable* sur $I = [a,b]$ *ssi* pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur $I = [a,b]$ telle que, quelles que soient les P-subdivisions δ-fines Π et Π' du segment $I = [a,b]$, on ait :

$$|S(I,f,\Pi) - S(I,f,\Pi')| \le \varepsilon$$

Tout ceci peut se démontrer progressivement en reprenant les modes d'exposés traditionnels de l'intégrale de Riemann, *mutatis mutandis* (pour les démonstrations, voir [12], [13]).

Toute fonction R-intégrable sur un segment est KH-intégrable sur ce segment : les fonctions R-intégrables sont celles pour lesquelles il existe une jauge δ *constante*. On peut dire que ce sont les fonctions *uniformément* KH-intégrables. Les fonctions réglées sur un segment y sont donc KH-intégrables, ce qui comprend les fonctions en escalier, monotones, à variation bornée, continues par morceaux, continues, et leur KH-intégrale est égale à leur R-intégrale.

Voyons maintenant quelques nouveautés apportées par la KH-intégrale. Un exemple bien connu de non-R-intégrabilité est celui de la fonction indicatrice des rationnels, de Dirichlet. Prenons un exemple un peu plus général, qui comprend cette fonction comme cas particulier.

Soit un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, soit $D = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ une partie infinie *dénombrable* de I, et soit une fonction f définie sur I, nulle sur $I \setminus D$ et non nulle sur $D : f(a_k) = c_k \neq 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit une jauge δ sur I en posant : $\delta(a_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}\,|c_k|}$, et $\delta(x) = 1$ pour $x \in I \setminus D$. Soit Π une P-subdivision δ-fine de I, et soit la somme de Riemann

$$S(I,f,\Pi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \text{, as usual.}$$

Si $\zeta_j \in I \setminus D$, alors $f(\zeta_j)(x_j - x_{j-1}) = 0$. Si $\zeta_j \in D$, alors $\zeta_j = a_k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, d'où :

$$0 < x_j - x_{j-1} \leq \delta(\xi_j) = \delta(a_k) = \frac{\varepsilon}{2^{k+2}\,|c_k|}$$

et donc

$$|f(\xi_j)|\,(x_j - x_{j-1}) \leq |c_k| \frac{\varepsilon}{2^{k+2}\,|c_k|} = \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

Attention, le même $\zeta_j = a_k$ peut être élément de *deux* segments de la subdivision (qui sont alors consécutifs), mais pas de plus, et sa contribution à la somme de Riemann est donc majorée par *le double* du majorant que nous venons de trouver, soit : $\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On en déduit :

$$|S(I,f,\Pi)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|\,(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon$$

Cette fonction f se trouve ainsi KH-intégrable avec une KH-intégrale nulle, alors qu'elle n'est pas R-intégrable dans beaucoup de cas, notamment si $\overline{D} = I$.

Corollaire : si l'on modifie les valeurs d'une fonction KH-intégrable sur I en des points de I qui forment un ensemble infini dénombrable, alors la nouvelle fonction est encore KH-intégrable, et sa KH-intégrale reste la même.

C'est déjà un progrès, mais il y a plus : *toute fonction dérivée est KH-intégrable.* D'une façon plus précise : soit F une fonction dérivable sur $I = [a,b]$, et soit $F' = f$; alors, f est KH-intégrable sur I, et

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Dire que F est dérivable en tout point $x \in I$, c'est dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que $y \in I$ et $0 < |y - x| \leq \delta(x)$ impliquent : $\left|\dfrac{F(x) - F(x)}{y - x} - f(x)\right| \leq \varepsilon$. Autrement dit : $y \in I$ et $|y - x| \leq \delta(x)$ impliquent : $|F(y) - F(x) - f(x)(y - x)| \leq \varepsilon\, |y - x|$.

Si u et v sont des réels tels que $a \leq u \leq x \leq v \leq b$ et $v - u \leq \delta(x)$, alors $|F(v) - F(u) - f(x)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u)$ (pour le démontrer, couper en deux au niveau de x). La fonction $x \mapsto \delta(x)$est une jauge sur I. Soit$\Pi = \left((x_j)_{0 \leq j \leq n},\ (\zeta_j)_{1 \leq j \leq n}\right)$une P-subdivision δ-fine du segment $I = [a,b]$. On a :

$$|S(I,f,\Pi)-(F(b)-F(a))|$$

$$=|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})-(F(x_j)-F(x_{j-1}))|\leq\ldots$$

$$\ldots\leq\sum_{j=1}^{n}|f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})-(F(x_j)-F(x_{j-1}))|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(x_j - x_{j-1})=\varepsilon(b-a) \text{ . } CQFD.$$

Les deux modes élémentaires d'intégration, la primitivation (ou intégration au sens de Newton, N-intégrale), et l'intégration au sens de Riemann (R-intégrale), ne s'incluent pas l'un l'autre. Il existe des fonctions R-intégrables sur un segment et qui ne sont pas N-intégrables (autrement dit, qui ne sont pas primitivables, qui ne sont pas des fonctions dérivées), notamment celles qui ne satisfont pas à la propriété de la valeur intermédiaire, de Darboux (1875) : prendre par exemple une fonction en escalier discontinue. D'un autre côté, il existe des fonctions dérivées qui ne sont pas R-intégrables sur un segment, notamment celles qui ne sont pas bornées. En 1881, Volterra a même donné un exemple de fonction dérivée bornée non R-intégrable ([10], p. 100) ; voir aussi l'exemple de Croisot ([16]), que m'a communiqué L.G. Vidiani.

Désormais, la KH-intégrale apporte une synthèse : la N-intégrale et la R-intégrale en sont deux cas particuliers.

Prenons un exemple, donné par Lebesgue lui-même en 1902, dans sa thèse ("Intégrale, longueur, aire"). La fonction $F(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$, prolongée par $F(0) = 0$, est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$: $F'(x) = 2x\, sin\,\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ pour $x \neq 0$, et $F'(0) = 0$. Non bornée sur [0,1], cette fonction dérivée $f = F'$ n'est pas R-intégrable sur ce segment.

Mais ce n'est pas tout. Cette fonction dérivée $f = F'$ n'est pas non plus intégrable *au sens de Lebesgue* (*L-intégrable*) sur le segment [0,1], car si elle l'était, alors pour tout $x \in [0,1]$, on aurait :

$$\int_0^x f(t)dt = F(x)-F(0)=F(x)$$

et la fonction F devrait être *absolument continue*, donc *à variation bornée* sur [0,1]. Ce n'est pas le cas, ainsi que l'on peut s'en assurer en posant xj = $\sqrt{\frac{2}{2j+1}}$ pour $1 \leq j \leq n-1$, et $x_0 = 1$, et $x_n = 0$; on a : $1 = x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1} > x_n = 0$, et la somme

$$\sum_{j=1}^{n}|F(x_j)-F(x_{j-1})|$$

est la somme partielle d'une série divergente à termes positifs, non majorée quand n tend vers $+\infty$.

On voit par là que cette KH-intégrale, avec sa définition si simple pourtant, intègre des fonctions que l'intégrale de Lebesgue n'intègre pas.

Quid des intégrales impropres ?

Nous parlerons d'intégrales impropres, terminologie compréhensible par tous. Cherchons donc à KH-intégrer une R-intégrale impropre : par exemple la KH-intégrale sur I = [0,1] de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, prolongée en 0, mettons par $f(0) = 0$. Nous chercherons à adapter la méthode qui nous a conduit précédemment à intégrer une fonction dérivée. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitive : $F(x) = 2\sqrt{x}$ pour $x > 0$. On peut "concrétiser" le calcul précédent :

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{y}-2\sqrt{x}}{y-x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{|y-x|}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} \leq \frac{|y-x|}{x\sqrt{x}}$$

ce qui conduit à prendre pour jauge associée à un $\varepsilon > 0$ la fonction : $\delta(x) = \varepsilon x\sqrt{x}$ (pour $x > 0$), mais cette spécification n'est pas indispensable, il suffit de savoir que cette jauge existe. Soit $\Pi = \left((x_j)_{0 \leq j \leq n},\ (\zeta_j)_{1 \leq j \leq n}\right)$ une P-subdivision δ-fine du segment $I = [0,1]$.

Si $\zeta > 0$, l'étude générale précédente s'applique telle quelle et conduit au même résultat :

$$|S(I,f,\Pi) - 2| = |S(I,f,\Pi) - (F(1)-F(0))|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - (F(x_j) - F(x_{j-1}))\right| \leq \varepsilon$$

Si $\zeta = 0$, force est de traiter à part le premier terme du Σ, ce qui donne :

$$|S(I,f,\Pi) - 2| = |S(I,f,\Pi) - (F(1)-F(0))|$$

$$\leq |f(\xi_1)(x_1-x_0) - (F(x_1)-F(x_0))| + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq 2\sqrt{x_1} + \varepsilon$$

Ne pas oublier que notre P-subdivision Π est δ-fine, d'où : $x_1 = x_1 - x_0 \leq \delta(\delta_1) = \delta(0)$, que nous n'avons pas encore fixé. Choisissons $\delta(0) = \frac{\varepsilon^2}{4}$, et nous aurons :
$|S(I, f, \Pi) - 2| \leq 2\varepsilon$.

Nous constatons que la fonction F est KH-intégrable sur $[0,1]$, alors qu'elle n'y est pas R-intégrable, parce que non bornée. Nous avons obtenu la KH-intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ en tant que KH-intégrale *ordinaire*, comme la KH-intégrale de toute fonction KH-intégrable, et non en tant qu'intégrale impropre égale seulement à : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ (et non plus avec la nouvelle définition du programme de Spéciales).

Cette situation est générale. *Il n'y a pas de KH-intégrale impropre* ou plus exactement, il n'y en a pas besoin, en vertu du *théorème de Hake* (1921) : si une fonction f est KH-intégrable sur tout $[x,b] \subseteq]a,b]$, et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \int_x^b f(t)dt = H \in \mathbb{R}$, alors la fonction f est KH-intégrable sur $[a,b]$, et bien sûr $\int_a^b f(t)dt = H$ (pour la démonstration, voir [12] ou [13]).

La méthode de la borne variable ne s'en trouve pas obsolète pour autant, mais devient, de par le théorème de Hake, un moyen d'établir une KH-intégrabilité et de calculer la KH-intégrale subséquente. Dans le cas présent, nous savons que $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x}$ pour tout $x \in]0,1]$, déjà au sens de Riemann (ou au sens de Newton, comme primitive) ; nous savons aussi que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2$. D'après le théorème de Hake, il en résulte que la KH-intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ existe, et qu'elle est égale à 2.

On peut aussi définir une KH-intégrale sur un intervalle non borné, en définissant des sommes de Riemann généralisées qui comprennent un ou deux segments non bornés dont la longueur sera remplacée par 0, ou encore en considérant les P-subdivisions des *segments* inclus dans l'intervalle d'intégration, ou enfin par la définition traditionnelle avec borne variable :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Ici encore, le théorème de Hake assure l'équivalence de ces procédés (voir encore [12] ou [13]).

Tout ceci permet de définir la KH-intégrale sur un intervalle quelconque, borné ou non, fermé ou non.

Et l'on sauve les intégrales généralisées classiques citées au début du présent article, auxquelles nous attachent une longue tradition mathématique et d'importantes applications.

Puissance de la KH-intégrale

Une première différence avec la R-intégrale, c'est que la KH-intégrabilité de f n'implique pas celle de | f | : la KH-intégrale est une intégrale non-absolue.

Par exemple, la fonction : $x \mapsto \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$, prolongée par $0 \mapsto 0$, est une fonction dérivée (parce que $x \mapsto 2x \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ est la dérivée de : $x \mapsto x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$, et que $x \mapsto 2x \sin\frac{\pi}{x^2}$ est continue). Cette fonction : $x \mapsto \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ est donc KH-intégrable sur tout segment. Mais par ailleurs, la R-intégrale généralisée $\int_0^1 \left|\frac{2\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t^2}\right| dt$ est divergente, d'où il suit que la fonction $x \mapsto \left|\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right|$ n'est pas KH-intégrable sur [0,1].

On peut vérifier de plus que la KH-intégrabilité de | *f* | n'implique pas celle de *f*.

Les théorèmes de convergence, qui constituent l'un des grands progrès de la L-intégrale par rapport à la R-intégrale, sont satisfaits par la KH-intégrale.

On a le *Théorème de convergence monotone*, de Beppo Levi : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions KH-intégrables sur $I = [a,b]$, qui converge simplement vers une fonction f ; la fonction f est KH-intégrable *ssi* la suite $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Le *Théorème de convergence dominée*, de Lebesgue, doit subir une modification pour tenir compte du fait que la KH-intégrale est une intégrale non absolue. Il devient le *Théorème de convergence majorée & minorée* : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions KH-intégrables sur $I = [a,b]$, qui converge simplement vers une fonction f ; on suppose qu'il existe deux fonctions KH-intégrables g et h telles que g δ f δ h ; alors, la fonction f est KH-intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

On démontre que toute fonction L-intégrable (intégrable au sens de Lebesgue) est KH-intégrable (voir [6]) : la KH-intégrale est *strictement* plus puissante que la L-intégrale. Elle assure donc la synthèse des trois grands concepts d'intégrale qui ont marqué successivement la progression de la théorie de l'intégration : les intégrales de Newton, de Riemann, de Lebesgue.

De façon plus précise, les fonctions f qui sont L-intégrables sont *exactement* les fonctions f KH-intégrables telles que $|f|$ soit aussi KH-intégrable. Les fonctions L-intégrables sont les fonctions *absolument KH-intégrables*.

On peut donc *définir* l'intégrale de Lebesgue au moyen de la KH-intégrale, et en déduire tout ce qui s'ensuit : la théorie de la mesure, la notion de propriété vraie presque partout, les théorèmes classiques de convergence presque partout, etc. On obtient un exposé plus simple que tous ceux que l'on a pu lire auparavant, et qui est cohérent avec les autres modes classiques d'intégration.

Pour plus de simplicité, nous avons défini ici la KH-intégrale d'une fonction définie sur un segment (*resp.* un intervalle) de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Mais cette définition s'étend facilement à une fonction définie sur un segment (*resp.* un intervalle) de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: dans la définition ci-dessus, il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme, *as usual*.

Cette définition s'étend aussi à une fonction définie sur un *pavé* K de $\mathbb{R}^p$, à partir des P-subdivisions de K définies ci-dessus. Une *somme de Riemann* associée à une telle P-subdivision $\Pi = \left((K_j)_{1 \le j \le n}\,,\ (\zeta_j)_{1 \le j \le n}\right)$ est une somme :

$$S(K,f,\Pi)=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\mu(K_j)$$

où $\mu(K_j)$ est la *p-mesure* du pavé K_j, c'est-à-dire le produit des longueurs des segments dont K_j est le produit cartésien : c'est la longueur d'un segment pour $p = 1$, l'aire d'un rectangle pour $p = 2$, le volume d'un parallélépipède pour $p = 3$. La définition de la KH-intégrale s'énonce exactement comme pour un segment.

On peut ensuite définir une KH-intégrale sur une partie bornée de $\mathbb{R}^p$. D'où la théorie des intégrales multiples, le théorème de Fubini, etc. On peut également définir des KH-intégrales du type Stieltjes, des intégrales variationnelles, etc. Des difficultés apparaissent pour la KH-intégrale sur des parties non bornées de $\mathbb{R}^p$, $p \ge 2$: c'est l'objet de diverses recherches en cours.

Pour les démonstrations des propriétés de la KH-intégrale, voir les ouvrages cités en bibliographie, d'abord [12] et [13], et aussi [6], [9], [11].

Enseigner la KH-intégrale

Nombre de questions du programme de Mathématiques Supérieures et Spéciales demandent l'intégration de fonctions très régulières, de classe $\mathcal{C}^1$, ou $\mathcal{C}^p$, ou même $\mathcal{C}^\infty$. Pensons aux techniques de recherche de primitives des fonctions usuelles, aux relations de comparaison locale, aux développements limités, aux formules de sommation (Taylor–Laplace, Euler–MacLaurin,...), aux calculs approchés d'intégrales définies (Poncelet, Simpson, Gauss–Legendre,...), aux évaluations asymptotiques, etc... Dans ces situations, on n'a pas besoin d'une puissante théorie de l'intégration, la primitivation suffit, la primitivation *stricto sensu* : une fonction f admet pour primitive F sur un intervalle I si F est une fonction dérivable *en tout point de I* et si $F' = f$. On note alors : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, c'est l'*intégrale de Newton*.

Les programmes d'enseignement qui refoulent la question de l'intégrabilité laissent la porte ouverte à divers modes d'exposés intermédiaires qui définissent des primitives généralisées avec ensembles exceptionnels ; on ne sait plus exactement si l'on parle de primitive ou d'intégrale et l'on aboutit à des exposés bâtards bricolés pour traiter "le programme", mais d'où ne se dégagent pas les idées du développement des mathématiques authentiques. Mieux vaudrait opter clairement et couper l'exposé en deux : primitivation, puis intégration.

Dans la première partie, la *primitivation*, on peut admettre provisoirement le *théorème fondamental : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive*, et le démontrer dans la partie "intégration" car dans ce cadre la démonstration en est plus rapide. Cette façon de procéder n'a rien d'extraordinaire : par exemple, le *théorème de D'Alembert–Gauss*, théorème fondamental de l'Algèbre, se démontre mieux comme théorème d'Analyse : on l'admet pour avancer, et on le démontre lorsque c'est possible.

Reste la deuxième partie, l'*intégration*. Nous croyons que *l'on peut*, et même que *l'on doit* enseigner l'intégration *proprement dite* au niveau Math. Sup., car c'est une question mathématique de la plus haute importance, c'est un objectif primordial de l'instruction mathématique à ce niveau. Les mathématiques sont une discipline scientifique et intellectuelle à part entière, qui trouve en elle-même sa propre fin. Elles ne sont pas une discipline serve, et le contenu de leur enseignement à tel ou tel niveau ne saurait se décider en vertu d'arguments utilitaristes à courte vue, en fonction des besoins réels ou supposés d'autres disciplines. Et d'ailleurs, c'est en restant fidèles à elles-mêmes que les Mathématiques se montrent le plus utiles, en apportant aux autres disciplines scientifiques des outils puissants, que son développement spécifique a permis de créer.

L'intégrale de Kurzweil–Henstock est l'un de ces outils. Elle peut s'enseigner à Bac + 1. L'avantage est de poser la question de l'intégrabilité et d'en donner la réponse la plus moderne, et de présenter en un tout cohérent les modes d'intégration de Newton, Riemann et même Lebesgue : la R-intégrabilité apparaît comme la KH-intégrabilité *uniforme*, et la L-intégrabilité apparaît comme la KH-intégrabilité *absolue*. Le rêve d'enseigner l'intégrale de Lebesgue à Bac + 2 peut devenir réalité. Et accessoirement – mais est-ce si accessoire ? – un tel enseignement peut faire réfléchir sur le développement historique des concepts mathématiques et la diversité des réponses successives à un problème donné, en l'occurrence, celui de l'intégrabilité.

Par parenthèse, on peut même poser la question de l'enseignement de l'intégration au niveau Terminale : on enseignait bien l'intégrale de Riemann en Terminale C il y a quinze ans, et personne de sérieux ne peut affirmer que les jeunes d'aujourd'hui seraient moins intelligents que ceux d'hier. La science progresse impétueusement, et il serait logique que ces progrès se traduisissent par une hausse, et non une baisse du niveau de l'enseignement. Ceci exige de regrouper dans des classes *ad hoc*, le plus tôt possible, les élèves capables de recevoir cet enseignement : une filière Mathématique, telle qu'elle existait il n'y a pas si longtemps, avant qu'on ne la supprime sans raison. Dans une telle Terminale, on pourrait enseigner à nouveau l'intégrale de Riemann, qui ne serait plus alors "un exercice moyennement intéressant de la Théorie de la Mesure et de l'Intégration" ([5], p. 150), mais qui deviendrait une préparation adéquate à la KH-intégrale.

Pour voir concrètement comment pourrait se faire un enseignement de cette intégrale, nous disposons déjà de deux ouvrages : ceux de McLeod ([13]) et de Mawhin ([12]).

Le livre de McLeod ([13]) présente la KH-intégrale de façon complète et avec un grand choix d'exercices. Publié en 1980, il a ouvert la voie, mais il vaut mieux l'utiliser de pair avec des ouvrages plus récents.

Le livre de Mawhin ([12]) expose l'enseignement d'Analyse de Premier cycle dispensé à l'Université de Louvain-la-Neuve, en Belgique francophone, depuis vingt ans. Il a eu plusieurs éditions, et la dernière est de 1997. Il couvre un programme plus étendu que celui des deux années de nos Classes préparatoires. Il organise l'enseignement des théorèmes généraux de l'Analyse autour du lemme de Cousin, proposition ainsi dénommée par Mawhin, qui a su la découvrir et en apprécier l'intérêt. Il définit directement la KH-intégrale dans $\mathbb{R}^p$, au moyen de *P-partitions* de *semi-pavés,* qui sont des produits d'intervalles semi-ouverts $]a,b]$. Il comprend aussi un exposé de l'intégrale de Lebesgue, considérée comme cas particulier de la KH-intégrale. Des exercices complètent le cours, des citations de grands mathématiciens illustrent opportunément chaque chapitre. C'est un traité d'Analyse très riche, très fort, très original, très roboratif, dont on ne peut que conseiller la lecture à tout professeur, pour secouer la routine et aérer l'esprit : un ouvrage vraiment enthousiasmant, et qui de plus est écrit dans notre langue, la langue de Pascal, de Descartes et de Lebesgue.

Pour ceux qui veulent aller plus loin, on peut recommander les ouvrages de Ralph Henstock lui-même ([9]), de Peng-Yee Lee ([11]) et de Russell A. Gordon ([6]). Remarquez la diversité nationale des auteurs : l'intérêt pour cette intégrale se développe dans toutes les parties du monde.

Un peu d'Histoire

L'histoire de l'intégration est extrêmement riche, complexe et variée, on peut s'en faire une idée à la lecture des ouvrages de Paul Deheuvels ([3], [4]), de Ralph Henstock ([8]) ou de Jean-Paul Pier ([14]) cités dans la bibliographie. Sans nous appesantir sur les parties les plus anciennes de cette histoire vieille de 2500 ans, qui sont du plus haut intérêt mais sortent de notre présent propos, on peut dire que la notion même d'intégrabilité date de Riemann. Dans ses "Leçons sur l'intégration", parues d'abord en 1903 et rééditées en 1928, Lebesgue décrit ainsi le passage du point de vue de Cauchy à celui de Riemann : "Cauchy n'appliquait son procédé de définition de l'intégrale qu'à des fonctions considérées *a priori* comme intéressantes : les fonctions continues ; maintenant, au contraire, toute fonction sera intéressante à laquelle s'appliquera le procédé de définition" ([10], p. 24). Notons que le programme d'enseignement de Mathématiques Supérieures et Spéciales a suivi l'évolution inverse.

L'intégrale de Lebesgue a marqué un net progrès par rapport à l'intégrale de Riemann, en ce qu'elle s'est révélée capable d'intégrer une classe bien plus étendue de fonctions, qu'elle a résolu le problème des primitives pour les fonctions bornées, qu'elle a permis d'énoncer des théorèmes de convergence très efficaces, et qu'elle a produit une Théorie de la Mesure apte à se généraliser dans diverses situations.

L'intégrale de Lebesgue présente aussi des inconvénients : elle ne peut intégrer toutes les fonctions dérivées, et parmi les multiples types connus d'exposés classiques de cette intégrale, aucun n'est simple, et aucun n'est situé dans le prolongement de l'intégrale de Riemann.

Arnaud Denjoy et Oskar Perron ont défini indépendamment, en 1912 et 1914, de nouvelles intégrales pour permettre l'intégration des fonctions dérivées. Mais ces constructions étaient encore plus compliquées que l'intégrale de Lebesgue.

Entre 1921 et 1925, les travaux de Hake, Alexandrov et Looman ont établi l'équivalence des intégrales de Denjoy et de Perron. C'est à cette occasion qu'a été énoncé le théorème de Hake cité plus haut.

En 1957, Jaroslav Kurzweil (Tchèque, né en 1926) a publié un article consacré aux équations différentielles, qui introduit incidemment une intégrale particulière, basée sur une fonction de jauge. Ralph Henstock (Nord-Irlandais, né en 1923) a fait de même, indépendamment, dans deux articles publiés en 1955 et 1961. Sur le moment, nul n'a vu qu'il s'agissait d'un nouveau concept d'intégrale simple et puissant, d'une telle importance. Les comptes-rendus de ces deux articles dans les Mathematical Reviews n'y ont pas fait allusion..

En 1963, Henstock publie "Theory of integration" ([8]), qui entreprend l'étude systématique des possibilités de la nouvelle intégrale et la replace dans l'histoire de l'intégration. Cette intégrale se révèle équivalente à l'intégrale de Denjoy–Perron, donc plus puissante que celle de Lebesgue (voir [6] pour la démonstration). Divers travaux de recherche voient le jour autour de ce nouveau sujet.

Du point de vue de l'enseignement, il n'est pas nécessaire de reproduire dans nos classes les étapes de cette histoire : la KH-intégrale nous donne directement un exposé simplifié de l'intégrale de Denjoy-Perron et de l'intégrale de Lebesgue.

Des mathématiciens spécialistes de l'intégration et auteurs d'ouvrages sur l'intégrale de Lebesgue prennent conscience de l'intérêt de la nouvelle intégrale, publient des travaux qui lui sont consacrés, et en recommandent l'usage (Bartle, McShane, Pfeffer). La nouvelle intégrale est un sujet très actif au niveau de la recherche, dans divers domaines de l'Analyse, y compris l'Analyse non standard.

En France, cette nouvelle approche de l'intégrale rencontre peu d'écho. On peut citer les travaux de François Guénard, de l'Université d'Orsay, et un bref article de sensibilisation de Michel Emery paru dans "L'Ouvert" (IREM de Strasbourg) en mars 1987. Dans leur Cours de Mathématiques ([1], p. 354), Arnaudiès et Fraysse traitent en exercice la KH-intégrale en affirmant qu'elle est d'un intérêt limité, au motif que l'intégrabilité de f n'implique pas celle de $|f|$: au lecteur d'en juger.

En guise de conclusion

Il y a un problème : l'enseignement de l'Intégration, et une solution possible : l'intégrale de Kurzweil–Henstock. Par une ruse de l'Histoire, c'est le "retour à l'intégrale de Riemann" (voir [2]), qui pourrait bien nous permettre d'aller de l'avant dans ce domaine. Les conservateurs pourront saluer là l'union de la Tradition et de la Modernité. Les amateurs de dialectique hegeliano-marxiste y pourront lire un exemple de négation-de-la-négation et de développement en spirale de l'Histoire.

Quoi qu'il en soit, en Mathématiques comme ailleurs, il ne faut croire personne sur parole. Nous ne disons pas : "c'est ici la vérité, c'est ici qu'il faut tomber à genoux". Mais il semblerait peu sérieux de débattre de l'enseignement de l'Intégration sans prendre en considération la théorie la plus moderne, la plus unificatrice, la plus puissante, la plus compréhensible, l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Nous avons donc seulement voulu verser au dossier quelques informations sur ce sujet, qui semblent peu connues en France, et fournir des références permettant à chacun de se faire son opinion. La parole est aux acteurs de notre Education nationale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNAUDIÈS, Jean-Marie, FRAYSSE, Henri, *Cours de mathématiques-2, Analyse*, Dunod Université, Bordas, Paris, 1988.

[2] BARTLE, Robert G., "Return to Riemann Integral", *American Mathematical Monthly*, Vol. 103, N° 8, pp. 625-632 (October 1996).

[3] DEHEUVELS, Paul, *L'intégrale*, P.U.F., Paris,1980.

[4] DEHEUVELS, Paul, *L'intégrale*, " Que Sais-Je ? " n° 2250, P.U.F., Paris, 1986.

[5] DIEUDONNÉ, Jean, *Eléments d'Analyse, 1, Fondements de l'Analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[6] GORDON, Russell A., "The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock", *Graduate Studies in Mathematics*, volume 4, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[7] GUIGUE, Maurice, "Convergence d'une suite d'intégrales", *Revue de Mathématiques Spéciales*, 96, pp. 183-185 (janvier 1986).

[8] HENSTOCK, Ralph, *Theory of integration*, Buttherworths, London, 1963.

[9] HENSTOCK, Ralph, *Lectures on the theory of integration*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1988.

[10] LEBESGUE, Henri, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2e édition, 1928, réimpression Jacques Gabay, Paris, 1989.

[11] LEE, Peng-Yee, *Lanzhou lectures on Henstock integration*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1989.

[12] MAWHIN, Jean, *Analyse, fondements, techniques, évolution*, De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[13] McLEOD, Robert, "The generalized Riemann Integral", *The Carus Mathematical Monographs*, n° 20, The Mathematical Association of America, Washington, 1980.

[14] PIER, Jean-Paul, *Histoire de l'intégration, vingt-cinq siècles de mathématiques*, Masson, Paris, 1996.

[15] VALIRON, Georges, *Théorie des fonctions*, Masson, Paris, 1942.

[16] WARUSFEL, André, "Une dérivée bornée non intégrable", *Revue de Mathématiques Spéciales*, 89, p. 295 (janvier 1979).