REPERES - IREM . N° 31 - avril 1998

CALCUL D'AIRES ET CALCUL INTÉGRAL EN TS : UN ESSAI PÉDAGOGIQUE

Jean-Pierre DAUBELCOUR
IREM de Lille

INTRODUCTION

Reprenant les idées développées par H. Lebesgue, je défends dans cet article qu'il est utile et possible de respecter les fondements de la rationalité mathématique lorsqu'on aborde par les aires le chapitre Intégrale en terminale S.

Sans aller jusqu'au développement complet de la théorie de Riemann, il me semble que par le calcul des aires on peut construire de façon cohérente une intégrale qui soit pour l'élève chargée d'un certain sens lié à son appréhension concrète du monde, et par suite ne se réduise pas à un simple calcul de primitive.

Dans une telle entreprise, le problème didactique essentiel est le suivant : tant qu'on reste à un niveau purement intuitif, l'aire est assurément une notion simple et première, l'obstacle à son utilisation dans un développement cohérent tient au fait que pour lui garder son caractère intuitif et lui donner un statut mathématique, il faut la construire par des procédés limites non élémentaires : encadrements finis et passage à la limite dans la théorie de Riemann, sommations infinies et passage à la borne inférieure dans le cas de la théorie de Lebesgue.

"Les fonctions f continues sur [a,b] ont des primitives sur [a,b], et si F est l'une d'elles alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ". Etablir ce résultat est "simple" et à la portée des élèves de terminale si "l'intégrale est définie comme étant l'aire sous la courbe" ; malheureusement, pour montrer que l'aire sous une courbe continue existe comme objet mathématique bien défini, le processus d'encadrement et de passage à la limite de Riemann est nécessaire, et pour le réaliser il faut avoir recours au concept de continuité uniforme.

Sans chercher à escamoter cette difficulté et sans avoir recours à ce concept de continuité uniforme qui est résolument hors programme en terminale S, nous essayons dans ce qui suit de montrer par quel choix d'axiomes ou de propositions admises et géométriquement significatives il est possible néanmoins d'aborder le problème de la "mesure" en terminale de telle façon que l'élève puisse, quand il manipule des intégrales, simultanément faire fonctionner son intuition et exercer un contrôle sur ces intuitions, c'est-à-dire faire des mathématiques (1).

PREMIÈRE PARTIE : PRÉSENTATION DES CHOIX FAITS DANS LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

1. Problème de l'enseignement de l'Intégrale en TS (2)

Pour défendre ce point de vue, l'importance du sujet qui touche au difficile problème de l'Analyse au Lycée m'oblige à une présentation un peu longue, je demande au lecteur de m'en excuser.

Actuellement le calcul intégral tient une place importante dans le cours d'Analyse en Terminale S, comparable à celle de la dérivée en 1^{re} S.

Il génère les nouvelles fonctions : la fonction logarithme népérien est définie comme une primitive, c'est aussi une intégrale (3), la fonction exponentielle est l'application réciproque de la précédente, enfin les fonctions puissances d'exposant réel sont obtenues par composition des deux précédentes.

Les applications du calcul intégral traitées en TS : calcul d'aires, de volumes, de moments d'inertie, de centres de gravité, intensité efficace, la liste n'est pas exhaustive, réalisent un lien privilégié avec la Physique et fixent l'importance du concept.

Dans une autre partie du cours, dans la même TS, les résultats sur les limites, la continuité, les suites numériques trouvent un champ d'application prioritaire dans l'approche des nombres réels et la mise au point, pour ceux-ci, d'un certain statut (4). On retrouve la cohérence du Cours d'Analyse dans les questions où une suite est définie par une intégrale et dans le calcul approché des intégrales où celles-ci sont des limites de suites.

Comme pour toute question d'Analyse en TS, la difficulté existe. Les concepts doivent être dégagés progressivement, en ménageant les étapes sans lesquelles, l'élève, fut-il excellent, perdrait le sens.

(1) Je remercie tout particulièrement R. BKOUCHE de l'Université de Lille pour ses encouragements et ses conseils dans la rédaction de ce travail. Je suis reconnaissant également à Marie-Jeanne PERRIN et Marc LEGRAND pour leur patience à me relire et la pertinence de leurs remarques.

(2) Actuellement, en TS, l'intégrale d'une fonction continue est définie à partir des primitives dont l'existence est admise. Si F est une primitive de f sur [a,b] : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

(3) La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ; c'est à dire $\mathrm{Ln}x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

(4) Voir "Dichotomie : outil de calcul et de démonstration en TS", par J.-P. Daubelcour : IREM de Lille.

Justement, cette notion du sens doit-elle être un objectif prioritaire en TS ? La réponse ne souffre aucune hésitation ; si l'élève de T.S ne rencontre que quelques algorithmes, quelques formules d'algèbre permettant de calculer les intégrales proposées au baccalauréat, les procédés seront oubliés lorsqu'il commencera un DEUG., une classe préparatoire ; mais, plus grave, son approche du concept ne sera-t-elle pas faussée pour longtemps ? Prenons un autre exemple : la France est un des rares pays développés où un cours consistant sur les suites existe en 1° S puis en TS. Loin de se limiter aux progressions arithmétiques ou géométriques, on y étudie des généralités sur les suites : leur monotonie, leur convergence éventuelle, les propriétés liées à l'ordre, aux opérations sur les limites. Pour le moins, tout cela suppose en retour que le lycéen acquière à ce stade une certaine idée des nombres réels (5) ; que l'amorce d'un statut, certes non définitif, non exhaustif pour ces nombres, ait des conséquences fécondes pour la suite de son cursus mathématique. En effet, est-il légitime de développer par quelques méthodes liées aux suites (6) l'approche de nombres sur lesquels l'élève n'a absolument aucune ébauche de savoir, hormis le développement décimal qu'il lit sur sa calculatrice, qu'en restera-t-il une fois oubliés les procédés ? Là aussi son acquisition progressive des propriétés des réels n'est elle pas compromise pour longtemps ?

(5) C'est pourquoi je pense qu'il est absolument nécessaire d'admettre en TS que toute suite monotone et bornée converge ; résultat qui conduit aux suites adjacentes, lesquelles défissent un réel. C'était le cas dans le programme de 1994 (TS, spécialité math), mais ça ne l'est plus dans le programme applicable en 1998.

(6) Pour approcher la solution d'une équation, je pense par exemple à la dichotomie, au théorème du point fixe, ou encore la méthode des tangentes ; la liste est incomplète.

On peut rétorquer que pour la plus part des élèves de TS(spécialité Math) les mathématiques ne seront qu'un outil. Je me refuse à justifier par cette assertion une approche toujours plus minimalisée des mathématiques au Lycée : l'artisan qui ne connaît pas son outil ne sait pas l'utiliser au mieux. A une époque où l'on envisage l'activité professionnelle changeant plusieurs fois au cours d'une vie active, la formation initiale doit-elle signifier pour autant "saupoudrage" ? Je crois au contraire que sa qualité initiale est déterminante pour l'aptitude au changements futurs. Sur un tout autre plan, huit heures par semaines sont-elles toujours justifiées pour des objectifs toujours plus modestes ?

Ainsi, comme pour tout concept d'Analyse au Lycée, antérieurement à tout développement, les mêmes questions se posent :

a) faut-il réduire l'enseignement de l'intégrale après une activité préparatoire, où l'élève est guidé pas à pas par une suite de questions dont la cohérence lui échappe, à un développement exclusivement algébrique et algorithmique du calcul des primitives ?
b) faut-il se limiter à préparer le post-bac par une maturation du concept d'intégrale dans l'unique contexte "d'exercices" mettant en jeu les propriétés de l'intégrale, se refusant par principe toute séquence déductive ou démonstration (7) lorsqu'elle est possible en TS ?

(7) Je précise, pour éviter toute ambiguïté, que j'entends par démonstration dans ce texte le processus qui donne les "raisons de la vérité de certains théorèmes d'analyse élémentaire" ; et non les raisonnements hypothético-déductifs utilisés pour résoudre les exercice et problèmes proposés aux élèves.

Si l'on suit de près la définition conseillée par le programme en vigueur (voir la note 1 page précédente : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$) le risque est grand de tomber dans le travers a) ci-dessus. De plus, le côté "parachuté" de la définition est indéniable. Si elle permet de démontrer aisément les propriétés de linéarité et de positivité de l'intégrale, en utilisant les propriétés des dérivées [8] ; pour l'acquisition du sens "ça ne passe pas" comme sont nombreux à le dire les enseignants en post-bac. Enfin, avec cette définition, l'élève doit de nouveau "admettre", un énoncé important en TS : "L'aire sous la courbe Cf est $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ".

Dans ce contexte, le passage des primitives au calcul des aires est de l'ordre du miracle car particulièrement non signifiant pour l'élève.

Si l'on répond oui au b), aucune démonstration d'envergure en TS, c'est la pente actuelle, assez largement suivie dans le secondaire. Mais c'est aussi la perte de toute rationalité dans un Cours d'Analyse qui, par ailleurs, affiche très haut son ambition, notamment dans "LES OBJECTIFS GÉNÉRAUX" du programme [9] ; lesquels sont reconnus comme excellents par la grande majorité des enseignants.

J'ai bien entendu conscience que cette perte progressive de rationalité, depuis une dizaine d'années, commence dès le collège et se poursuit au Lycée. Le triptyque en vigueur actuellement : "Activités préparatoires, énoncé des définitions et propriétés admises, enfin applications de ces propriétés dans les travaux pratiques", conjugué avec l'absence de démonstration, tout cela me semble insuffisant pour l'accès du plus grand nombre de nos élèves "au sens" des démarches intellectuelles que nous leur enseignons. Or ce dernier objectif n'est-il pas un but à atteindre dans l'ouverture du Lycée au plus grand nombre ?

De plus, par effet pervers, certes non voulu par le législateur, cette perte de rationalité me paraît générer un obstacle nouveau. C'est un avis strictement personnel [10] : l'acquisition d'un niveau suffisant n'est pas toujours réalisée pour que tout élève, du plus petit Lycée de bourgade provinciale au plus réputé des Lycées des grandes villes, puisse réaliser son projet d'études scientifiques après le Baccalauréat, fut-il de haut niveau.

2. Présentation de l'enseignement proposé dans l'essai pédagogique

Je pense qu'il faut et que l'on peut remédier aux inconvénients énoncés ci-dessus. Voici, sous la forme d'un essai pédagogique que je justifie ici, le traitement de l'intégrale réalisé dans une classe de TS (Spécialité Maths). Je ne développe qu'une partie de l'étude, les grandes lignes sont données en annexe I.

L'objectif du travail est le traitement de

(8) Elles-mêmes admises en 1^{re} S.

(9) Ils sont quasiment les mêmes depuis le début des années 80, on les retrouvent pour l'essentiel dans le programme de 1994, année de création de la TS, ainsi que dans les programmes remaniés applicables à la rentrée 98.

(10) J'ai pu le vérifier ; par choix personnel j'enseigne depuis bien longtemps en terminale (M.E, TC, TS) dans un établissement de taille moyenne et dont le recrutement est réalisé pour l'essentiel dans des milieux modestes. Cet avis est partagé par beaucoup d'enseignants de Lycée ; notamment ceux qui n'ont pas de classes préparatoire.

la notion d'intégrale en TS. Bien entendu, il ne s'agit pas de définir l'intégrale au sens de Riemann. Nous poserons donc une définition provisoire du nombre $\int_a^b f(t)dt$, mais en ayant conscience que cette approche est pour l'élève un passage nécessaire et utile pour les reconstructions ultérieures.

Si le concept de dérivée est né historiquement de la nécessité de résoudre des problèmes de vitesse ou de tangentes à une courbe, on peut de même affirmer qu'après un long cheminement commencé avec Archimède, le concept d'intégrale est né du calcul de l'aire du domaine limité par une courbe.

1) Dans un premier chapitre, j'étudie l'évolution historique du concept d'aire par le calcul de l'aire du segment de parabole, d'abord par Archimède selon le procédé dit "par exhaustion", puis par Pascal avec les "indivisibles", enfin en utilisant les définitions posées par H. Lebesgue. Il ne s'agit pas bien sûr de la mesure de Lebesgue mais de la définition de l'aire des surfaces quarrables dans son ouvrage "La mesure des grandeurs" (11), à visée didactique, s'adressant aux enseignants de la classe de "Mathématiques" au début de ce siècle. L'étude de l'histoire d'un calcul comme celui-ci vise trois objectifs.

a) Le premier : mettre en évidence la diversité de la démonstration selon les époques. Celle d'Archimède est parfaite, mais d'une part elle suppose le résultat connu à l'avance ; d'autre part l'exigence d'une rigueur excessive a-t-elle peut-être freiné des découvertes plus importantes à cette époque ? (12) Par contre, la liberté que prend B. Pascal avec la manipulation des "indivisibles" peut choquer ; cependant il est reconnu que cette attitude, partagée par ses contemporains, a permis des avancées décisives vers le statut actuel du calcul intégral. Enfin la procédure proposée par H. Lebesgue nous permet de fixer le concept de façon élémentaire pour un élève de TS.

b) Le second objectif : le sens attaché par l'élève à la notion d'aire se précise progressivement lors du développement des trois exemples, jusqu'à atteindre avec H. Lebesgue un statut précis, applicable à quelques cas simples. Dans la foulée, ce sens est investi dans l'intégrale et ses applications.

c) Le troisième objectif : montrer comment, en TS, intervient l'intuition géométrique dans les démonstrations analytiques rigoureuses, et ainsi justifier la définition de l'intégrale comme une aire. Un exemple probant à cet égard est la démonstration de la proposition "la dérivée de l'aire sous la courbe est la fonction f elle-même" (13).

2) Introduire l'intégrale à partir de l'aire suppose que l'élève ait une idée suffisamment claire de cette notion, même

(11) En effet, au début du siècle, est introduit, pour la première fois dans la classe de "Mathématiques", un enseignement de l'intégrale. Celui-ci est promu par les plus grands mathématiciens de l'époque comme Henri Poincaré et H. Lebesgue. Ce dernier publiera entre les années 1930 et1935 des conseils destinés aux professeurs du secondaire ; ces conseils seront réunis ensuite dans l'ouvrage cité ci-dessus.

(12) C'est ce que pensent certains historiens des Sciences ; on peut le relever dans les notes historiques de BOURBAKI.

(13) Il s'agit de ce qu'on appelle parfois le théorème fondamental du calcul intégral, vu ici dans le cas particulier d'une fonction continue, positive et monotone.

si elle n'est pas définitive. Pour éviter une lecture ambiguë, je tiens à préciser le point de vue adopté au chapitre II : c'est celui d'H. Lebesgue dans son ouvrage "La mesure des grandeurs" cité ci-dessus. Dans ce texte l'auteur s'appuie sur la "Théorie des grandeurs", d'où le titre adopté. Partant de l'idée intuitive d'aire, familière à l'élève depuis le primaire, et choisissant un réseau T du plan qu'on peut indéfiniment subdiviser, il définit l'aire d'un domaine D. Le mot "domaine" ayant ici le sens, volontairement imprécis, qu'on lui donne en géométrie élémentaire.

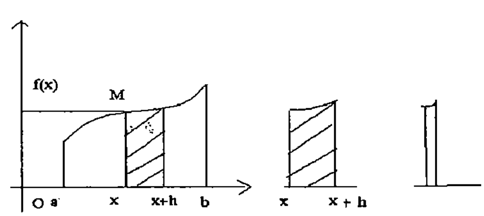
Dans un premier temps, il analyse les conséquences des propriétés intuitives de la fonction d'aire. Une unité d'aire étant choisie, celle du carré de côté un (unité de longueur), il démontre que les rectangles, les polygones ont une aire et que celles-ci ont les propriétés de l'aire rencontrée dans la pratique. Il en déduit un critère pour qu'un domaine ait une aire, cette fois indépendamment du choix d'un réseau initial. Il développe cette synthèse en vérifiant que l'aire qu'il a définie est bien celle qu'on voulait, qu'elle vérifie les propriétés intuitives de l'aire et qu'elle est déterminée de façon unique par le choix d'une unité.

C'est ainsi qu'il s'exprime (14) :

"De sorte que, même en considérant les mathématiques comme une science expérimentale, il est important de démontrer que les aires que nous venons de considérer sont entièrement déterminées par les conditions suivantes :
α– A chacun des domaines d'une famille de domaines dont font partie tous les polygones est attaché un nombre positif que l'on appelle son aire.
β– A un domaine formé par la réunion de deux autres extérieurs l'un à l'autre est attachée comme aire la somme des aires des deux autres.
γ– A deux domaines égaux sont attachées des aires égales.
De plus, on verra :
δ– Ces nombres aires sont entièrement fixés numériquement quand on connaît l'aire attachée à l'un des domaines."

Ces dernières propositions débouchent sur la nécessité d'un choix d'axiomes que nous donnerons à l'élève de TS en faisant remarquer qu'il s'agit exactement des "propriétés intuitives" ci-dessus.

Le choix de la Théorie des grandeurs fait par H. Lebesgue est justifié. Dans une étude récente, Maggy Schneider de l'Université de Louvain la neuve (15) en Belgique a développé les difficultés qui se posent à certains élèves du secondaire lorsqu'ils abordent le calcul intégral. Voici l'une de ces difficultés évoquées sommairement ici : pour démontrer le théorème fondamental du calcul intégral, les élèves ont à considérer l'aire hachurée S(x + h) – S(x), où $S(x) = \int_a^b f(t)dt$ (figure ci-dessous), et son comportement quand h tend vers 0.



(14) *In La mesure des grandeurs*, chapitre III, §31.

(15) *In Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides*, (1991).

Pour certains élèves, qui d'un point de vue strictement visuel voient la surface hachurée se réduire à un segment, la mesure de cette surface a pour limite la mesure de ce segment, soit f(x). Des grandeurs de dimensions distinctes sont mêlées dans le raisonnement de l'élève : S(x + h) – S(x) est l'aire d'une surface, alors que f(x) est la longueur d'un segment.

Dans la suite de son travail Maggy Schneider attribue à une approche ensembliste de la géométrie [16] l'origine de ce qu'elle appelle "l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions".

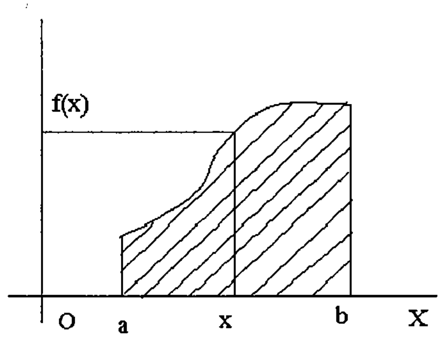
Ainsi on peut remarquer la disjonction :

a) la théorie de grandeurs fait une distinction très claire entre les différents types de grandeurs et leur mesure intervient de façon spécifique, comme longueur, aire ou volume ;
b) par contre le point de vue ensembliste ne fait pas de distinction entre ligne et surface, ce sont des parties du plan. Si on peut, du point de vue de la théorie des grandeurs, parler du périmètre et de l'aire d'un carré, on ne peut le faire d'un point de vue ensembliste, lorsque la figure devient un ensemble de points. C'est bien là qu'est l'obstacle.

3) Les raisonnements développés dans son ouvrage par H. Lebesgue ont pour objet de montrer **l'existence et l'unicité de l'aire** pour des surfaces quarrables simples comme les rectangles et les polygones par des procédés "relativement accessibles" à des élèves de terminale [17]. Par contre pour le sujet qui nous occupe ici : prouver que le domaine sous la courbe représentative Cf d'une fonction continue et positive sur a,b est quarrable, il n'y a pas hélas de démarche simple. Le procédé rigoureux le plus rapide consiste à développer la théorie de l'Intégrale de Riemann d'une fonction continue. Cette théorie prouve l'existence de cette aire et dans la même démonstration l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle I de R. La propriété sera donc admise pour les raisons citées dans l'introduction, s'ajoutant aux propriétés intuitives de l'aire que nous avons appelé axiomes.

4) Ayant ainsi exploré avec les élèves la notion d'aire, peut-on pour autant envisager comme définition provisoire de l'intégrale en TS : "l'intégrale d'une fonction continue et positive sur a,b est l'aire, au sens intuitif, du domaine Δ sous la courbe, $A(\Delta) = \int_a^b f(t)dt$" ?

Argumentons :



(16) L'élève, habitué qu'il est en géométrie à considérer segment, droite, plan comme des ensembles de points, considère les trapèzes mixtilignes de la figure ci-dessus également comme des ensembles de points.

(17) Dans son ouvrage *Sur la mesure des grandeurs*, H. Lebesgue ne cesse d'avertir le lecteur que les démonstrations qu'il présente ne sont pas toutes destinées à l'élève, notamment lorsque la difficulté est patente.

a) Cette définition fait appel à l'expérience des élèves, familiarisés dès le primaire avec l'aire associée aux polygones et les propriétés intuitives de celle-ci.

b) L'interprétation géométrique de l'aire sous la courbe rend intuitive pour une fonction positive certaines propriétés de l'intégrale : la linéarité, la positivité, les majorations.

c) Les calculs approchés de l'intégrale en interpolant f par des fonctions polynômes de degré 0, 1 ou 2 sont alors naturels puisqu'on approche une aire par une aire voisine.

d) pour rendre la définition opérante la propriété suivante est nécessaire : "Soit Δ le domaine sous la courbe Cf où f est continue et positive sur a,b ; alors l'aire de Δ est $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur [a,b]", c'est dans le contexte adopté ici la possibilité de "démontrer" ce théorème important d'Analyse élémentaire en précisant avec soin les prémisses afin d'éviter tout cercle dans le raisonnement.

e) enfin, citons la remarque de H. Poincaré en 1904 au musée Pédagogique, sur le problème de l'intégrale au lycée à propos de l'élève de la classe de Mathématiques : *"Il croit savoir ce qu'est une surface, et il ne comprendra qu'il ne le sait pas que quand il saura très bien le calcul intégral ; ce n'est donc pas au moment où il aborde ce calcul qu'il peut y avoir intérêt à le lui dire. Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et la courbe, montrer que quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même..."* ;

f) comme il est indiqué au c) il importe de montrer rapidement les méthodes de calculs approchés de l'aire pour ne pas réduire l'activité de l'élève au seul calcul algébrique des primitives des fonctions usuelles. De plus, ces calculs approchés, qui ont l'avantage, dans cette procédure, de découler directement de la **définition adoptée** pour l'intégrale et de son **interprétation géométrique**, sont aussi l'occasion dans le cas de fonctions continues et monotones de démontrer de nouvelles propriétés sur les suites et les intégrales [18]. Pour allier la rigueur à l'intuition dans cette démarche, il est nécessaire de les accompagner du calcul de majorants des erreurs, bien sûr lorsque celui-ci est suffisamment simple. Je développe ce calcul dans le Chapitre 3 [19] de ce travail sur l'intégrale en T.S en utilisant une interprétation géométrique de l'inégalité des accroissements finis ;

g) ayant posé cette définition de l'intégrale, il reste à montrer, et ce sera l'objet d'un 4° Chapitre, sur quelques exemples significatifs, l'importance du calcul intégral dans le développement des Sciences Physiques. C'est l'occasion de faire remarquer que les situations diverses qui se prêtent à un calcul d'intégrale, ont des propriétés communes : additivité, encadrements, passage à la limite, et aborder ainsi ce que certains appellent "la procédure intégrale.

5) Si une telle définition est adoptée

(18) La somme des aires des rectangles qui majorent où minorent l'aire sous la courbe sont des suites qui convergent vers l'intégrale.

(19) Voir le plan de l'étude complète en annexe 1.

dans un cours de TS, peut-on objecter que le temps requis pour les deux chapitres dépasse, en proportion, la place du sujet abordé ? Je ne crois pas pour l'avoir réalisé dans une TC puis une TS (spécialité maths) de niveau moyen. Pour le traitement des deux chapitres il faut compter dix ou douze heures, ce temps comprend le travail en classe des activités et la correction des travaux pratiques proposés aux élèves en travail à la maison ainsi que le développement par l'enseignant des parties intitulées "Cours". Argumentons de nouveau :

a) Le temps passé au Lycée à la démonstration de quelques propriétés importantes [20] de l'analyse élémentaire est-il du temps perdu pour l'élève et le futur étudiant ? Je pense le contraire, c'est la démonstration qui donne **"les raisons"** de la vérité des propositions, et son absence, c'est ce que je crois, a des conséquences néfastes [21] lors de la poursuite de son cursus après le baccalauréat. L'étudiant, confronté trop brutalement à de nécessaires formalisations [22], n'en verra par toujours les raisons ni la légitimité.

Je suis revenu récemment à l'Irem de Lille en 1994 pour y évoquer des textes comme celui-ci et rechercher des réactions sur certains choix pédagogiques déjà expérimentés et adoptés avec mes élèves depuis cinq ou six ans. Parmi d'autres confrontations le Colloque d'Analyse, organisé par l'Irem de Paris VII en juin 95, a permis de me situer dans le mouvement actuel. J'en ai retenu, pour le sujet traité dans cet article, essentiellement deux interventions :

– celle de Marc Legrand de l'Université de Grenoble sur "La procédure intégrale" au niveau du DEUG [23]. L'originalité de sa démarche et la synthèse qu'il en fait ont clarifié mon approche heuristique du concept d'Intégrale, et par suite ma maîtrise du sujet en terminale ;

– celle de Michèle Artigue [24] de l'IUFM de Reims dont les interrogations m'ont conforté dans les choix que j'adopte au regard de la démonstration dans cet article. Je la cite à propos de l'enseignement actuel au Lycée :

"Les choix faits au niveau de la formalisation, des définitions ou de leur absence ne sont pas non plus sans poser de problèmes. On peut se demander quelles répercussions ont les choix effectués sur la conception que se font les élèves du vrai et du faux en mathématiques, et si la difficulté réellē à engager le jeu des preuves et réfutations sur des bases aussi floues, ne renforce pas des fonctionnements peu scientifiques ou pilotés par le seul contrat didactique."

b) l'approche historique du Chapitre 1 est-elle un simple "plus" culturel pour sacrifier à ce qui serait une mode ? Ce n'est

(20) Ici les démonstrations d'Archimède, de B. Pascal, les axiomes et définitions de l'aire posés part H. Lebesgue, la propriété "L'intégrale est l'aire sous la courbe".

(21) De nombreux enseignants en DEUG, en IUT ou en classe préparatoire le pensent aussi.

(22) Dans tout ce texte j'utilise le mot "formel" ou "formalisation" dans le sens "vérification des conjectures qui peuvent être faites à l'issue d'un stade graphique ou calculatoire" : il s'agit donc dans le cas présent de démontrer. Cette terminologie est empruntée au pédagogue allemand Bruner.

(23) Voir "Procédure intégrale" DEUG A, Mai 92, par Marc Legrand.

(24) Voir *Réformes et contre réformes dans l'enseignement secondaire de l'Analyse au cours du XX^e siècle.*

pas mon avis, la description des approches successives de la notion d'aire participe à l'acquisition progressive du sens d'un concept difficile, celui "d'aire" derrière lequel on trouve celui de "mesure" ; et ce sens sera dans la foulée investi dans la définition de l'intégrale au chapitre 2. De plus l'évolution de la démonstration d'un même résultat selon les époques montre que la notion du vrai est liée au contexte, à l'avancement du savoir, et donne une dimension historique et humaine à ces spéculations souvent perçues comme abstraites.

Qui plus est, nous sommes au cœur des objectifs du programme de TS (25) en étudiant les encadrements nécessaires à la démonstration d'Archimède, puis les approximations dans les travaux pratiques (26) qui suivent la démonstration de B. Pascal, enfin la limite des suites qui définit l'aire d'un domaine selon H. Lebesgue. Notons encore que l'activité de l'élève, qui est un objectif premier au Lycée, reste qualitativement intéressante lorsqu'il démontre et découvre en exercice certaines propriétés géométriques de la parabole, lorsqu'il pratique la "méthode des rectangles", lorsqu'il approche le réel π par des suites.

Ainsi le travail réalisé par l'élève pendant ces heures ne se limite pas à la seule définition de l'intégrale mais touche aux aspects essentiels du programme d'Analyse en vigueur.

Les prérequis

L'étude développée ici suppose qu'un certain nombre de notions qui figurent au programme ont été abordées antérieurement :

– Les théorèmes sur les limites de fonction, la continuité en un point et sur un intervalle, enfin la dérivabilité en un point et sur un intervalle et la notion de primitive.

– Les théorèmes sur les limites de suites et en particulier la convergence des suites monotones et bornées (27) qui permet de définir un réel par deux suites adjacentes.

Remarque importante

Pour une meilleure lisibilité j'ai placé en annexes dans une troisième partie tous les énoncés proposés aux élèves lors du déroulement de l'essai. Ceci oblige le lecteur à se reporter régulièrement à ces annexes pour la compréhension mais j'espère ainsi bien marquer la part respective de l'activité de l'élève qui est importante dans ce travail. De ce fait, la numérotation des figures accompagnant ce texte procède de l'ordre du traitement des paragraphes avec l'élève et non celui de la pagination.

Parfois je donne en annexe des éléments de solution des problèmes pour que le lecteur puisse évaluer rapidement le degré d'approfondissement.

(25) Voir le plan de l'étude en annexe 1.
(26) Un développement élémentaire de "la méthode des rectangles".
(27) Ce résultat est admis dans le cours de TS (spécialité math), dans le programme de Juin 1994.

DEUXIÈME PARTIE : DESCRIPTION DE LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

L'enseignement a été réalisé dans une TS (Spécialité Maths). Nous donnons ci-dessous, dans cette deuxième partie de l'article, la description complète du déroulement des Chapitres 1 et 2.

CHAPITRE 1

ÉVOLUTION HISTORIQUE DU CALCUL DE L'AIRE DU SEGMENT DE PARABOLE

A. QUADRATURE DU SEGMENT DE PARABOLE PAR ARCHIMÈDE

1. Activité proposée aux élèves

Il s'agit de calculer l'aire du segment de parabole selon la méthode d'exhaustion utilisée par Archimède. L'activité consiste à proposer, en langage actuel, un énoncé démontrant deux résultats liminaires qui faciliteront la démonstration.

Les prérequis sont : équation de la parabole, dérivée et coefficient directeur de la tangente à une courbe, convergence des suites géométriques. (programme de 1^{re}S)

L'énoncé proposé aux élèves se trouve dans la 3^e^ partie en Annexe 2.

2. Cours : démonstration par Archimède (28)

Lemme 1. La différence entre l'aire du segment et l'aire du "triangle inscrit" est inférieure à l'aire de ce triangle.

Lemme 2. L'aire des "deux triangles ajoutés" est égale au quart de l'aire du "triangle inscrit" dans le segment de parabole.

A partir des lemmes ci-dessus (voir fig 1, 2 3 et 4 en annexe 2), nous reprenons en cours avec les élèves la démonstration d'Archimède en langage actuel.

Soit Σ l'aire du segment de parabole de corde [AC] (fig. 3). Suite à une duplication, le polygone inscrit a pour aire et il vient : $S_1 = 1 + \frac{1}{4}$; $S_1 < \Sigma$ et $\Sigma - S_1 < \frac{1}{4}$ (aire des triangles ajoutés). Après deux duplications, P_2 et son aire $S_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$ vérifient $S_2 < \Sigma$ et $\Sigma - S_2 < \frac{1}{4^2}$. Après n duplications, pour le $n^{ième}$ polygone inscrit P_n et son aire S_n ; $S_n < \Sigma$ et $\Sigma - S_n < \frac{1}{4^n}$ (aire des derniers ajoutés).

Donc $S_n = 1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^n}$. Or $\frac{1}{4} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3}$, ainsi : $\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3.4^n} = \frac{1}{3.4^{n-1}}$

Il vient :

$$S_n + \frac{1}{3.4^n} = 1 + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3.4^n}$$
$$= 1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3.4^{n-1}}$$

Après n − 1 simplifications du second membre, on obtient :

(28) Le procédé utilisé, dit "par exhaustion", déjà employé par Eudoxe et Euclide, consiste ici en un double raisonnement par l'absurde épuisant tous les cas. Notons qu'Archimède évite volontairement toute considération de l'infini.

$S_n = \frac{1}{3.4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3.4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; d'où la propriété suivante :

Lemme 3. Après un nombre fini de n duplications successives, on a :

$$S_n < \Sigma ; \Sigma - S_n < \frac{1}{4^n} \quad \text{et} \quad S_n + \frac{1}{3.4^n} = \frac{4}{3}$$

Il est nécessaire de préciser aux élèves qu'Archimède refuse toute passage à la limite, toute allusion à l'infini pour que sa démonstration soit "acceptée" dans le cadre de la mathématique grecque de l'époque (29) ; sinon ; pour l'élève de TS qui aurait le réflexe de passer à la limite, la démonstration s'achève ici. Archimède emploie un double raisonnement par l'absurde.

1^er^ cas

Si $\Sigma > \frac{4}{3}$; $\Sigma = \frac{4}{3} + u$ et $u > 0$. Après un nombre suffisant n de duplications, on peut rendre $\frac{1}{4^n} < u$ donc $\Sigma - S_n < u$; ainsi $\frac{4}{3} + u - S_n < u$ donc $\frac{4}{3} < S_n$. Ceci est impossible d'après le lemme ci-dessus.

2^e^ cas

Si $\Sigma < \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} = \Sigma + v$ et $v > 0$.

De même, après n duplications on peut rendre l'aire des triangles ajoutés $\frac{1}{4^n} < v$.

(29) On peut dire que le raisonnement suivi est "une descente finie sous un seuil donné".

Ainsi $\frac{1}{4^n} < \frac{4}{3} - \Sigma$; or $\frac{1}{3.4^n} = \frac{4}{3} - S_n < \frac{1}{4^n}$ ainsi $\frac{4}{3} - S_n < \frac{4}{3} - \Sigma$, donc $S_n > \Sigma$. Ce qui est impossible ; par conséquent $\Sigma = \frac{4}{3}$.

Théorème. L'aire du segment de parabole de base [AC] est $\Sigma = \frac{4}{3}$, l'unité d'aire est celle du triangle ABC, B est le point de l'arc AC où la tangente à la parabole est parallèle à [AC]. (Voir en annexe 2, la figure 2.)

B. Quadrature du segment de parabole par B. Pascal (30)

1. *Cours. Démonstration par la méthode des indivisibles* (31).

Les prérequis

Dans un traité sur la somme des puissances B. Pascal démontre les résultats suivants que nous admettrons ici : soit la suite arithmétique de raison r et de n termes, le premier étant 0,

$$S_1 = 0 + r + 2r + ... + (n-1)r$$
$$\text{alors } 2rS_1 = (n^2 - n)r^2 \qquad (a)$$
$$S_2 = 0 + r^2 + 4r^2 + ... + (n-1)^2 r^2$$
$$\text{alors } 3rS_2 = (n^3 - n)r^3 - 3r^2 S_1 \qquad (b)$$

Calcul de l'aire sous la courbe (C) ($y = x^2$) et les droites $x = 0$ et $x = 1$. Le repère est orthonormal. Soit Σ cette aire dans l'unité liée au choix du repère.

(30) C'est dans la conclusion du traité appelé *Potestatum numericarum summa* – somme des puissances des nombres (1655) – que l'on trouve cette démonstration par B. Pascal.

(31) On doit la notion d'indivisible à l'italien Cavalieri.

Chaque segment de droite [mM] est appelé "ligne" et considéré comme "indivisible", infiniment petit. Pour calculer Σ, B. Pascal fait la somme de ces "lignes" comme si elles étaient des rectangles de largeur "indivisible". Leur ensemble constitue une suite semblable à celle d'une suite arithmétique de raison "l'indivisible".

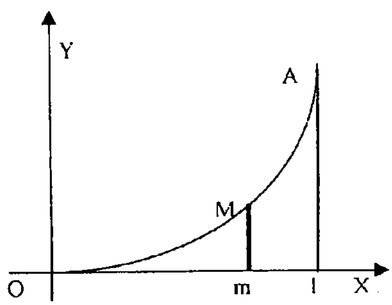


Fig. 5

Soit i l'indivisible, i.mM est l'aire d'un rectangle. Pour calculer l'aire Σ on envisage d'abord la somme des aires des rectangles.

Si on partage en n "indivisibles", les abscisses sont 0, i, 2i, ... (n – 1)i ; l'aire du $k^{ième}$ rectangle est $i \times (k^2i^2)$ et la somme des aire des n rectangles est $\Sigma_2 = iS_2$ (32) ; en reprenant la notation ci-dessus dans la formule (b) avec r = i, il vient :

$iS_2 = 0 + i(i^2) + i(2i)^2 + ... + i(n-1)^2i^2$
$3iS_2 = n^3i^3 - ni^3 - 3i^2S_1$; $ni = 1$
donc $(ni)^3 = 1$
et $3iS_2 = 1 - i^2(1 - 3S_1)$
donc $3\Sigma_2 = 1 - i^2 + 3i^2S_1$.

(32) iS_2 est la somme des aires des n rectangles, c'est pourquoi dans la formule b) Pascal ne simplifie pas par r.

En passant à la limite, et c'est l'audace de Pascal et ses contemporains, il considère i^2 comme négligeable par rapport à 1 (démarche qu'ont scrupuleusement refusée les Grecs). Il vient alors dans la dernière égalité : $3\Sigma = 1$ donc $\Sigma = \frac{1}{3}$. L'élève établira, en changent d'unité d'aire et considérant ce qu'Archimède appelait "le segment", que ce dernier résultat est équivalent à celui établi par Archimède 20 siècles plus tôt.

Théorème. Dans un repère orthonormé du plan, l'aire limité par l'axe de x, la Parabole $(y = x^2)$ et les droites $(x = 0)$ et $(x = 1)$ est égale à 1/3.

2. *Travaux pratiques*

La méthode des rectangles pour calculer l'aire du segment de parabole

S'inspirant directement de la méthode ci-dessus, mais en considérant des rectangles de largeur non plus "indivisible" mais 1/n, nous proposons aux élèves un calcul de l'aire du segment de parabole utilisant les résultats sur les suites connus en 1°S et TS. Les calculs confirment le résultat de B. Pascal, et de plus sont généralisables à d'autres domaines plans, pour un calcul exact ou approché de l'aire. *L'énoncé se trouve dans la partie III Annexe 3*

En conclusion de ces deux études, faisons le point sur le calcul des aires curvilignes au XVII^e siècle.

La méthode ci-dessus, utilisée par Pascal et d'autres contemporains, est assez féconde, puisqu'elle permettra, pour les fonctions du type $x \to x^n$ sur [0,1],de trouver l'aire $\frac{1}{n+1}$.

Soulignons que la méthode est inopérante pour trouver la valeur exacte, lorsqu'on ne peut atteindre la limite des suites(S_n), ce qui est la plupart du temps le cas.

Il faudra attendre **Leibniz (1674)** pour savoir clairement que "Le problème des quadratures est le problème inverse des tangentes." Pour la première fois est énoncé le lien entre le calcul des aires et les primitives d'une fonction.

C. NOTION D'AIRE SELON H. LEBESGUE (33) APPLICATION AU SEGMENT DE PARABOLE

Notons à ce stade une précision importante : l'emploi du mot mesure dans l'expression "mesure des aires" rappelle qu'il faut avoir **nécessairement** choisi une unité pour pouvoir parler de l'aire.

En TS, l'aire n'est pas une entité différente du nombre qui la mesure dans l'unité choisie, en conclusion l'aire est un nombre positif et dans la suite de ce texte il n'y aura pas d'aire sans unité choisie initialement.

Dans les parties A et B de notre étude, nous avons admis que l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont pour mesure a et b dans l'unité u est le produit a.b dans l'unité ; on en déduit alors la mesure de l'aire d'un triangle. Il a été admis que les polygones inscrits dans le segment de parabole avaient une aire, inférieure à Σ, dont l'existence est aussi admise. Il est logique de se poser à ce stade les questions d'existence et d'unicité à propos d'aire des domaines simples du plan. Bien qu'étant à la portée des élèves, nous constatons que les réponses apportées par H. Lebesgues sont souvent trop longues ou les calculs trop lourds pour être exposés en classe ; nous nous limiterons donc à résumer sa démarche.

(33) Nous plaçant résolument dans le cadre de la théorie des grandeurs, la longueur d'un segment est un nombre réel positif désignant, par abus de langage, sa mesure dans une unité choisie ; de même pour l'aire d 'un domaine ce sera un réel positif désignant la mesure de l'aire dans une unité choisie.

1. Activité proposée aux élèves

"Sur un texte d'H. Lebesgue"

Dans son introduction au chapitre sur la mesure des aires H. Lebesgue dit :

"Pour évaluer les longueurs des différents segments AB portés par une droite, nous avons construit sur cette droite, à partir d'un point ω et dans les deux sens, une graduation en unités U, une graduation en unités U_1 (34) etc. Et c'est la comparaison de AB à la graduation totale T, à intervalles indéfiniment petits, ainsi obtenue qui permettait de définir et d'évaluer la longueur de AB. Nous procéderons exactement de la même manière.

Soit, donné en position dans le plan considéré, un carré C, soient ωx et ωy les droites portant deux de ses côtés. Parallèlement à ωx, traçons toutes les droites dont les distances à ωx sont des multiples entiers du côté C, faisons de même parallèlement à ωy. Nous couvrons le plan d'un réseau R de carrés égaux à C, que nous appelle-

(34) $10\,U = U_1$.

rons les carrés U. Subdivisons les côtés de ces carrés en dix parties égales, par les points de subdivision menons les parallèles à ωx et ωy, nous obtenons un réseau R_1 de carrés qui sont dits les carrés U_1. On passe de même à un réseau R_2 de carrés U_2 etc. La réunion de tous ces réseaux donne ce que nous appellerons le réseau total T déduit de C. C'est par comparaison à T que nous allons définir et évaluer les aires."

Calcul sur un exemple

Pour expérimenter la méthode décrite ci-dessus par H. Lebesgue, on se donne un domaine D tracé sur une feuille de papier millimétré ; on propose aux élèves d'en déduire un encadrement de l'aire de D, le meilleur possible, par rapport à l'unité choisie, ici le carré U de 10cm de côté. *On trouve l'énoncé proposé dans la partie III en Annexe 4.*

2. *Cours : Définition de l'aire par H. Lebesgues*

Reprenons la méthode décrite dans le texte d'H. Lebesgue pour la définition ci-dessous.

Définition. On définit ainsi, en imaginant que le procédé vaut pour tous les réseaux R_i, i entier supérieur à 1 ; deux suites de nombres réels : $\frac{n_i}{100^i}$ et $\frac{N_i}{100^i}$.
Lorsque ces deux suites sont adjacentes, elles convergent vers le même réel L, ce réel est appelé l'aire de D par rapport à l'unité U.

Applications de la définition

a) Aire du rectangle. A partir de cette définition, H. Lebesgue démontre que l'aire d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes du quadrillage et de dimensions a et b est a.b. Lorsque a et b sont des nombres décimaux, les deux suites citées dans la définition sont constantes à partir d'un certain rang, c'est un bon exemple à traiter avec l'élève car les côtés du rectangle sont confondus avec les lignes de réseaux R_i ou R_j, et le résultat a.b est immédiat. Par contre si a ou b sont non décimaux, ils sont définis par leur développement décimal illimité, et la démonstration est trop longue pour l'enjeu ; perdant ainsi son intérêt en TS.

b) Aire des polygones. Nous admettrons aussi qu'un segment a une aire nulle, résultat clé pour montrer que les polygones ont une aire. Nous admettrons que l'aire des rectangles existe lorsque les côtés ne sont pas parallèles au quadrillage, ce que H. Lebesgue appelle l'invariance par déplacement.

3. *Une condition nécessaire est suffisante pour qu'un domaine ait une aire (Cours)*

Pour s'affranchir du choix du réseau T qui couvre le plan, H. Lebesgue démontre la propriété suivante (35) :

Théorème. *"Pour qu'un domaine D ait une aire, il faut qu'il puisse être couvert par un polygone E et qu'il couvre des polygones I, extérieurs les uns aux autres, et de manière que l'aire de E surpasse la somme des aires des I d'aussi peu que l'on veut. La réciproque est vraie."*

(35) *In La mesure des grandeurs*, Chapitre II, page 40.

Nous en tirons le corollaire suivant, plus pratique à utiliser par nos élèves :

Corollaire. Pour qu'un domaine plan D ait une aire, il faut et il suffit qu'il existe deux suites de polygones "inclus" dans D et "recouvrant" D, et que leurs aires respectives (S_n) et (S_n) soient deux suites adjacentes ; l'aire de D est leur limite commune L.

4. Application au calcul de l'aire du segment de parabole

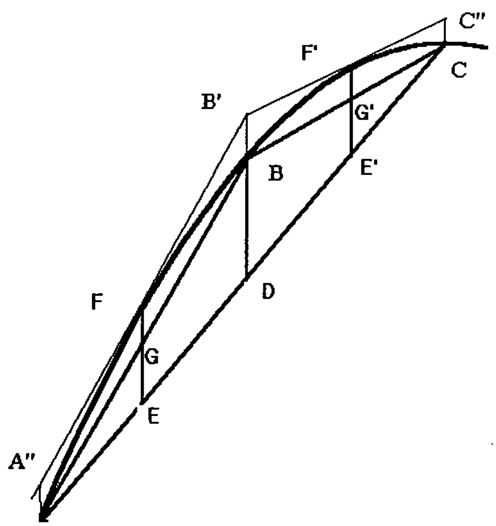


Fig. 7

Reprenant le fil conducteur de cette étude, nous posons la question : le segment de parabole admet-il une aire selon H. Lebesgue ? et si oui que vaut-elle ? Revenons aux notations du A *(aire selon Archimède)*, et utilisons les résultats géométriques du segment de parabole démontrés alors.

Soit ABC le "triangle inscrit" dans le segment de parabole relatif à la corde AC, soit D le milieu de [A,C], et (BD) le "diamètre" relatif aux cordes parallèles à (AC). L'aire du triangle ABC est choisie comme unité d'aire. Revenons à la figure 4 (voir annexe 2). Le polygone inscrit est le triangle ABC. Le polygone contenant le segment est le parallélogramme ACC'A'. Après la première duplication (fig. 7), le polygone circonscrit est AA"FB'F'C"C . On pose S_n et s_n les aires respectives des polygones circonscrits et inscrits après n duplications. Nous avons démontré les résultats suivants au A :

$$s_0 = 1 \; ; \; S_0 = 2 \; ; \; S_0 - s_0 = 1 \; s_1 = 1 + \frac{1}{4} \; ;$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \; ; \; S_1 - s_1 = \frac{1}{4}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} \; ;$$

$$S_n = s_n + \frac{1}{4^n} \; ; \; S_n - s_n = \frac{1}{4^n}$$

Les suites (S_n) et (S_n) sont adjacentes (résultat aisé à établir), elles ont donc une limite commune L. puisque (S_n) est la somme des n + 1 premiers termes d'une suite géométrique de raison 1/4, il vient donc :

$$L = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Ceci prouve, d'après le corollaire du paragraphe précédent, que, selon H. Lebesgue, le segment de parabole admet une aire et celle ci vaut $\frac{4}{3}$unités d'aire. Ainsi la boucle est bouclée, si l'on peut dire ; les calculs d'Archimède et de Pascal sont exacts et correspondent au concept d'aire contemporain, précisé par H. Lebesgue.

3. Travaux Pratiques : aire du disque de rayon 1, approche du réel π.

Le disque admet-il une aire selon H. Lebesgue ? Le résultat étant connu par un élève de TS, l'intérêt réside ici dans la méthode : une approche "naturelle" de l'irrationnel π. Je propose ce problème classique sous la forme de Travaux Pratiques en application du corollaire. *On trouvera l'énoncé proposé aux élèves dans la partie III Annexe 4*

REMARQUE. L'échec relatif, au plan du calcul [36], (voit annexe 4 : résultats numériques.) est ici particulièrement intéressant. En effet, le résultat étant connu, à savoir π, la méthode théorique ne pouvant être mise en cause, l'élève constate les limites de sa machine. Le savoir-faire sur une calculatrice est insuffisant, le savoir mathématique reste donc essentiel pour une utilisation raisonnée de cet outil. Cette "leçon"est capitale pour l'attitude de notre élève au regard des matériels toujours plus performants qu'on lui propose. Enfin cet exercice pose le problème d'une approche de π par un procédé plus adapté ; par exemple le calcul approché de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ par la méthode du point médian au chapitre 4 du travail sur l'intégrale(voir annexe 1 pour le plan de l'étude).

(36) La formalisation qui consiste à prouver que les suites (S_n) et (s_n) sont adjacentes n'est pas proposée aux élèves car elle conduit à des calculs trop complexes.

CHAPITRE 2

DÉFINITION DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE [a,b]

1. Problématique en terminale

Il est intuitivement évident, pour l'élève, que le domaine sous la courbe admet une aire. Si on désire prouver cette assertion par les conditions énoncées ci-dessus par H. Lebesgue, il n'est pas possible de le faire en Terminale. Pourquoi ? Tout simplement parce que le moyen rigoureux "le plus rapide" pour le prouver nécessite l'intégrale de Riemann. Pour illustrer ceci, rappelons brièvement le traitement de ces questions après le Bac.

Définition de l'intégrale simple après la terminale (un plan sommaire)

Soit (d) une subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de [a,b]. Les sommes de Darboux sont :

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i \quad \text{et}$$

$$S(d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \ ;$$

M_i et m_i sont les bornes atteintes par f sur $[x_i, x_{i-1}]$ en x'_i et x''_i.

$$\text{Donc } S(d) - s(d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i).$$

Dans ce rapide survol, passons sur la définition de l'intégrale au sens de Riemann, énonçons un critère d'intégrabilité sur les sommes de Darboux : f continue sur [a,b] est intégrable si, quel

que soit le réel positif ε, il existe au moins une subdivision (d) telle que :
$|S(d) - s(d)| < \varepsilon$

Or si f est continue sur un segment, elle y est *uniformément continue,* et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta < 0, \forall x' \text{et} x'' \in [a,b]\,;$$

$$\left(|x'-x''| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

Soit (d) une telle subdivision de [a,b] dont le module est $< \eta$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta < 0, \forall x' \text{et} x'' \in [a,b]\,;$$

$$\left(|x'-x''| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

$$|x_i' - x_i''| \leq |x_i - x_{i-1}| < \eta; \quad M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a};$$

$$0 \leq |S(d) - s(d)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Les ensembles de nombres S(d) et s(d), adjacents ont même borne notée
$i = \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique du résultat en termes d'aire

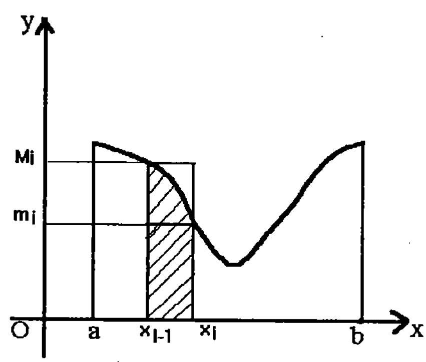


Fig. 10

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i = S(d)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i = s(d)$$

sont respectivement les aires d'un polygone contenant le domaine courbe et d'un polygone inclus dans ce domaine sous la courbe. Les polygones sont ici la réunion des rectangles qui contiennent Δ et la réunion de ceux inclus dans Δ.

Ainsi, lorsque f est intégrable, ce sont des sommes de Darboux adjacentes ; elles convergent vers le nombre $i = \int_a^b f(x)dx$.

D'après la condition donnée par H. Lebesgue le domaine sous la courbe admet donc une aire, égale à ce nombre I.

Conclusion

En TS la continuité uniforme est résolument hors programme, nous admettrons donc que le domaine Δ sous la courbe admet une aire lorsque f est continue et positive sur le segment [a,b]. L'objectif à atteindre est donc de choisir une définition provisoire de l'intégrale qui réponde aux conditions suivantes :

a) donner une certaine épaisseur sémantique à la notion d'intégrale, qui perdure après le baccalauréat et permette des reconstructions aisées. C'est la recherche du sens.

b) Poser une définition qui apporte un concept nouveau dont l'utilité pour l'élève soit immédiatement perceptible et en relation avec le problème de la mesure, qui lui est déjà familier pour beaucoup de grandeurs.

c) Enfin disposer d'une définition qui permette, dans le cas des fonctions continues et monotones d'établir, par l'exposé de quelques séquences déductives, une certaine rationalité dans le cours d'Analyse.

Pour les raisons déjà indiquées, lors de 1re partie dans l'introduction sous le titre **"argumentons"**, la définition de l'intégrale comme étant l'aire sous la courbe convient à ces exigences. Il faut cependant bien préciser ce qui peut être dit sur l'aire en TS pour que la définition soit mathématiquement fondée ; ce qui nous conduit à poser les axiomes des domaines quarrables et admettre que l'aire sous une courbe continue existe.

2. Déroulement du Chapitre 2. Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a,b]. (Cours)

2.1. Propriétés intuitives ou axiomes de l'aire

Nous admettrons les propriétés suivantes :

a) Si X et Y sont deux domaines disjoints admettant une aire, alors $X \cup Y$ a une aire, et $\text{Aire}(X \cup Y) = \text{Aire}(X) + \text{Aire}(Y)$.

b) Si X et Y ont une aire et $X \subset Y$ alors Aire(X) $X \leq$ Aire(Y) Y.

c) Tout rectangle R a une aire. Si on choisit pour unité d'aire celle du carré de côté un, si a et b sont les dimensions du rectangle, alors son aire est ab.

Propriété admise en T.S. Si f est continue et positive sur[a,b], alors le domaine Δ défini par : $M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ admet une aire.

Remarques : "Les segments et les domaines réduits à un point ont une aire" est une conséquence de la propriété c). Notons aussi, comme conséquence de ces trois propriétés, que des domaines admettant une aire et isométriques ont même aire.

2.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive en Terminale S

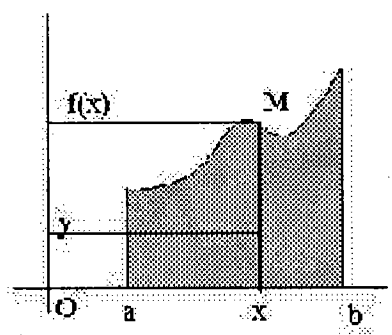


Fig. 11

Définition. Soit la fonction f, continue et positive sur [a,b] (a < b) et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. On appelle intégrale de f de a à b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe, l'axe x'Ox et les droites x = a et x = b. On note : $\text{Aire}(\Delta) = \int_a^b f(x)dx$ unités d'aire ; l'unité d'aire étant celle du carré de côté 1.

On lira : "somme de a à b de f(x)dx". Dans cette notation le produit f(x)dx rappelle l'aire d'un "petit rectangle" de largeur dx et de longueur f(x), le symbole $\int$ signifie la somme de ces rectangles, après passage à la limite comme on l'a vu dans l'Activité au chapitre I(B 2).

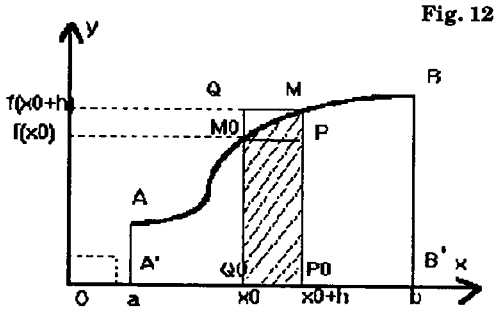
Pour l'instant, on peut écrire : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Les aires des rectangles étant connues, on peut aussi écrire : $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$, où k est une constante réelle sur [a,b] ; $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, l'aire du triangle étant connue également. Le problème est désormais de calculer les intégrales par un moyen différent, si possible qui n'implique pas systématiquement le calcul préalable d'une aire, ce fut le travail des plus grands comme Leibniz et Newton.

REMARQUE : le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de Δ dans l'unité d'aire qui est celle du carré de côté 1 construit dans le repère orthonormé fixé dans la définition.

On notera $A(\Delta) = \int_a^b f(x)dx$ unités d'aire.

2.3. *Intégrales et primitives*

Fig. 12



Soit donc f continue positive et monotone, par exemple croissante sur [a,b].

Pour $x_0 \in [a,b]$ on note $A(x_0)$ l'aire du domaine Δ_0 tel que :

$M(x,y) \in \Delta_0 \Leftrightarrow a \leq x \leq x_0$ et $0 \leq y \leq f(x)$

Ce domaine, sur la figure 12, est limité par la courbe Cf, Ox et les droites (A'A) et (Q_0M_0).

Nous avons admis que son aire existe et c'est par définition : $A(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$

Si x_0 subit un accroissement positif $x_0 + h$, *la figure 12 illustre une conséquence de la monotonie de f* : l'accroissement correspondant d'aire sous la courbe (la partie hachurée) est encadré par les aires des deux rectangles $M_0Q_0P_0P$ et QQ_0P_0M, puisque ici f est croissante. Traduisons ces propriétés géométriques en termes de fonctions et d'inégalités. Supposons $x_0 \in]a,b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$, $A(x_0 + h) - A(x_0)$ est l'aire du domaine hachuré ci-dessus. Les axiomes du §1 entraînent pour les aires des rectangles cités :

$$hf(x_0) \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq hf(x_0 + h)$$
$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

Puisque f est continue sur [a,b], en particulier en x_0, le passage à la limite et "le théorème de gendarmes" appliqués à la seconde inégalité donnent :

$$\lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

et

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0) \qquad (1)$$

De façon analogue on démontre :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0) \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) signifient que A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$.

On démontre de même que : $A'(a) = f(a)$ et $A'(b) = f(b)$. Ainsi la fonction A est dérivable sur [a,b] et A' = f. C'est à dire : $\forall x \in [a,b]\ (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$.

Donc la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur [a,b], celle qui s'annule en a. La fonction f admet donc des primitives sur [a,b]. Si F est une primitive quelconque de f sur [a,b] alors : $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$; pour x = a, C = –F(a) ; si x = b, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Théorème 1. Si f est continue, positive et croissante (resp. décroissante)sur [a,b] alors la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur [a,b] qui s'annule en a. Si F est une primitive quelconque de f sur [a,b] alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ce résultat essentiel permet de ramener les calculs d'aires à celui de primitives.

En TS, c'est uniquement par lecture inverse du tableau des dérivées que l'on atteindra les primitives. Ceci limite considérablement son efficacité ; c'est une bonne raison pour introduire le plus tôt possible les méthodes simples de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, des trapèzes, ou du point médian, et parfois celle de Simpson comme barycentre des deux précédentes).

REMARQUE. Il est nécessaire d'insister sur le fait que ce Théorème 1 n'a pu être démontré qu'en admettant le travail le plus difficile *"l'aire sous la courbe existe"*. Dans cette séquence déductive, développée en TS, la cohérence existe ; mais bien entendu dans sa formation ultérieure, l'étudiant en DEUG ou en classe préparatoire sera "replacé" devant le problème de l'intégrale de Riemann. Cette démarche est comparable à celle qui consiste à admettre en DEUG le théorème de d'Alembert, également signifiant pour l'étudiant, pour le démontrer en Licence.

Dans la suite de l'essai, nous nous posons la question : "Peut-on donner un sens géométrique, en termes d'aire à F(b) – F(a) lorsque f est continue sur [a,b] (a < b) mais ne gardant pas nécessairement un signe constant ? Puis ensuite si a b ? Pour cela il faut savoir si f, continue, admet des primitives lorsqu'elle ne garde pas un signe constant sur [a,b]. Pour des raisons liées à la TS (ne pas lasser par un exposé uniquement guidé par un recherche de rigueur) nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 2. Toute fonction continue sur un intervalle I de R admet des primitives sur I.

2.4. Généralisation de la définition de l'intégrale d'une fonction continue de signe quel conque ; les réels a et b également quelconques

Si f ne garde pas un signe constant sur [a,b], que représente le réel F(b) – F(a) ?

1er cas : a < b et f(x) ≤ 0 sur [a,b]

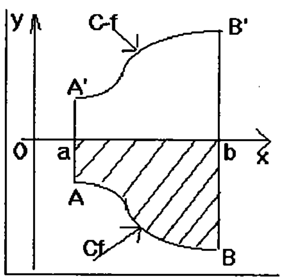


Fig. 13

Posons $f_1 = -f$ et appelons Δ et Δ_1 les domaines limités respectivement par Cf et Cf_1. Ils sont isométriques, donc ont même aire :

$A(\Delta) = A(\Delta_1) = \int_a^b -f(x)dx$ puisque –f est positive sur [a,b]. Si F est une primitive de f, –F est une primitive de –f ; donc, en application du théorème 1 :

$A(\Delta_1) = -F(b) - (-F(a))$
$= F(a) - F(b) = A(\Delta)$.

Ainsi $\int_a^b -f(x)dx = F(b) - F(a) = -\text{aire de } \Delta$.

Théorème définition 3. Soit f continue et négative sur [a,b] (a < b), alors l'aire du domaine plan Δ compris entre Cf, l'axe x'Ox et les droites x = a et x = b est égale à $\int_a^b -f(x)dx$.

On pose par définition

$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b (-f(x))dx$.

On dira que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique de Δ ; elle est ici négative.

2^e cas (a < b) et f est de signe quelconque sur [a,b]

On suppose (figure 14) que f change de signe un nombre fini de fois en c, d, e et g. On note alors :

F(b) – F(a) = [F(b) – F(g)]
+ [F(g) – F(e)] + [F(e) – F(d)]
+ [F(d) – F(c) + [F(c) – F(a)].

Utilisons le théorème 2 ; il vient :
F(b) – F(a) = aire Δ_1 – aire Δ_2 + aire Δ_3

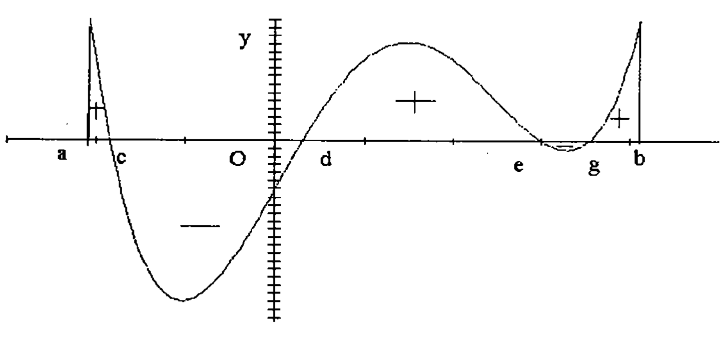


Fig. 14

– aire Δ_4 + aire Δ_5 ; où Δ_1, Δ_2, Δ_2, Δ_4 et Δ_5 sont les domaines plans limités par Cf et respectivement les segments [a,c], [c,d], [d,e], [e,g] et[g,b]. Sur chacun des segments, f garde un signe constant, et les théorèmes donnent :

$$F(b) - F(a) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx + \int_e^b f(x)dx .$$

Ce qui donne un sens, en terme d'intégrale, donc d'aires algébriques, à F(b) – F(a).

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires algébriques limitées par Δ

3°cas : f est continue sur [a,b] (a > b) et de signe quelconque sur [a,b].

a) Contours orientés. Considérons le plan orienté : le sens positif étant le sens trigonométrique direct. Tout cercle est orienté, mais également toute courbe plane fermée (L), ne se recoupant pas ; le sens positif est indiqué par une flèche (figure 15). Le sens négatif ou rétrograde est le sens contraire.

En admettant que le domaine Δ limité par une telle courbe ait une aire : on appelle aire algébrique du domaine Δ, limité par une courbe orientée, le nombre réel dont la valeur absolue est l'aire de Δ, et dont le signe est + ou - selon que la courbe (L) est orientée dans le sens positif ou négatif.

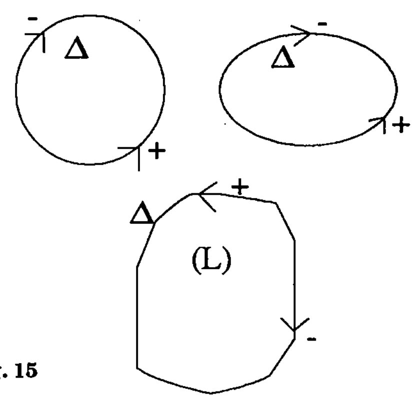


Fig. 15

b) Supposons que la fonction f soit continue et de signe constant sur [a,b].Que signifie alors F(b) – F(a) ? On distingue quatre cas (*cf.* figure 16).

Nous conviendrons que le domaine Δ limité par la courbe Cf, l'axe x'Ox et les droites (x = a) et (x = b) est orienté positivement si le contour A'B'BA est parcouru dans le sens positif défini ci-dessus ; le

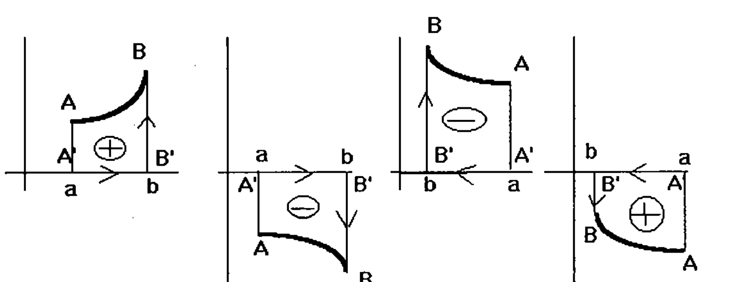


Fig. 16 *a < b et f(x) > 0* *a < b et f(x) < 0* *b < a et f(x) > 0* *b < a et f(x) < 0*

domaine sera orienté négativement si le contour A'B'BA est parcouru dans le sens négatif. Ainsi, sur la figure ci-dessus, les quatre aires algébriques ont le signe indiqué.

Si on désigne par S et $\overline{S}$ respectivement l'aire arithmétique et l'aire algébrique de Δ ; alors F(b) − F(a) est égale respectivement dans les cas ci-dessus à :

$$[F(x)]_a^b = S = \overline{S} ; [F(x)]_a^b = -S = \overline{S} ;$$

$$[F(x)]_a^b = -S = \overline{S} ; [F(x)]_a^b = S = \overline{S}$$

c) Si f est continue et de signe quelconque sur [a,b], alors comme précédemment, F(b) − F(a) est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f(x) garde un signe constant. D'où le théorème :

Théorème définition 4. Si f est continue sur [a,b], a et b quelconques, et change de signe en un nombre fini de points c, d, et e, alors par définition :

$$F(b) - F(a) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx + \int_e^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Chaque terme de cette somme étant une aire algébrique définie comme ci-dessus.

Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires algébriques des domaines limités par Cf dans un repère orthonormé du plan.

2.5. Propriétés immédiates

P1 : Si f est continue sur [a,b], $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$;

P2 : Si f est continue et impaire sur [−a,a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

P3 : Si f est continue et paire sur [−a,a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

La définition de l'intégrale en terme d'aire et les théorèmes 1,2 et 3 et 4 rendent évidents P1, P2 et P3. Puisque désormais, $\int_a^b f(x)dx$ a pour nous un sens si f est continue sur [a,b] :

— C'est la somme *des aires algébriques des domaines orientés limités* par Cf, l'axe x'Ox et les droites x = a et x = b ; avec les conventions posées sur le signe des aires. **Attention**, les propriétés intuitives de l'aire telles que nous les avons posées pour les domaines "géométriques" (au chapitre 1, C), ne sont évidemment plus vraies pour les domaines orientés.

— C'est aussi le réel F(b) − F(a) où F est une primitive de f sur [a,b] ; interprétation fondamentale ici. On peut donc énoncer :

Théorème définition 5. Si f est continue sur le segment [a,b], Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, et F une primitive de f sur [a,b], on appelle intégrale de f de a à b la somme des "aires algébriques" limitées par la courbe x'Ox et les droites x = a et x = b ; on note $\int_a^b f(x)dx$. De plus $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Alors si f est continue sur un intervalle I de R, pour a quelconque de I, on a

$$\forall x \in I \ \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ainsi on peut énoncer :

Théorème 6. Soit f, continue sur un intervalle I de R ; a ∈ I, la fonction définie sur I par : $x \to \int_a^x f(t)dt = G(x)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Soit :

$$\forall x \in I \ (\int_a^x f(t)dt)' = F(x) \text{ et } G(a) = 0.$$

Ceci permet de définir de nouvelles fonctions à partir de f, lorsque les primitives de f ne sont pas des fonctions usuelles. Citons l'exemple classique en terminale :

$$\forall x \in]0,+\infty[$$
$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et } \ln 1 = 0.$$

Dans le contexte de cette définition de l'intégrale il y a intérêt, en TS à définir la fonction logarithme népérien comme l'intégrale ci-dessus. Car c'est aussi une aire algébrique, ce qui facilite un calcul approché de tout réel lnb, b > 0 ; via la méthode des rectangles vue au chapitre 1 ou tout autre méthode plus performente. De plus cette définition permet une démonstration très accessible aux élèves de toutes les propriétés de cette nouvelle fonction de référence...

TROISIÈME PARTIE. LES ANNEXES

ANNEXE 1
PLAN DE L'ÉTUDE DE L'INTÉGRALE EN TS

CHAPITRE 1 :
EVOLUTION HISTORIQUE DU CALCUL DE L'AIRE DU SEGMENT DE PARABOLE.

A Quadrature du segment de parabole selon ARCHIMEDE.
- I. (ACTIVITE) 1° Propriétés géométriques du segment de parabole
  2° Duplication
- II. (COURS) : Aire du segment de parabole par Archimède.

B. Quadrature du segment de parabole selon B. PASCAL.
- I. (COURS) Démonstration par la méthode des "indivisibles"
- II. (TRAVAUX PRATIQUES)
  Actualisation du procédé : méthode des rectangles.

C Notion d'aire par H. LEBESGUE.
- I. (ACTIVITE) Notion d'aire sur un quadrillage.
- II. DEFINITION par H. LEBESGUE
  Application à l'aire du rectangle, du triangle, du polygone.
- III. CONDITION POUR QU'UN DOMAINE AIT UNE AIRE
  (TRAVAUX PRATIQUES)
  1°) Application à l'aire du segment de parabole
  2°) Application à l'aire du disque ; calcul approché du nombre π.

CHAPITRE 2 :
DEFINITION DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE [a,b].

I. DEFINITION DE L'INTEGRALE EN TS.
II. PROPRIETES DE LINEARITE DE L'INTEGRALE
III. INTEGRALE ET ORDRE
IV. CALCULS D'INTEGRALE PAR PRIMITIVATION

CHAPITRE 3
CALCULS APPROCHES DES INTEGRALES

CHAPITRE 4
APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL

Le texte développé ici s'arrête au I du chapitre 2.

ANNEXE 2

QUADRATURE DU SEGMENT DE PARABOLE PAR ARCHIMEDE.

1. activité proposée aux élèves

ÉNONCÉ : Propriétés géométriques du segment de parabole

Soit la parabole (P) d'équation $y = ax^2$ $(a < 0)$ dans un repère orthonormal du plan (fig. 1). Soit A et C deux points distincts de (P), d'abscisses respectives α et γ ; le segment de parabole limité par la corde [AC] est le domaine plan compris entre l'arc de parabole AC et la droite (AC). Soit Σ son aire, dans l'unité qui sera choisie ultérieurement.

1re question. Soit D le milieu du segment de droite [AC] ; démontrer qu'il existe un point B et un seul de l'arc AC où la tangente à (P) est parallèle à (AC). On précisera ses coordonnées en fonction de a, α et γ. Démontrer alors que la droite (BD) est parallèle à l'axe y'Oy. Cette droite (BD), lieu du milieu des cordes parallèles à la tangente en B à la parabole, sera appelée "le diamètre de la parabole (P) relatif à la corde [AC]"(fig. 2).

2°question Considérant le parallélogramme ACC'A' (fig 2), où (A'C') est la tangente à (P) en B, démontrer la relation :Σ – aire ABC < aire ABC (1).

Nous dirons, dans la suite, que ABC est "le triangle inscrit" dans le segment de parabole relatif à la corde [AC]. Les segments de parabole relatifs aux cordes [AB] et [BC] (fig. 2) seront appelés "les segments restants" relatifs au "triangle inscrit" ABC. Le résultat (1) sera noté : *Lemme 1 La différence entre l'aire du segment et l'aire du "triangle inscrit" est inférieure à l'aire de ce triangle.* Désormais, pour simplifier, l'unité d'aire sera celle du triangle ABC.

Duplication

1re question. A chacun des "segments restants" relatifs à [AB] et [BC], on associe leur "triangle inscrit", AFB et BF'C. Soit G le milieu de [AB], la droite (GF) est le diamètre de la parabole relatif à la corde [AB] ; cette droite coupe (AD) en E (fig. 3). Démontrer les relations suivantes : a) $EG = \frac{1}{2}BD$ et $FG = \frac{1}{4}BD$; b) En déduire : aireAFB = $\frac{1}{4}$ aire ADB ;

c) AFB et BF'C sont appelés les "deux triangles ajoutés" au triangle inscrit initial ABC, c'est pourquoi nous appelons cette construction : duplication. Démontrer : *Lemme 2 L'aire des deux triangles ajoutés" est égale au quart de l'aire du "triangle inscrit" dans le segment de parabole.*

2e question. Cette duplication génère un polygone P_1 = AFBF'C inscrit dans le segment de parabole relatif à [AC]. Soit S_1 l'aire de P_1 et s_1 l'aire des quatre "segments restants" (fig. 4) relatifs aux cordes [AF], [FB], [BF'] et [F'C].

Soit T_1 l'aire des "triangles ajoutés" AFB et BF'C, démontrer les relations suivantes : $S_1 < \Sigma$; $S_1 + s_1 = \Sigma$; $T_1 = \frac{1}{4}$; $S_1 = 1 + \frac{1}{4}$; $\Sigma - S_1 < \frac{1}{4}$.

FIGURES : LA PARABOLE (P) d'équation $y = x^2$ $(a < 0)$

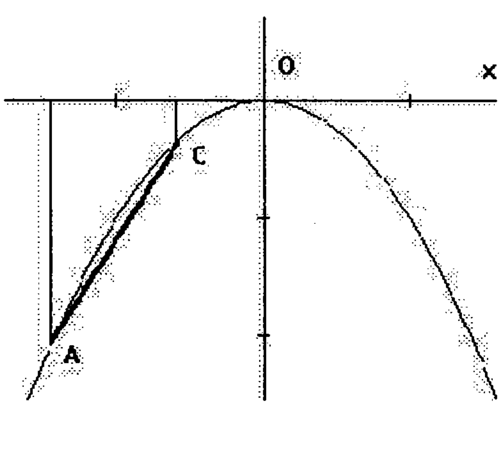


Fig. 1

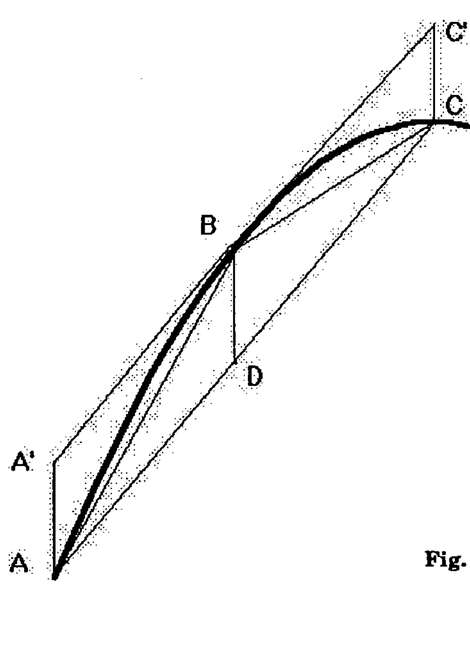


Fig. 2

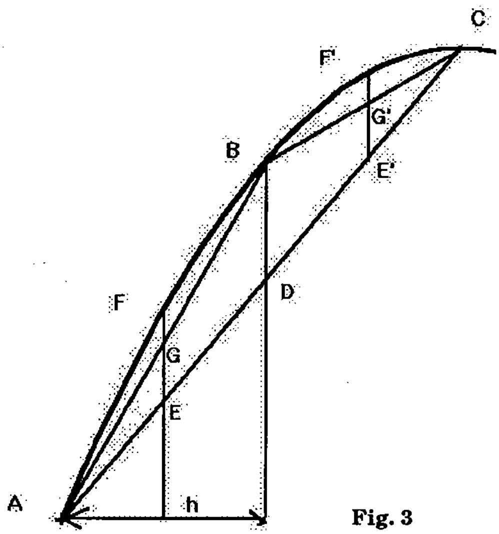


Fig. 3

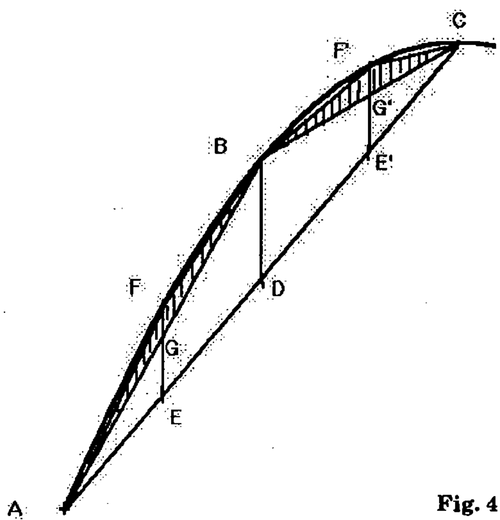


Fig. 4

1 Bis : Eléments de solution de l'activité. Propriétés géométriques du segment de parabole.

1re question. $f'(x) = 2ax$ donc $2a\beta = \dfrac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = a\dfrac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma - \alpha} = a(\gamma + \alpha)$; $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

β est l'abscisse de D ; donc (BD) parallèle à y'Oy.

2e Question. Le parallélogramme ACC'A implique : aireABC < Σ < 2aireABC, donc $0 < \Sigma -$ aireABC < aireABC. D'où le lemme 1.

Duplication

1re Question. a) D est milieu de [AC] ; $B \in P$

$$DB = y_B - y_D = a\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4} - a\frac{(\alpha^2+\gamma^2)}{2}$$

$$DB = y_B - y_D = a\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4} - a\frac{(\alpha^2+\gamma^2)}{2} \quad DB = -\frac{a}{4}(\alpha-\gamma)^2$$

Ce résultat, relatif à la corde [AC], donne de même pour la corde [AB] :

$$GF = -\frac{a}{4}\left(\alpha - \frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2 = -\frac{a}{4}\frac{(\alpha-\gamma)^2}{4} \qquad GF = \frac{1}{4}DB.$$

b) aireAFB = 2aireAFG = 2FG(h/2/2) = FG(h/2) = 1/4DB(h/2) = 1/4aireADB

De même aireBF'B = 1/4aireDBC, donc aire des "triangles ajoutés" = 1/4aireABC.

2^e Question. Soit P_1 = AFBF'C, le polygone inscrit et S_1 son aire. s_1 et T_1 l'aire respective des 4 segments restants et des triangles ajoutés.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{4}; \Sigma - S_1 < \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad S_1 < \Sigma; S_1 + s_1 = \Sigma; T = \frac{1}{4}$$

ANNEXE 3

CALCUL PAR B. PASCAL

2. Travaux pratiques

Prérequis.
Pour tout entier n > 0 (37), on a, par récurrence sur n :

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ÉNONCÉ. Soit la parabole (P) d'équation $y = x^2$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormal du plan.

Soit la fonction f définie sur [0,1] par $f(x) = x^2$. On appelle Δ le domaine plan limité par la courbe l'axe x'Ox et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

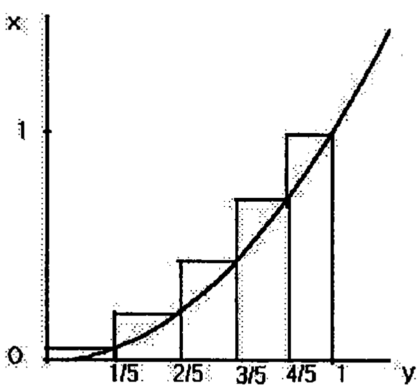


Fig. 6

Soit S l'aire de ce domaine D, dans l'unité d'aire imposée par le choix du repère.

Partageons l'intervalle [0,1] en n intervalles de même longueur 1/n, n entier et non nul. Les abscisses des bornes des intervalles sont :

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{k}{n} \ldots \frac{n-1}{n}.$$

(37) Il faut reconnaître que le procédé, rapide certes, est artificiel. Notons que ce résultat fait l'objet d'un exercice souvent résolu en 1reS par un procédé algorithmique très connu et utilisant l'identité $(a + b)^3$.

2.1. Stade graphique et stade du calcul

1re question.

a) On pose n = 5, calculer $s_5 = \frac{1}{5}\left[(\frac{1}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 + \ldots + (\frac{5}{5})^2\right]$. Démontrer que S_5 est une valeur approchée par excès de Σ. On s'inspirera de la figure ci-dessus et de la monotonie de f.

b) On pose n = 20, calculer la somme $s_{20} = \frac{1}{20}\left[(\frac{1}{20})^2 + \ldots + (\frac{19}{20})^2 + (\frac{20}{20})^2\right]$.

Démontrer que S_{20} est une valeur approchée par excès de Σ.

2e question. L'entier n > 1, on pose

$$s_n = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + \ldots + (\frac{k}{n})^2 + \ldots + (\frac{n}{n})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(\frac{k}{n})^2$$

Démontrer que S_n est la somme des aires de n rectangles de largeur commune 1/n. En déduire que S_n est une valeur approchée par excès de Σ.

3°question (38)

PROGRAMME POUR TI 80 (donné à titre d'exemple, l'organigramme de la page suivante convient pour tout type de calculatrice)

A partir de l'organigramme, établir un programme sur votre calculatrice, permettant de calculer S_n pour tout entier n fixé.

Compléter le tableau de valeurs ci-dessus :

n	5	10	20	50	100
S_n					

Que peut-on conjecturer pour la suite S_n ?

2.2. Stade formel

On admettra que si U et V ont une aire, si U est inclus dans V, alors : aire U $\leq$ aire V.

(38) L'élève doit établir à l'aide de l'organigramme le programme que je donne ici pour mémoire. Cette utilisation des posssibilités de calcul de la machine est importante puisque qu'elle permet des conjectures qui justifierons le stade formel, celui de la démonstration au §2.

1re question. Les notations demeurant celles du §1, on pose pour tout entier $n \geq S'_n$

$$[(\frac{0}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2 + ... + (\frac{k}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2]$$

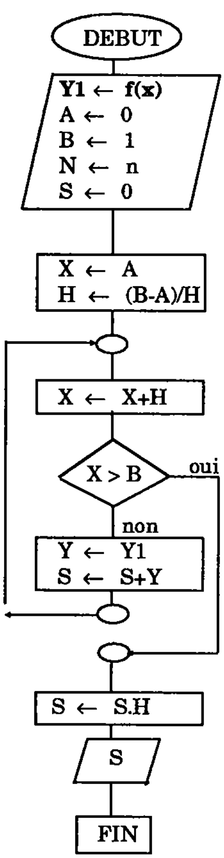
a) Démontrer que est la somme des aires de n rectangles de largeur 1/n.
b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $S'_n \leq \Sigma \leq S_n$.

2^e question. Démontrer que :

$$\forall n \in N^* \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \Sigma \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

En déduire la valeur exacte de Σ en unités d'aire.

Organigramme




```
initialisation
PRGM : RECTANGLES

: DISP"A=" : INPUT A
: DISP"A=" : INPUT B
: DISP"N=" : INPUT N
: 0 → S

: A → X
: (B-A) /N → H

: LBL 0

: X+H → X

: IF X > B
: GOTO1

: Y1 → Y
: S+Y → S
: GOTO 0

: LBL 1

: SH → S

: DISP "S="
DISP S

END
```

Y = f(x) = x^2 VA EN Y1

REM1
CONFORMEMENT AU PROGRAMME DE JUIN 94 LE PRGM "RECTANGLE" CI-CONTRE COMPREND UNE SEQUENCE, UNE BOUCLE, ET UN TEST D'ARRÊT.

REM2
DANS LE CAS DE LA TI 81, DES LORS QUE LA VARIABLE X CONTIENT UNE VALEUR, ALORS Y1 = f(X). POUR LA CASIO f(x) VA EN f1(mémoire f1) ET F(X)=f1.

REM3
CE PROGRAMME CONVIENT POUR TOUTE FONCTION f, CONTINUE ET POSITIVE SUR UN INTERVALLE [a,b]. IL SUFFIT DE MODIFIER L'INITIALISATION DES DONNEES.

ANNEXE 4

C. NOTION D'AIRE SELON H. LEBESGUE
Activité sur un texte d'H. Lebesgue

Le texte de Lebesgue cité au C est donné aux élèves (voir II, Chapitre 1, C, Activité)

Calcul sur un exemple

ÉNONCÉ. Pour expérimenter la méthode décrite ci-dessus par H. Lebesgue, on se donne un domaine D tracé sur une feuille de papier millimétré [39] ; en déduire un encadrement de l'aire de D, le meilleur possible, par rapport à l'unité choisie, ici le carré U de 10cm de côté.

Eléments de solution

Pour le domaine D que j'ai proposé aux élèves [40], nous avons obtenus les résultats suivants :
— Sur le réseau R, il y a 1 carré U inclus dans D et 5 carrés U contenant des points de D. Posons n = 1 et N = 5
— Sur le réseau R_1, on compte 127 carrés U_1 inclus dans D, et 175 carrés U_1 contenant des points de D. Posons $n_1 = 127$ et $N_1 = 175$
Il vient donc : $1 \leq \frac{127}{100} \leq ... \leq \frac{175}{100} \leq 5$.
— En continuant sur le réseau R_2 ($U_2 = 100U_1$), on obtient, avec patience, l'encadrement suivant de l'aire de D :

$$1 \leq \frac{127}{100} \leq \frac{15173}{100^2} \leq \text{airedeD} \leq \frac{15603}{100^2} \leq \frac{175}{100} \leq 5$$

On convient de dire que $1, \frac{127}{100}, \frac{15173}{100^2}$ sont des valeurs approchées par défaut de l'aire de D ; et $5, \frac{175}{100}, \frac{15603}{100^2}$ sont des valeurs approchées par excès de D.

5. Travaux pratiques : aire du disque de rayon 1, approche du réel π

ENONCE 5.1. Stade du dessin (voir fig. 8 et fig. 9). AC est le côté du polygone inscrit, A'C' celui du polygone circonscrit (fig. 8).A l'étape suivante, AB et A"B"' les remplacent (fig. 9). OI est l'apothème au rang n, J milieu de [A"B"'] et K milieu de [AJ], OK est l'apothème du polygone inscrit, au rang suivant n + 1. Le cercle (C) de centre O et de

(39) Ce domaine n'est pas reproduit ici.
(40) Le quadrillage était partagé en régions distinctes couvrant tout le domaine de façon à partager le comptage entre les élèves pour écourter l'activité.

rayon 1 a pour aire π. La méthode des polygones inscrits et circonscrits est l'occasion de calculer un encadrement de ce réel. On inscrit dans (C) un carré de côté $\sqrt{2}$; et soit le carré circonscrit dont les côtés sont parallèles au précédent, voir fig. 8. A l'étape suivante, on inscrit l'octogone régulier dont les sommets sont alternativement sur le premier carré et au milieu de chaque côté du second (fig. 8et fig. 9). Ainsi, à chaque étape, on multiplie par 2 le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits.

Pour les $n^{\text{ièmes}}$ polygones on pose :

Polygone inscrit	Polygone circonscrit
c_n ; a_n ; s_n	c'_n ; 1 ; S_n

respectivement pour mesure du côté, de l'apothème, et de l'aire du polygone à 4.2^n côtés.

1re question. Démontrer les relations suivantes : $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $s_1 = 2$; $s_1 = 4$

2^e question. Démontrer par récurrence sur l'entier n, les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \quad (1)$$

$$s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2} \quad (2)$$

$$s_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{a_n^2} = \frac{2s_{n+1}}{1+a_n} \quad (3)$$

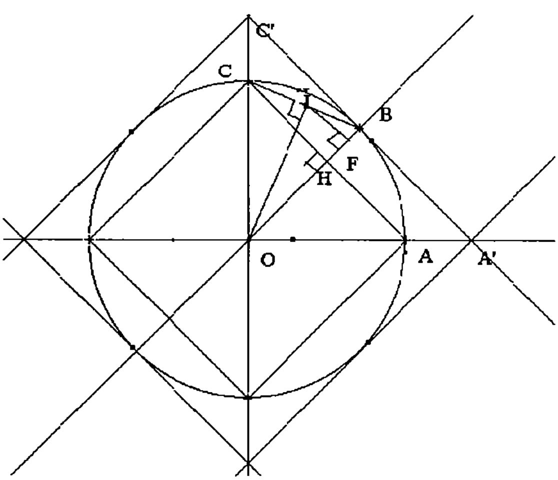


Fig. 8

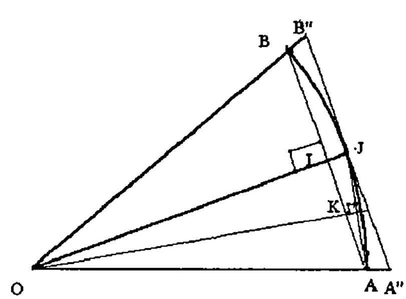
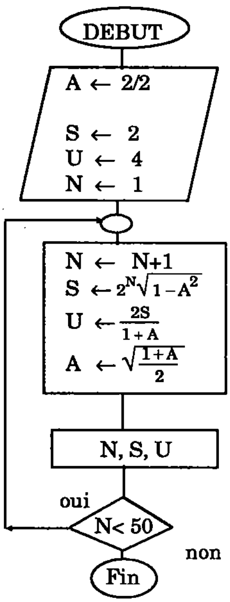


Fig. 9

5.2. Stade du calcul



Programme sur TI80, par exemple : AIRE du disque

```
: LBL1
DISP"A, S, U, N"
: INPUT A : INPUT S : INPUTU : INPUT N

 : LBL 0

: N+1 → N
: 2^N√(1-A²) → S
: 2S/(1+A) → U
: √((1+A)/2) → A

: DISP N
: DISP S
: DISP U
: PAUSE
: IF N<50
: GOTO 0
: GOTO 1
```

Dans cet organigramme A reçoit a l'apothème, S reçoit l'aire du polygone inscrit, U reçoit l'aire du polygone circonscrit, enfin N reçoit n le nombre d'étapes ou le numéro des polygones.

1^re^ question. Avec l'aide de cet organigramme, établir sur votre calculatrice le programme permettant de calculer, terme après terme, les éléments des suites (s_n) et (s_n) ; lorsque n varie de 1 à 20.

2^e^ question. Parmi les relations (1), (2) ou (3) quelle est celle qui est la cause, à partir d'un certain rang n_0, de l'incohérence des résultats donnés par la calculatrice ? justifier votre réponse.

3^e^ question. Pour $n < n_0$, donner un encadrement du réel π, avec la précision maximum autorisée par votre machine.

Eléments de solution du T.P.

Stade du dessin : sur la fig 8 : $a_1 = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $s_1 = AC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a_1} = \sqrt{2}$, transforme le carré inscrit en carré circonscrit, donc $S_1 = 2.2 = 4$.

La suite (a_n) est connue par seulement, considérons la figure au rang n + 1 en s'inspirant de la figure 8. Dans le triangle OIC (fig. 8) rectangle en I, F est le milieu de [HB], $OI^2 = OB.OF = 1.(\frac{OB + OH}{2})$. Donc pour l'apothème : $a^{2_{n+1}} = \frac{1 + a_n}{2}$ (1).

Au rang n + 1, sur la figure 9, $AB = c_n$, $AJ = c_{n+1}$, $OK = a_{n+1}$
Dans les triangles rectangles OIA et IJA, on a :

$$\frac{c^{2_n}}{4} + a^{2_n} = 1 \text{ et } (a_n - 1)^2 + \frac{c^{2_n}}{4} = c^2_{n+1} \text{ donc } c^2_{n+1} = (1 - a_n)^2 + 1 - a^2_n = 2(1 - a_n)$$

L'aire de OJA est donc :

$$\frac{1}{2}a_{n+1}.c_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 - a_n)} . \sqrt{\frac{1 + a_n}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - a^2_n}$$

— Au rang 1, il y a 2^2 triangles isométriques dont la somme des aires est s_1
— Au rang 2, il y en a 2 fois plus, $2.2^2 = 2^3$.
— Au rang n + 1, il yen a $2.2^{n+1} = 2^{n+2}$, donc $s_{n+1} = 2^{n+2}\,\frac{1}{2}\sqrt{1 - a^2_n} = 2^{n+1}\sqrt{1 - a^2_n}$.

Au rang n + 1, on passe de l'inscrit au circonscrit par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a_{n+1}}$ donc $S_{n+1} = \frac{1}{a^2_{n+1}}\, S_{n+1} = \frac{2s_{n+1}}{1 + a_n}$

Stade du calcul (sur TI 80 ou 81)

n	s_n	S_n	n		
1	2	4	21	2,9658	2,9658
2	2,828	3,313	22	2,2488	2,2488
3	3,061	3,182	23	0	0
4	3,1214	3,1517	24	0	0
5	3,136548	3,144118	25	0	0
6	3,140331	3,142223			
7	3,141277	3,141750			
8	3,1415138	3,141632			
9	3,141572939	3,141602509			
10	3,141587692	3,1415595084			
11	3,14159128	3,141593128			
12	3,141591681	3,141592143			
13	3,141593016	3,141593131			

14	3,141586607	3,141586636			
15	3,141560973	3,141560981			
20	3,145728	3,145728			

Question 2 : A partir de n = 10, la suite (s_n) n'est plus majorée par (S_N) ; donc $n_0 = 9$.

Le produit $s_n = 2^n \sqrt{1 - a_n^2}$ est tel que $\sqrt{1 - a_n^2}$ converge rapidement vers 0, et à partir d'un certain rang la calculatrice arrondit à 10^{-12}, puis à 0, à partir de n = 23.

Conclusion : $3{,}1415 \leq \pi \leq 3{,}1416$.

REMARQUE : l'usage d'une Casio série 9000 conduit à une valeur approchée de π à 10^{-6} près. Les résultats sont incohérents à partie du rang 14 et les aires s_n et S_n sont nulles à partir de n = 26.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMÈDE : Traité sur *Quadrature de la parabole.* D'après l'article "Sur les pas d'Archimède" de Marie-Catherine Caramacie et Brigitte Delbreil (IREM de Rouen) *in La Rigueur et le Calcul* publié chez CEDIC par le groupe Inter-Irem Épistemologie et Histoire des Mathématiques (1981).

ARTIGUE Michèle : "Réformes et contre réformes dans l'enseignement secondaire de l'Analyse au cours du XX^e siècle", Colloque Inter-Irem d'Analyse Juin 1995, Université de Paris VII.

BKOUCHE. R. : "Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)" *in* Actes du 7^e colloque inter-irem Épistemologie et Histoire des Mathématiques (1989).

CAGNAC-RAMIS-COMMEAU : *Traité de Mathématiques Spéciales,* Tome 2, analyse ; chez Masson & Cie (1967).

FRIEDELMEYER J.-P. : "Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse", *in* actes du 9^e colloque Inter-Irem Épistemologie et Histoire des Mathématiques (1992).

LEBESGUE H. : *Sur* la *mesure des grandeurs,* 1931-1935.

LEGRAND Marc : *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale,* Université J.Fourier, Grenoble (Octobre 1990).

PASCAL : Traité sur *Potestatum numericarum summa* (1655). D'après l'article "Pages et calculs choisis" du groupe d'Histoire des Mathématiques pour nos Elèves (IREM de dijon) *in La Rigueur et le Calcul,* publié chez CEDIC par le groupe Inter-Irem Épistemologie et Histoire des Mathématiques (1981).