REPERES - IREM . N° 31 - avril 1998

LES LUNULES D'HIPPOCRATE DE CHIO

André STOLL
Lycée Louis Couffignal Strasbourg

Le mot *"quadrature"* est l'un des rares mots du vocabulaire français à être passé dans le langage courant, mais utilisé seulement dans l'expression *"quadrature du cercle"* pour désigner un problème impossible à résoudre. Ainsi Jean-Jacques Rousseau écrit dans une lettre à Mirabeau : *"Voici dans mes vieilles idées, le grand problème en politique, que je compare à celui de la quadrature du cercle en géométrie* [...] *: trouver une forme de gouvernement qui mette la loi au-dessus de l'homme"*.

Est-il utile de rappeler qu'à l'origine la quadrature d'une surface désignait la construction à la règle et au compas d'un carré ayant la même aire que cette surface ? Les géomètres grecs savaient quarrer (c'est-à-dire réaliser la quadrature) un polygone plan quelconque. Mais, à quelques exceptions près, les Grecs ne savaient pas quarrer les figures planes délimitées en parties ou entièrement par des lignes courbes.

Si la quadrature de la parabole par Archimède est certainement la plus connue de ces exceptions, ce n'est pas la plus ancienne. En effet, Hippocrate de Chio, qui vivait à Athènes dans la seconde moitié du V^{e} siècle avant J.C. et qu'il ne faut pas confondre avec Hippocrate de Cos le médecin, est le premier mathématicien connu à avoir réalisé la quadrature de figures curvilignes appelées lunules – une lunule étant une figure délimitée par des arcs de cercle qui aboutissent aux mêmes extrémités et dont les concavités sont tournées du même côté. L'idée de quarrer (à la règle et au compas, bien sûr !) des lunules pouvait laisser espérer la quadrature du cercle.

L'étude des lunules présente l'avantage de pouvoir être entreprise dès le collège et mener jusqu'à des problèmes très sophistiqués. De beaux résultats peuvent être mis en évidence, par des raisonnements qui sans être triviaux, ne sont pas difficiles. C'est ce que nous montrons dans les deux premières parties traitant des lunules qui ont été étudiées par Hippocrate de Chio. Dans une troisième partie, nous présenterons le problème général des lunules quarrables.

PREMIERE PARTIE : Les trois lunules d'HIPPOCRATE

Le premier exemple, le plus simple et longtemps le seul connu, correspond à la lunule délimitée par le quart de cercle AJE de centre C et le demi cercle AIE de centre B (*Cf.* figure 1).

Nous ne possédons aucun texte permettant de connaître les méthodes de démonstration d'Hippocrate de Chio. Toutefois, des commentaires ultérieurs, nous autorisent à penser qu'un des théorèmes de base est le suivant : "Les segments de cercles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs cordes." (*Cf.* encadré ci-dessous)

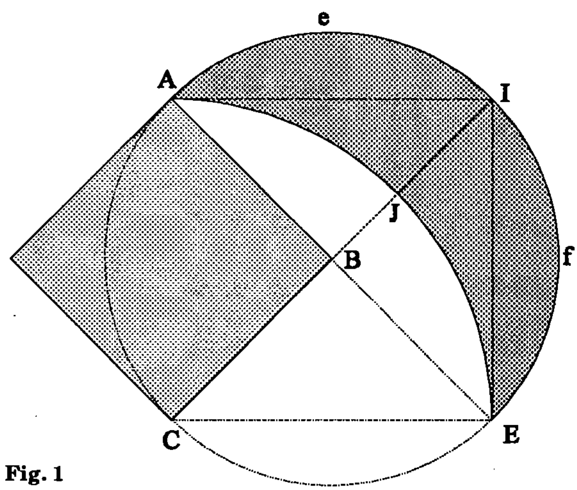


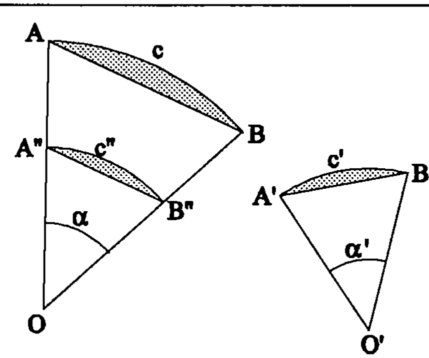
Fig. 1

Théorème

Lorsque les angles α et α' sont égaux, les segments de cercle (AcBA) et (A'c'B'A') sont semblables.

Dans ce cas, en notant de la même manière une surface et son aire, on a :

$$\frac{AcBA}{A'c'B'A'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$



EXERCICE 1

A l'aide du théorème ci-dessus, démontrer que la lunule AJEIA a la même aire que le carré ABCD (*Cf.* figure 1)

Les deux autres lunules d'Hippocrate de Chio sont construites à partir d'un trapèze isocèle ABCD $((AD)//(BC))$ tel que : AB = BC = CD.

EXERCICE 2

1. Montrer qu'un trapèze ABCD tel que AB = BC = CD est inscriptible dans un cercle.

2. On prend AB = BC = CD comme unité et on pose a = AD ; Exprimer en fonction de a le rayon de ce cercle et l'angle $D\hat{A}C$.

En traçant l'arc de cercle AND tangent aux diagonales (AC) et (BD), on obtient une lunule ABCDNA. (*cf.* figure 2). Lorsque le trapèze ABCD vérifie $AD^2 = 3AB^2$, l'aire de la lunule ABCDNA est égale à l'aire du trapèze ABCD.

EXERCICE 3 (*cf.* figure 2)

I désigne le centre du cercle circonscrit au trapèze ABCD et O le centre de l'arc de cercle AND

1. Montrer que $A\hat{O}D = A\hat{I}B$ et en déduire :

$$\frac{AiBA}{ANDA} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

2. Démontrer que si de plus $AD^2 = 3AB^2$ alors l'aire de la lunule ABCDNA est égale à l'aire du trapèze ABCD.

3. Démontrer que l'aire du trapèze ABCD est égale à l'aire du quadrilatère AIDO.

La lunule ABCDNA est donc quarrable car, d'une part, nous savons construire à la règle et au compas le trapèze ABCD et, d'autre part nous savons le quarrer [1].

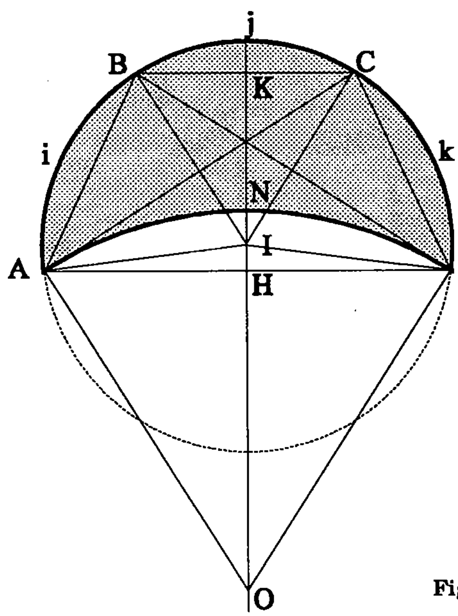


Fig. 2

(1) Rappelons à ce propos que les géomètres grecs savaient quarrer (à la règle et au compas bien sûr) toute figure rectiligne. Le lecteur intéressé pourra consulter la brochure éditée par l'IREM de Strasbourg "Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique", N° S.164, année 1996.

EXERCICE 4

Construire un trapèze ABCD qui vérifie AB = BC = CD et $AD^2 = 3AB^2$ et la lunule correspondante. (Indication : ce problème se ramène à la construction du nombre $\sqrt{3}$.)

Revenons au trapèze isocèle tel que AB = BC = CD et traçons le cercle circonscrit au triangle AED (E est le point d'intersection des diagonales) (*cf.* figure 3). Ce cercle est tangent aux droites (AB) et (CD) (Pourquoi ?) Lorsque $2AE^2 = 3AB^2$, une démonstration analogue à la précédente permet d'établir l'égalité des aires de la lunule ABCDEA et du pentagone à angle rentrant du même nom. Par suite, la lunule est quarrable à condition d'arriver à construire un trapèze ABCD isocèle qui vérifie à la fois AB = BC = CD et $2AE^2 = 3AB^2$.

Hippocrate de Chio n'indique pas comment réaliser cette opération autrement que par tâtonnements. Pourtant un tel trapèze est constructible à la règle et au compas. En effet, comme CD est tangent au cercle circonscrit au triangle AED, on a $CD^2 = CE.CA$. Soit, en posant $a = AB = BC = CD$, $a^2 = CA.CE$. Or, d'autre part on a : $CA - CE = AE = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Il s'agit donc de construire deux longueurs CA et CE dont on connaît la différence et le produit. Euclide traite ce problème dans les *Eléments* (Livre VI proposition 29). Une interprétation de la proposition d'Euclide est donnée ci-dessous en annexe.

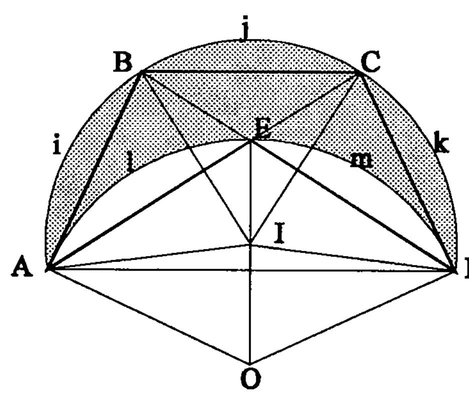


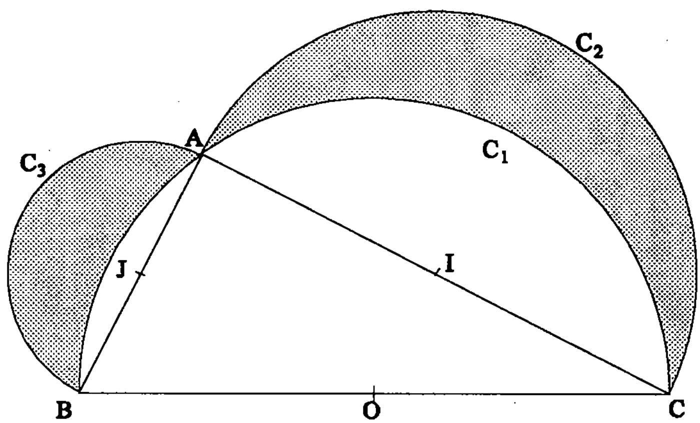
Fig. 3

DEUXIEME PARTIE : QUELQUES EXERCICES

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle rectangle en A ; C_1, C_2, C_3 les 1/2 cercles de centres O, I, J milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Démontrer que l'aire hachurée est égale à l'aire du triangle rectangle ABC.



EXERCICE 6 : généralisation de l'exercice 1

Montrer que quelle que soit la droite (CM) l'aire du "morceau de lunule" AeMPA est égale à l'aire du triangle AFC (figure 4) et aussi à l'aire APG (figure 5).

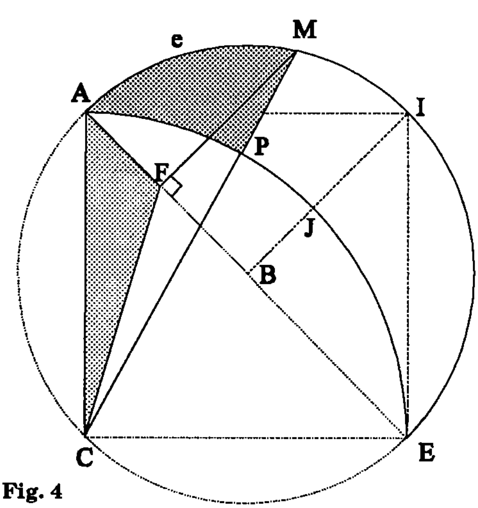


Fig. 4

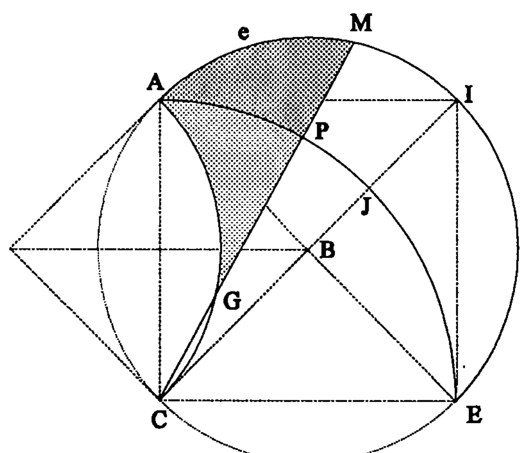


Fig. 5

Un autre exemple de lunule est construit en partant de deux cercles concentriques (centre O) et tels que les rayons vérifient $R^2 = 6r^2$ (*cf.* figure 6). L'arc de cercle GJI, de centre P, est tangent à GH et HI.

> ***EXERCICE 7***
>
> Montrer que l'aire de la lunule GHIJG augmentée des six segments de cercle AB, BC, CD, DE, EF, FA est égale à l'aire du triangle GHI.

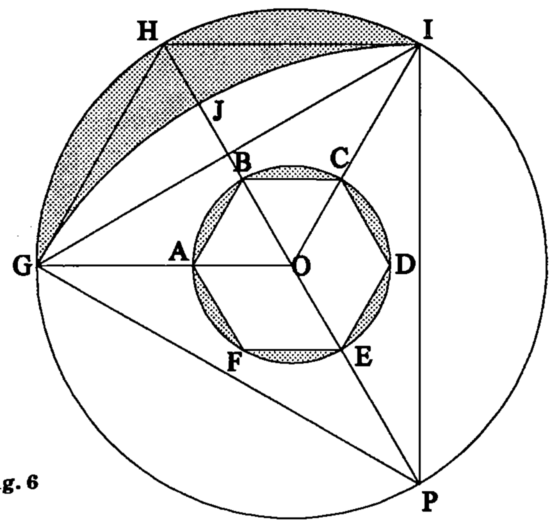


Fig. 6

TROISIEME PARTIE [2] : Existe-t-il d'autres lunules quarrables ?

Il est probable que de nombreux savants aient cherché d'autres lunules quarrables en essayant de résoudre le problème de la quadrature du cercle.

D'après Max Simon [3], un certain Martin Johan Wallenius d'Abo en a découvert deux autres en 1766. Mais ce résultat est perdu, et même les deux lunules d'Hippocrate construites à partir d'un trapèze isocèle furent oubliées jusqu'aux travaux de l'historien Paul Tannery (1843-1904). De sorte que en 1840 Thomas Clausen (1801-1885), un mathématicien danois, put en toute bonne foi publier un article dans le *Journal de Crelle* (tome XXI, pages 375-376) intitulé : "*Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist*" c'est-à-dire "Quatre nouvelles lunules quarrables." La solution exposée par Clausen dans cet article n'est pas géométrique mais analytique. Il calcule l'aire de la lunule et cherche des conditions pour que celle-ci soit quarrable.

Avec les notations de la figure 7, l'aire de la lunule ACBDA est égale à l'aire du quadrilatère AIBD augmentée de la différence des aires des deux secteurs angulaires IACBI et OADBO. Lorsque cette dernière est nulle, la lunule est quarrable car équivalente au quadrilatère AIBO. D'où une première équation :

(1) $r^2y = R^2x$.

D'autre part, en écrivant que les deux secteurs angulaires ont une corde

(2) Cette partie a été rédigée avec le concours de mon collègue Jean-Pierre Friedelmeyer.

(3) *Geschichte der Math. im Altertum*, p. 174. (Voir Heath, T.L. : *History of Greek Mathematics*, Oxford 1921, réédition Dower p. 200.)

commune (AB), on trouve une deuxième équation :

(2) R.sin x = r.sin y .

Lorsque les angles x et y sont des multiples entiers d'un angle α ($x = m\alpha$ et $y = n\alpha$), l'équation (2) s'écrit : $\frac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ (3). Or, le rapport $\frac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha}$ s'exprime par une fraction rationnelle de la variable cos α. L'équation (3) conduit donc à une équation polynomiale en cos α.

La lunule est quarrable lorsque les racines de cette équation s'expriment par des racines carrées. Ceci se produit – au moins – dans les cinq cas suivants :

n = 2 et m = 1
n = 3 et m = 1
n = 3 et m = 2
n = 5 et m = 1
n = 5 et m = 3

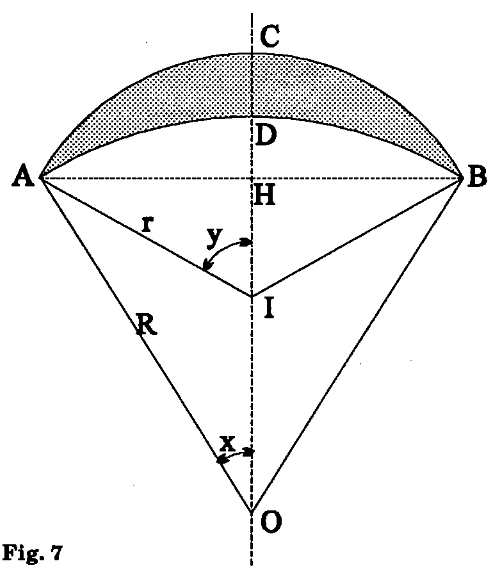


Fig. 7

> ***EXERCICE 8***
>
> Etudier les trois premiers cas et montrer qu'ils correspondent aux trois lunules d'Hippocrate.

Lorsque n = 5, m = 1, l'équation (3) s'écrit : $\frac{\sin(5\alpha)}{\sin\alpha} = \sqrt{5}$.

Soit :

$$4\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$$

Et finalement :

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5} - 1}}{4}$$

Ce qui correspond à un angle α d'environ 23,44 degrés.
Quant au cas n = 5, m = 3, un calcul identique au calcul précédent donne :

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{20}{30} + \sqrt{\frac{20}{3}}}\right)$$

Soit :

$$\alpha \approx 16{,}8°$$

> ***EXERCICE*** 9
>
> Construire les lunules correspondant au cas n = 5, m = 1 et au cas n = 5, m = 3.

> ***EXERCICE 10***
>
> Existe-t-il d'autres lunules quarrables ?

ANNEXE 1 : Une longueur a et un rectangle d'aire k étant donnés, trouver deux longueurs x et y dont la différence est a et telles que l'aire du rectangle construit sur ces deux longueurs soit égale à k.

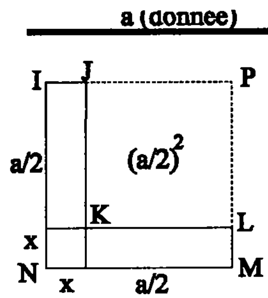


Fig. 8

Analyse. (*cf.* figure 8) Le problème se traduit par

$$\begin{cases} y - x = a \\ xy = k \end{cases}$$

Soit :

$$x(x + a) = k$$
$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x = k$$

Or $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}x$ est l'aire du gnomon IJKLMN.

En "complétant" ce gnomon pour avoir un carré IPMN, le problème se ramène à la construction d'un carré d'aire $k + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Synthèse. La première opération consiste à construire un rectangle CEFG d'aire k et dont la longueur du côté CE est égale à $\frac{a}{2}$.

Au rectangle CEFG, on ajoute le carré GFHQ pour obtenir un rectangle d'aire $k + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

La quadrature du rectangle CEHR nous donne la solution du problème.

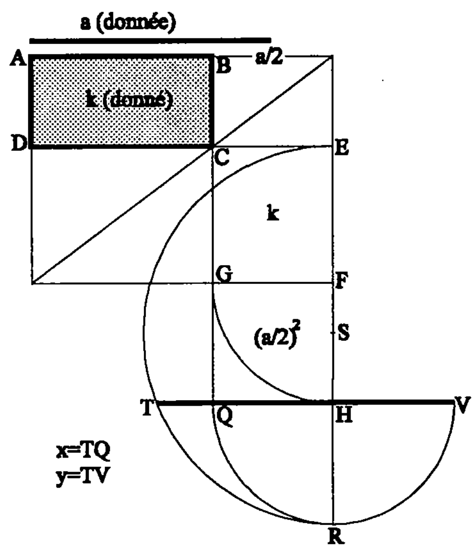


Fig. 9

ANNEXE 2 : Corrigé – partiel – de quelques exercices

Corrigé de l'exercice 1 : les segments de cercle (AeIA) et (AJEA) sont semblables car inscrits dans des ¼ de cercle. Par conséquent, on a, en notant de la même manière une surface et l'aire de cette surface, les égalités suivantes :

$$\frac{\mathrm{AeIA}}{\mathrm{AJEA}}=\frac{\mathrm{AI}^2}{\mathrm{AE}^2}=\frac{1}{2}$$

D'où :

AeIA + IfEI = AJEA

Et, finalement :

AeIfEJA = AeIA + IfEI + AIEJA
+ AJEA + AIEJA + AIE = ABCD

Corrigé de l'exercice 2 (question 2)
(*cf.* figure 10)

Soit A' le point diamétralement opposé à D ; alors,

$\sin \mathrm{D\hat{A}'C} = \frac{\mathrm{CD}}{2.\mathrm{AI}} = \frac{1}{2.\mathrm{AI}}$ car le triangle A'DC est rectangle et $\mathrm{D\hat{A}'C} = \mathrm{D\hat{A}C} = \mathrm{C\hat{A}B}$.

D'où :

$$AI = \frac{1}{2\sin\left(\dfrac{D\hat{A}B}{2}\right)}$$

Or :

$$\sin^2\left(\frac{D\hat{A}B}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos D\hat{A}B\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{AF}{AB}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1-AF)=\frac{3-AD}{4}=\frac{3-a}{4}$$

Par conséquent :

$$2.\sin D\hat{A}C = 2.\sin\left(\frac{D\hat{A}B}{2}\right)=\sqrt{3-a}$$

et

$$\boxed{AI=\frac{1}{\sqrt{3-a}}}$$

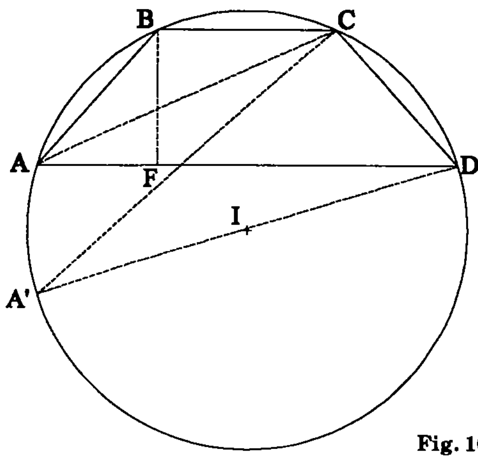


Fig. 10

Corrigé de l'exercice 3 : Des considérations sur les aires montrent que l'aire de la lunule est égale à l'aire du quadrilatère AIOD augmentée de la différence des aires des deux secteurs angulaires IABCDI et OANDO. Or cette dernière est nulle car, en posant $x = \mathrm{A\hat{O}H} = \mathrm{D\hat{A}C} = \frac{1}{3}\mathrm{A\hat{I}j}$, on a :

$$\sin x = \frac{1}{2.\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{OA}}.$$

D'où OA = 2.AH.AI = AD.AI et l'aire de chacun des deux secteurs angulaires est $x.\mathrm{OA}^2 = 3x.\mathrm{AI}^2$.

Corrigé de l'exercice 7 : Les angles $\mathrm{G\hat{P}I}$, $\mathrm{G\hat{O}H}$ et $\mathrm{A\hat{O}B}$ sont égaux. Les segments de cercle correspondant sont donc semblables et on a :

$$\frac{\mathrm{GJIG}}{\mathrm{GHG}}=\frac{\mathrm{GI}^2}{\mathrm{GH}^2}=3 \text{ car } \mathrm{GI}^2=3\mathrm{R}^2=3.\mathrm{GH}^2.$$

$$\frac{\mathrm{ABA}}{\mathrm{GHG}}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{GH}^2}=\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}^2}=\frac{1}{6} \text{ d'où } 6.\mathrm{ABA}=\mathrm{GHG}$$

Par conséquent :

GJIG = 3.GHG = GHG + HIH + 6.ABA

Et finalement :

GHI = GHIJG + GJIG – GHG – HIH
= GHIJG + 6.ABA

Corrigé de l'exercice 11 :

Dans son article de 1840, Th. Clausen avait conjecturé qu'il n'y avait pas d'autres lunules quarrables en dehors de celles qu'il avait (re)découvertes.

En 1903, Landau (4) (1877-1938) démontre que si le rapport $\frac{y}{x} = \frac{n\alpha}{m\alpha}$ est un nombre premier non gaussien (c'est-à-dire autre que de la forme $2^{2^p} + 1$) alors la lunule correspondante n'est pas quarrable. Mais le résultat de Landau ne donne aucune information dans le cas où ce rapport est un nombre premier gaussien (par exemples : 3 ou 5, qui correspondent aux lunules n° 2 et 4 ci-dessus).

Ce résultat est complété en 1928 par L. Tschakaloff (5) qui élimine le cas $\frac{n}{m} = 17$ et en 1933 par Tschebotarev (6) qui règle le cas où m ≡ n[mod 2].

La conjecture de Clausen est définitivement démontrée en 1947 par Dorodnov (7).

(4) Landau : "Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke", *Berliner Math. Gesellschaft* (Jahrgang 2 (1903) pp. 1-3.)

(5) L. Tschakaloff : "Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke", *Math. Zeitschrift* 30 (1929), pp. 552-559.

(6) Tschebotarev : "Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke", *Math. Zeitschrift* 39 (1934) pp. 161-175.

(7) Dorodnov : "Lunules circulaires à la règle et au compas", (en russe), *Doklady Akademie Nauk*. SSSR 58, pp. 965-968.