# CHRONIQUE D'UNE CORRESPONDANCE PROBABLEMENT APOCRYPHE

Jacques VERDIER, Pol LE GALL, André VIRICEL
et Bernard PARZYSZ (Régionale Lorraine APMEP)
Michel HENRY (APMEP et IREM de Besançon)
Gilberte PASCAL (IREM de Port Royal)

Nous reproduisons ici, avec l'aimable autorisation des auteurs et de la rédaction du *Petit Vert*, bulletin de la Régionale de Lorraine de l'APMEP, une polémique épistolaire traversant les siècles pour confronter différents points de vue sur la notion de probabilité et ses liens avec la réalité. Cette correspondance a été déclenchée par un agaçant petit problème de probabilités soumis par *Le Petit Vert* (n° 42, Juin 1995) à la sagacité de ses lecteurs.

**Premier acte : un problème proposé par Bernard PARZYSZ**

*Un hebdomadaire organise un concours selon le principe suivant : une question est posée aux lecteurs ; il s'agit pour les participants d'inscrire la réponse sur une carte postale, et de l'envoyer au siège de la revue.*

*Le règlement du concours précise que le gagnant sera "la personne dont la carte aura été tirée au hasard parmi celles portant une bonne réponse".*

*Cependant, afin de s'épargner la fastidieuse tâche de trier préalablement les bonnes réponses des mauvaises, les organisateurs décident d'utiliser la procédure suivante : on tire au hasard une carte parmi* ***toutes*** *les cartes reçues ; si cette carte indique la bonne réponse, son expéditeur est déclaré gagnant du concours ; sinon, on opère des tirages successifs (sans remise) d'une carte, jusqu'à obtention d'une bonne réponse.*

*Blaise, qui a envoyé une carte portant la bonne réponse, se demande si cette procédure ne le désavantage pas par rapport à celle qui figure dans le règlement initial.*

*Qu'en pensez-vous ?*

Dans son n° 43 (Septembre 95), *le Petit Vert* publie trois réponses qui concluent que *la probabilité de gain de Blaise est la même dans les deux cas.* Ces réponses font intervenir de manières différentes la même notion de probabilité conditionnelle. Mais cette notion, fruit de l'élaboration séculaire du modèle probabiliste, est-elle pertinente dans ce problème ? Vous en jugerez.

1) André VIRICEL, sans formalisation, indique que dans le second cas *"tout se passe comme si les mauvaises réponses n'existaient pas"* ; ce qui, en effet, résulte du fait qu'un tirage donnant une mauvaise carte peut être considéré comme nul est non avenu ; la procédure revient alors à effectuer un tirage dans l'ensemble des "bonnes" cartes.

Les deux autres solutions formalisent cette idée en se plaçant dans le cadre de la théorie des probabilités : il est toujours réconfortant, en effet, de constater que, sur tel point particulier, le résultat fourni par la théorie n'est pas contraire à l'intuition. Ce qui concourt à montrer que 1° la théorie et 2° la modélisation que l'on a effectuée ne sont pas complètement farfelues.

2) Pol LE GALL procède ainsi :

Soient $N$ le nombre de réponses reçues par l'hebdomadaire et $n$ le nombre de réponses exactes. Appelons $A$ l'événement : "Blaise est le gagnant".

a) Si l'hebdomadaire respectait la procédure annoncée, on aurait, en tirant au sort parmi les $n$ bonnes réponses : $P(A) = \frac{1}{n}$.

b) Dans la procédure effective, la main innocente chargée du tirage devra, au pire, effectuer $N - n + 1$ tirages, car il y a $N - n$ mauvaises réponses.

Soit $A_k$ l'événement "c'est au $k^{\text{ième}}$ tirage que l'on obtient la première réponse exacte" ($1 \leq k \leq N - n + 1$ ).

Les événements $A_k$ constituent à l'évidence un système complet., et on peut écrire :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(A|A_k).P(A_k)$$

Or, pour tout $k$, on a $P(A \mid A_k) = \frac{1}{n}$, car aucune bonne carte n'a été précédemment tirée (il en reste donc $n$), et, sachant qu'une bonne carte va être tirée, Blaise a donc une chance sur $n$ d'être gagnant.

On obtient alors

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-n+1} P(A_k) = \frac{1}{n}$$

(puisque $\sum_{k=1}^{N-n+1} P(A_k) = 1$, en vertu du fait que les $A_k$ constituent un système complet d'événements).

Donc, en ce qui concerne les chances de succès de Blaise, les deux procédures sont équivalentes.

3) Venons-en maintenant à la solution de Jacques VERDIER qui, quoique paraissant *a priori* plus calculatoire, ne manque pas non plus d'intérêt (ne serait-ce que parce qu'elle fait intervenir une formule de combinatoire qu'on a rarement l'occasion d'utiliser) :

Nous conservons les notations précédentes, et nous définissons en outre les événements suivants :

$F_i$ : "au $i^{ième}$ tirage, on obtient une réponse incorrecte"
$B_k$ : "Blaise gagne au $k^{ième}$ tirage".

Nous avons bien sûr $P(A) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(B_k)$.

Mais, en remarquant que l'on a

$B_k \subset F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}$,

nous pouvons écrire

$B_k = F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap B_k$.

La formule des probabilités composées nous donne alors :

$P(B_k) = P(F_1).P(F_2 \mid F_1).P(F_3 \mid F_1 \cap F_2)$
$\ldots P(B_k \mid F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1}$, soit :

$$P(B_k) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{N-n-1}{N-1} \ldots \frac{N-n-k+2}{N-k+2} \cdot \frac{1}{N-k+1},$$

ou encore :

$$P(B_k) = \frac{(N-n)!}{(N-n-k+1)!} \cdot \frac{(N-k)!}{N!} = \frac{(n-1)!\, C_{N-k}^{n-1}}{n! C_N^n} = \frac{1}{n} \frac{C_{N-k}^{n-1}}{n\, C_N^n}.$$

D'où :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(B_k) = \frac{1}{nC_N^n} \sum_{k=1}^{N-n+1} C_{N-k}^{n-1}$$

Évaluons donc $S = \sum_{k=1}^{N-n+1} C_{N-k}^{n-1}$ :

En posant $\begin{cases} p = n-1 \\ q = N-n \\ j = N-n-k+1 \end{cases}$

il vient $S = \sum_{j=0}^{N-n} C_{p+j}^{p}$.

Or on sait (ou on démontre par récurrence) que $\sum_{j=0}^{m} C_{p+j}^{p} = C_{p+m+1}^{p+1}$.

D'où $S = C_{p+N-n+1}^{p+1}$. Ou, en revenant aux notations initiales, $S = C_N^n$. Et, finalement :

$$P(A) = \frac{1}{nC_N^n} \cdot C_N^n = \frac{1}{n}.$$

**Conclusion :** Je ne sais si les hebdomadaires qui organisent ce type de concours ont fait appel à un *"consultant en probabilités"* pour savoir si la procédure qui consiste à trier des milliers de cartes, et celle qui consiste à... ne rien faire, sont équivalentes, mais je crois deviner vers laquelle ils se sont dirigés. Et, si ce sont uniquement des raisons d'économie qui ont guidé ce choix, nous sommes maintenant en mesure de les rassurer : il pourront continuer à écrire *"un tirage au sort, effectué parmi toutes les bonnes réponses par Maître X..., huissier, permettra d'attribuer..."* (1), et à faire autre chose. Mais en y réfléchissant bien -me souffle le logicien- il ne s'agit pas d'autre chose, car si l'on tire parmi *toutes* les cartes, on tire *a fortiori* parmi les bonnes...

(1) *Cf.*, par exemple, *Télé 7 Jours* n° 1841 du 9 sept. 1995.

### Deuxième acte : une étrange lettre de Gilberte Pascal

Peu de temps après la publication du n° 43, *le Petit Vert* recevait cette lettre d'une certaine Gilberte PASCAL, sœur de Blaise (2), et la publiait dans son n°44 de Décembre 95.

*Mademoiselle Gilberte Pascal*
*à*
*Messieurs André, Pol, Jacques et Bernard.*

*Messieurs,*

*Je ne sais comment vous avez eu connaissance des inquiétudes de mon jeune frère Blaise, mais quelle ne fut pas ma surprise en feuilletant votre petite publication verte datée de septembre, dans la page 24 de laquelle vous vous intéressez à son problème. C'est en effet après avoir appris (je ne sais trop comment) que le gagnant au concours organisé par un hebdomadaire serait tiré au sort parmi les bonnes réponses en utilisant la procédure simplifiée que vous rapportez, qu'il a commencé à me demander si cela aurait une influence sur ses chances de gagner. N'étant pas versée dans les mathématiques, ni même dans le calcul des probabilités, je ne trouvai guère de raisons susceptibles de le rassurer, si bien que c'est avec un profond soulagement que je me plongeai dans votre contribution sur le sujet, dans l'espoir d'y trouver quelqu'argument décisif capable d'emporter sa conviction.*

*Autant vous le dire d'emblée : aucun de vos magnifiques raisonnements n'a suffi. La jeunesse est le plus souvent d'un entêtement que les reproches ne sauraient entamer et les raisons les plus fondées n'ont généralement pas de prise sur les esprits qui refusent obstinément de les entendre. Vous le savez d'ailleurs sans doute, puisque vous sembler exercer le dangereux métier de professeur. C'est donc à la seule fin de compléter votre expérience (et de vous éviter pareille mésaventure) que je prends la liberté de vous écrire pour vous conter dans le détail l'échec que j'ai subi en voulant utiliser votre article.*

*J'ai d'abord cru bien faire en lui rapportant l'explication que vous semblez tenir d'un ami logicien : "En réfléchissant bien, lui dis-je en préambule, si l'on tire parmi toutes les cartes, on tire a fortiori parmi les bonnes...". L'impertinent me laissa entendre avec perfidie que je ferais mieux de ranger mon latin raisonnant (peut-être a-t-il même voulu dire "résonnant", mais je ne saurais l'affirmer) et de revoir mon français ! Pour lui, la préposition parmi, qui signifie au milieu de, doit s'entendre sous le sens commun de dans l'ensemble de, avec la seule hypothèse supplémentaire d'équiprobabilité propre à garantir l'équité. En d'autres termes, il a prétendu que tirer parmi les bonnes réponses impliquait bien d'effectuer le tirage dans l'ensemble de toutes les réponses, mais qu'en l'occurrence il serait clair que l'égalité des chances ne serait pas assurée au même titre pour toutes les réponses. Il est donc impossible – pour ces raisons de non équiprobabilité – de considérer que le tirage parmi les bonnes réponses induirait a fortiori un tirage parmi toutes les réponses. Le problème inverse lui parut encore plus clair : effectuer le tirage parmi toutes les réponses n'implique en quelque*

(2) Blaise PASCAL (1623-1662) avait deux sœurs : Gilberte (Mme Périer, 1620-1687) qui a publié une *Vie de Blaise Pascal*. et Jacqueline (1625-1661) qui entra en religion à Port-Royal, abbaye janséniste auprès de laquelle se regroupèrent des solitaires, dits les "messieurs de Port-Royal" (Lemaistre de Sacy, Nicole, Arnauld, Lancelot, Hamont).

*sens que ce soit le tirage parmi les bonnes réponses. Prétendre le contraire serait tout simplement estimer qu'il n'y a pas de problème (alors pourquoi le poser ?) ou affirmer que la procédure revient au même pour rétablir l'équiprobabilité. C'est en effet de cela qu'il s'agit, mais "affirmation ne vaut pas réponse", m'a-t-il proféré sentencieusement (et j'ai bien eu l'impression qu'il cherchait en cela à imiter son professeur de mathématiques)...*

*Vous comprendrez, je le pense, que j'ai bien vite rangé ce premier argument dont je n'ai sans doute pas eu la capacité qui aurait été la vôtre pour le faire valoir. Mais reculant le moment que je craignais le plus de devoir entrer dans les calculs, j'essayai encore le raisonnement non formalisé en essayant de le convaincre que "tout se passait comme si les mauvaises réponses n'existaient pas" puisque "le tirage donnant une mauvaise carte pouvait être considéré comme nul et non avenu". Il ne me laissa même pas terminer ma phrase en me conseillant (comme son professeur le lui avait maintes fois enjoint, dit-il) de supprimer les superlatifs rhétoriques destinés à donner du poids à mon affirmation et de ne lui faire part que des éléments de raisonnements effectifs, seuls susceptibles d'étayer ma conclusion. Je dus battre en retraite, là encore, car je sentais bien que cette façon de voir les choses ne contenait pas le moindre argument et je me surpris moi aussi à penser qu'affirmation ne vaut pas réponse, même si elle est renforcée avec un maximum d'effets oratoires : la réponse devait indéniablement résider dans le "tout se passe comme si", mais, n'étant pas à votre place, je ne disposais pas de l'autorité scientifique suffisante pour m'éviter d'avoir à expliquer véritablement le cheminement déductif complet.*

*Comme vous vous en doutez, je n'échappai pas à l'obligation que je redoutais d'avoir à exposer de savants calculs auxquels je ne comprends pas grand chose, mais qui sont cependant propres, si je vous ai bien compris, à justifier que la théorie et la modélisation probabilistes ne sont pas "complètement farfelues". J'avoue toutefois que j'étais tout de même rassérénée, car je m'imaginais que les équations allaient favorablement impressionner le petit Blaise et que cela permettrait enfin de clore le débat. Il me laissa faire en m'observant d'un sourire qu'il me faut bien qualifier de supérieur, et je dois reconnaître que si je conserve encore aujourd'hui quelque rancune à propos de ces événements, c'est essentiellement à cause du malaise que me procure toujours le souvenir de ce sourire goguenard... Mais laissons-là ces sentiments. Une fois les calculs achevés, il alla silencieusement dans la corbeille à papiers pour retirer une dizaine de feuilles froissées qu'il déroula devant moi et sur lesquelles je pus apercevoir les mêmes formules que celles dont je venais à peine de me débrouiller péniblement. "Tu peux, comme moi, me dit-il, mettre tous tes calculs à la poubelle : ils sont insensés et ne prouvent rien !".*

*Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formalisation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner sur des lignes et des lignes de sommations plus originales et plus intéressantes les unes que les autres le double fait que l'on supposait à chaque pas :*

*1°) que les seuls gagnants possibles étaient choisis parmi les n bonnes réponses,*
*2°) que la procédure n'introduisait aucune différence de statut entre ces différentes bonnes réponses.*

*Dans ces conditions, ajouta-t-il, il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence : toute bonne réponse aurait inéluctablement une probabilité p telle que n.p = 1 ! Des procédures de tirages d'apparence encore plus farfelue (comme de choisir tout simplement la première ou la dernière, la plus lourde ou la plus légère des bonnes réponses parvenues) donneront le même résultat à partir du moment où l'on n'introduit dans le modèle aucune clause détruisant la symétrie !*

*Cette remarque me parut pleine de bon sens et je ne pus m'empêcher de glisser avec un certain soulagement qu'il devait désormais être rassuré, puisque ses chances de gagner étaient les mêmes dans tous les cas. "Au contraire, me dit-il d'un air espiègle que je lui connaissais trop, il suffit de remarquer que la procédure permet aux plus malins – du moment qu'il n'y a aucune vérification – de compenser à leur avantage l'équiprobabilité des bonnes réponses... La dernière fois, j'ai envoyé une centaine de cartes à mon nom et j'espère ainsi avoir sensiblement amélioré mes chances !"*

*Vous conclurez évidemment avec moi que la jeunesse est particulièrement incorrigible ! Et croyez bien, Messieurs, que je plains souvent les pauvres professeurs de mathématiques qui se heurtent chaque jour à la difficulté de transmettre leurs théories et leurs modèles à des garnements qui ne sont pas dignes de les recevoir et bien incapables de les apprécier. J'espère cependant que les ennuis dont j'ai cru bon de vous faire part seront de quelque utilité pour votre réflexion et votre pratique.*

*Votre dévouée,*
*Gilberte Pascal.*

## Troisième acte : un commentaire iconoclaste de Michel HENRY

A la lecture de la lettre de Gilberte PASCAL, Michel HENRY, sollicité par la rédaction du *Petit Vert* comme "expert irémique", s'est permis quelques commentaires sur les trois solutions du problème n°42, réagit à la lettre de Gilberte PASCAL, relance le débat en proposant deux questions et un exercice et fait une proposition d'idylle (3).

Reprenons les données du problème : *"Pour participer à un jeu organisé par un hebdomadaire, chaque candidat envoie sa réponse sur une carte postale. Le gagnant sera celui dont la carte sera tirée "au hasard" parmi les bonnes réponses. Revient-il au même de tirer (sans remise) et "au hasard" parmi toutes les cartes reçues, jusqu'à obtenir la première carte portant la bonne réponse ?".*

Une réponse positive mérite-t-elle d'être justifiée ? Comment, avec quels arguments ? Les "démonstrations" de André VIRICEL, Pol LE GALL et Jacques VERDIER sont-elles équivalentes ? Répondent-elles aux doutes du jeune Blaise ?

Il semble que non, malgré les explications de sa sœur Gilberte qui ne parvient pas à entamer son scepticisme. Pourquoi ?

Blaise serait-il demeuré à ce point qu'il ne comprenne ni une explication transparente (celle de André VIRICEL), ni un calcul élémentaire (celui de Pol LE GALL), ni bien sûr l'application d'une formule de combinatoire (due à l'habileté de Jacques VERDIER) ?

(3) Publiés aussi dans le n° 44 du *Petit Vert* de Décembre 95.

Ses *pensées* n'iraient-elles pas plutôt au delà des pratiques courantes (du moins en classe) de traitement des problèmes de probabilités, pour poser une question de fond sur le statut des objets mathématiques et finalement sur le Savoir ?

De ce point de vue, à quels niveaux se situent les réponses de nos trois compères ?

Blaise précise (fin du 3^e^ paragraphe de la lettre de Gilberte) : "[peut-on] *affirmer que la procédure revient au même pour rétablir l'équiprobabilité . C'est en effet de cela qu'il s'agit*". Bonne question ! comme on dit quand on ne sait pas trop. Mais que veut donc dire Blaise par *"rétablir l'équiprobabilité"* ?

La réponse de André VIRICEL reste ambiguë : *"tout se passe comme si les mauvaises réponses n'existaient pas..."*. Où cela se passe-t-il donc ?... Dans la réalité concrète où l'on a mis les cartes postales dans un grand sac, que l'on a bien mélangé ? Y a-t-il alors "équiprobabilité" sur l'ensemble des cartes ? Certains en doutent : le mélange est-il parfait ou a-t-il conservé, malgré tout, un certain ordre dans l'empilement des cartes postales ? Et si, comme Blaise, des lecteurs ont envoyé au journal plusieurs réponses sans que cela soit contrôlé ? (on sort alors de la règle du jeu, mais dans la situation *concrète,* y a-t-il un dispositif de contrôle ?).

A ce niveau, que nous appellerons *"niveau 0"*, la description de l'expérience aléatoire : "tirer une carte au hasard", n'est pas suffisamment fine pour parler de sa reproduction possible un grand nombre de fois (approche fréquentiste), ou pour parler de "géométrie du hasard" dans l'agencement des cartes dans le grand sac.

Manifestement André VIRICEL se place au *niveau 1* de la modélisation. *"Tout se passe comme si"* veut dire : supposons une expérience aléatoire idéale que l'on peut décrire en termes pseudo-concrets par le tirage d'une carte d'un grand sac. L'appréciation que je porte sur le déroulement de l'expérience concrète, me permet de faire une hypothèse de modèle : "Les cartes du grand sac sont équiprobables", et je n'ai pas besoin de décrire le dispositif permettant au niveau 0 de le contrôler. En existe-t-il un en réalité ?

Et *"tout se passe comme si"* prend alors le sens d'une périphrase de niveau 1, mise pour axiome de modèle : l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des cartes postales, qui fonde le concept même de probabilité et son fonctionnement dans ce modèle, induit, *par principe,* l'équiprobabilité sur la partie réduite aux cartes postales portant la bonne réponse. André VIRICEL répond alors de manière tautologique à la question de Blaise : la procédure des tirages successifs, décrite au niveau 1, ne le désavantage pas puisqu'on fait l'hypothèse de modèle qu'elle ne le désavantage pas.

Ainsi Blaise a-t-il raison de prétendre qu'"*affirmation ne vaut pas réponse*" .

Qu'en est-il des réponses de Pol LE GALL et Jacques VERDIER ?

On peut constater qu'elles se placent d'emblée au niveau 1 du modèle, faisant l'hypothèse d'équiprobabilité : $P(A) = 1/n$, si l'on tire parmi les bonnes réponses. Pour retrouver ce même résultat dans l'autre procédure, Pol LE GALL et Jacques VERDIER introduisent une probabilité conditionnelle : $P(A/A_k) = 1/n$ et, après des calculs plus ou moins savants, obtiennent :

$P'(A) = 1/n$, où $P'$ est la probabilité associée à cette autre procédure.

Mais qu'est-ce que $P(A/A_k)$ ? On est ici en face d'un objet mathématique, prenant son statut au sein de la théorie abstraite des probabilités (la définition de $P(A/B)$ est donnée sans aucune référence au sens *pseudo-concret* des événements $A$ et $B$). On se place donc à un *niveau 2,* celui de la mathématisation. Dans ce cadre, on (le professeur) donne la *définition :* $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, reliant ce nouvel objet à la probabilité *a priori*.

Du point de vue de la théorie mathématique abstraite, cela est consistant. On définit ainsi une nouvelle probabilité avec laquelle on peut faire des calculs (et Jacques VERDIER ne s'en prive pas !) qui ne font que souligner la pertinence ou l'adéquation de la théorie probabiliste à l'idée que l'on se fait de la réalité (ouf !).

Mais pour donner un sens pseudo-concret à cette probabilité conditionnelle, il faut la mettre en regard du modèle de niveau 1. C'est le problème didactique auquel se heurtent tous nos collègues de terminale :

Ou bien on reste au niveau 2 et *on donne la définition* aux élèves. Ils doivent l'apprendre et l'appliquer dans les situations où, par effet de contrat didactique, un accord tacite avec le professeur suffira pour valider les calculs qui en résultent.

Ou bien on veut lui donner un sens plus concret et, comprimant les niveaux 1 et 2, on présente aux élèves, *une "justification"* cardinaliste (ou fréquentiste) : si on fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur $\Omega$ (l'ensemble de toutes les cartes), alors "il est clair que" la trace de la probabilité P sur l'ensemble B des bonnes cartes est aussi équirépartie ; et si $P(A/B)$ est conçue comme le rapport du nombre des cartes favorables à la réalisation de $A$ au nombre total de cartes qui réalisent $B$, on a par dénombrement "naturel" :

$$\begin{aligned} P(A / B) &= \frac{Card\,(A \cap B)}{Card\,B} \\ &= \frac{Card\,(A \cap B)}{Card\,\Omega} \times \frac{Card\,\Omega}{Card\,B} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ ! \end{aligned}$$

Alors Pol LE GALL et Jacques VERDIER "démontrent" avec leurs savants calculs un résultat ($P(A) = 1/n$ dans les deux cas) qui, pris comme hypothèse de modèle, sert de justification heuristique à la définition de l'objet $P(A/B)$ qu'ils utilisent à cette fin. Peut-on plus allègrement se mordre la queue ? La solution tordue de Jacques VERDIER (qu'il me pardonne) ferait plutôt penser au recollement d'une bande de Möbius !

Ainsi s'éclairent les propos de Blaise : *"Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formalisation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner sur des lignes et des lignes de sommations plus originales et plus intéressantes les unes que les autres le double fait que l'on supposait à chaque pas"*, et rendons hommage à la profondeur de la remarque qui suit, si fidèlement transcrite par sa sœur Gilberte : *"il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence"* !

Bien que Blaise soit à l'aise en mathématiques, notons son comportement pragmatique qui le conduit à une décision de niveau 0, *"améliorant sensiblement ses "chances""*.

Alors, il reste deux questions et un exercice :

*Une question mathématique :* Jacques VERDIER utilise une formule peu connue de combinatoire, $\sum_{j=0}^{m} \binom{p+j}{p} = \binom{p+m+1}{p+1}$, pour obtenir le même résultat que Pol LE GALL : $P(A) = 1/n$. Dans la mesure où : $P(A/B)$ dans LE GALL = $P(A/B)$ dans VERDIER, les calculs pris à l'envers sont-ils une démonstration probabiliste de cette formule ? Qu'en pensez-vous ?

*Une question didactique :* L'introduction des 3 niveaux de description d'une expérience aléatoire vous semble-t-elle éclairante pour comprendre certains paradoxes, certains comportements ambigus des élèves, pour analyser certains contrats didactiques et certains énoncés de Bac ?

Précisons à nouveau ces trois niveaux :

– Niveau 0 : description naïve du déroulement d'une expérience effective du *domaine du sensible*, dont la répétition, jusqu'à la stabilisation de la fréquence d'un événement observé, donne à penser sur la complexité des phénomènes aléatoires, tout en constatant dans leur répétition une certaine régularité.

– Niveau 1, dit de la modélisation : description codée d'une expérience imaginaire simplifiée, pseudo-concrète, abstraite dans le *domaine des Idées*, porteuse des hypothèses de modèle et du concept de probabilité.

– Niveau 2, dit de la mathématisation : dans le cadre d'une théorie mathématique formelle (ensembles... ), introduction d'objets nouveaux (probabilité-mesure) par leurs définitions axiomatiques et formulation d'hypothèses abstraites.

La distinction explicite en classe de ces trois niveaux par des vocabulaires spécifiques ("fréquences" versus "probabilités"...) et par des traitements statutairement différents (déclarations de bon sens, combinatoire et raisonnements adaptés à des situations pseudo-concrètes, applications de théorèmes), vous semble-t-elle pertinente ?

***L'exercice :*** *A, B, C tirent à la courte paille pour savoir qui sera mangé. A, le plus costaud tire le premier ; B, son ami, tire en second. Le hasard ayant fait son œuvre, C n'a plus le choix et prend celle qui reste. Pas de chance, il tombe sur la petite. Il ne peut s'empêcher de penser qu'en tirant le premier, sa bonne étoile ne l'aurait pas abandonné et sa main aurait été plus heureuse.*

Question : que répondez-vous à un élève qui pense comme C ?

*Question subsidiaire* (mais intéressée, mes neurones expriment un certain tropisme : ils sont disponibles pour une relation... platonique, bien sûr) : Qui selon vous est Gilberte PASCAL ? Inscrivez votre réponse sur carte postale à l'adresse de l'IREM de Besançon, la 17e carte reçue gagnera une brochure.

**Quatrième acte : une mise au point de Bernard PARZYSZ (4)**

L'introduction de trois niveaux dans un processus de modélisation, proposée par Michel HENRY, semble compliquer l'analyse et Bernard PARZYSZ suggère de considérer les niveaux 1 et 2 comme deux expressions différentes d'un même modèle se situant dans le monde platonicien des Idées (5). S'agirait-il seulement d'une question de registres de représentation ? Le formalisme mathématique nous apporte la puissance des outils de calcul de l'analyse, cela mérite-t-il d'être distingué ? Mais Bernard PARZYSZ souligne aussi la présence de deux modèles implicites dans les solutions proposées. La question est donc bien celle du choix du modèle le plus pertinent. Mais comment le déceler ?

Michel,

Ceci constitue, pour ainsi dire, une réponse à ta réponse à la réponse de *"Gilberte PASCAL"*.

Comme vous l'avez remarqué, Gilberte et toi, le problème que j'avais proposé était *totalement piégé*. La lettre de Gilberte et ta réponse ont levé le lièvre : peut-être pourrons-nous ainsi faire un peu avancer le schmilblick ?

Venons-en donc au sujet du débat : si je te suis bien, tu distingues 3 niveaux (hiérarchisés) de description de la situation proposée. Je vais donc reprendre ces niveaux, et t'en proposer ma propre "lecture" qui, me semble-t-il, diffère parfois un peu de la tienne :

– le *niveau 0* serait celui du "concret", de la "réalité" : on a des *"cartes postales en noir et en couleur"* (comme chantait Montand), aux sujets divers, de dimensions variées, apportées plusieurs jours durant au siège du journal dans un certain nombre de sacs postaux, etc. Diverses procédures d'obtention de la carte gagnante sont possibles (et, faute d'information, *a priori* toutes envisageables). Par exemple : choisir un des sacs postaux (comment ?), l'ouvrir, plonger la main dedans sans regarder et extraire une carte (après avoir ou non mélangé le contenu du sac). Ou encore : déverser le contenu de tous les sacs en un grand tas, fermer les yeux et piocher une carte. Ou encore : trier toutes les cartes reçues pour ne garder que celles portant la bonne réponse, puis utiliser la procédure précédente. Ou encore...

A ce niveau, on n'a évidemment pas les moyens de dire quelque chose d'intéressant relativement à la question posée ; on peut tout juste émettre une opinion, éventuellement la défendre en utilisant le "bon sens" (celui de la "sagesse populaire", qui dit aussi bien *"à père avare, fils prodigue"* que *"tel père, tel fils"*), mais sans plus.

– le *niveau 1*, serait celui des objets idéaux chers à PLATON, dans lequel les cartes postales, toutes rassemblées dans un même sac, sont *supposées* (c'est donc une *hypothèse*) "indiscernables au toucher" (comme disent les manuels). Le point de vue d'André VIRICEL, comme tu le fais remarquer, se situe à ce niveau ; on peut

(4) Publiée dans le n° 45 du *Petit Vert* de Mars 1996.

(5) La poursuite de ce débat au sein de la commission Inter-IREM "Statistique et Probabilités" a abouti à une clarification de cette notion de modèle à des fins d'analyses didactiques pour l'enseignement. On la trouvera dans l'ouvrage de la commission : *Enseigner les probabilités au Lycée*, publié en Octobre 1997, disponible dans les IREM.

dire qu'il suppose (mais de façon bien sûr implicite) que chaque carte a la même chance d'être tirée. Nous sommes bien ici dans un modèle de type "pré-kolmogorovien", celui de la "géométrie du hasard" utilisé par les probabilistes du 17$^e$ au 19$^e$ siècle. Ce niveau permet de fournir des réponses précises et argumentées aux problèmes que l'on se pose, mais il n'y a pas encore de véritable théorie axiomatique globale au sein de laquelle on puisse se placer. Il a néanmoins, historiquement, fourni des résultats importants en probabilités.

Dans le cas de la solution d'A. VIRICEL, il y a, à deux reprises, passage d'une procédure à un modèle :

1° la procédure consistant à rassembler les $n$ bonnes cartes, puis à extraire l'une de ces cartes *(niveau 0)*, est modélisée en considérant l'ensemble des bonnes cartes, dans lequel chaque carte à la même probabilité d'être tirée *(niveau 1)* ;

2° la procédure consistant à rassembler les $N$ cartes reçues, puis à procéder à des tirages successifs d'une carte jusqu'à obtention d'une bonne carte *(niveau 0)*, est *interprétée* comme signifiant que les mauvaises cartes ne comptent pas, puis modélisée...par le même modèle que le précédent *(niveau 1)*. D'où, évidemment, l'identité des réponses obtenues à la question posée.

Le problème, à mon avis, réside donc ici dans le passage du niveau 0 au niveau 1 : *à deux procédures différentes on fait correspondre un seul et même modèle*, ce qui a pour conséquence que la question initialement posée n'a plus de raison d'être, et entraîne la tautologie constatée.

– le *niveau 2* serait celui de la mathématisation, conduisant en particulier à définir un espace probabilisé à partir de l'expérience "concrète" considérée au niveau 0.

Dans l'exemple qui nous occupe,

1° A la première des deux procédures ci-dessus, on *peut* associer l'univers $\Omega_1$ constitué par l'ensemble des $n$ bonnes cartes : $\Omega_1 = \{\ \omega_i / i \in \{1, \ldots ,n\}\}$, avec comme probabilité $P_1$ l'équiprobabilité. Appelant $\omega_1$ la carte de Blaise et $A$ l'événement : "Blaise gagne", on a : $A = \{\omega_1\}$, et la probabilité que Blaise gagne est alors : $P_1(A) = 1/n$.

2°A la seconde de ces deux procédures, on *peut* associer l'univers $\Omega_2$ constitué par l'ensemble des $(N - n + 1)$ -arrangements de cartes (distinctes) reçues (puisqu'il y a au maximum $N - n + 1$ tirages), univers du type de celui envisagé par Fermat dans sa correspondance avec Pascal au sujet du problème des partis, dans lequel on imagine que l'on continue à tirer des cartes *même après l'obtention d'une bonne carte*. Dans ce cas aussi, on prend comme probabilité $P_2$ l'équiprobabilité.

En notant $B_k$ l'événement "Blaise gagne au $k^e$ tirage", on a

$$A = \bigcup_{k=1}^{N-n+1} B_k$$

et le calcul de $Card\,A = \sum_{k=1}^{N-n+1} Card\,B_k$ conduit

à $P(A) = \dfrac{Card\,A}{Card\,\Omega_2} = \dfrac{1}{n}$, par des calculs voisins de ceux de Jacques VERDIER.

(N.B. : j'ai choisi sciemment cet univers, de façon à ne pas introduire, contrairement à Pol LE GALL et J. VERDIER, de probabilités conditionnelles. Notons que ce même espace probabilisé est peut-être (mais on le sait pas) celui qu'ont choisi Pol LE GALL aussi bien que Jacques VERDIER ; dans ce cas, on peut reprendre leurs solutions en se passant des probabilités conditionnelles, ce qui donnera quelque chose du genre ci-dessus.)

Il me semble qu'il s'agit là, au formalisme près, d'une solution qu'auraient pu produire PASCAL ou FERMAT eux-mêmes, puisqu'elle se réduit en fait à des dénombrements et à la "géométrie du hasard". Et ainsi, plus qu'un passage du niveau 1 au niveau 2, la question me semble être plutôt celle du passage *du niveau 0 à un niveau modélisé*, c'est-à-dire d'une situation "réelle" à *un* modèle de cette situation, que ce modèle soit complètement formalisé et intégré à une théorie mathématique *(niveau 2)* ou non *(niveau 1)*. La formalisation *(niveau 2)* présente l'"avantage" de permettre de faire l'économie du sens des objets manipulés, comme tu le fais justement remarquer (c'est ce qui se passe aussi dans la résolution algébrique de problèmes "concrets") ; mais encore faut-il, après traitement, pouvoir revenir au sens et interpréter le résultat obtenu dans le niveau 0.

D'autre part, je ne partage pas l'avis de Blaise lorsqu'il dit qu'"*il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence*". Car, en réalité, qu'a-t-on postulé ci-dessus ?

1° l'équiprobabilité dans $\Omega_1$, et
2° l'équiprobabilité dans $\Omega_2$.

Bien sûr, il y a l'équiprobabilité dans les deux cas, mais il ne me semble pas que l'une de ces deux hypothèses puisse impliquer l'autre, *étant donné qu'il s'agit de deux modèles différents.*

Ce problème est d'ailleurs analogue à celui – plus classique – rencontré à l'occasion de l'étude du schéma d'urne exhaustif, que l'on peut formuler ainsi :

Une urne contient $N_1$ boules noires et $N_2$ boules blanches. Quelle est la probabilité d'obtenir $k$ boules noires :

a) à l'issue d'un tirage simultané de $n$ boules ?
b) à l'issue de $n$ tirages successifs d'une boule, sans remise ?

Bien sûr, notre "culture probabiliste" fait que nous savons que ces deux probabilités sont égales, mais est-ce si évident pour un élève ? Sans doute que non, étant donné que les deux procédures *(niveau 0)* sont totalement différentes. Il en est de même des modèles canoniquement associés à ces procédures :

– dans le premier cas : l'univers $\Omega_1$ est l'ensemble des parties de l'ensemble $B$ des boules dont le cardinal est égal à $n$ ;
– dans le second cas, l'univers $\Omega_2$ est l'ensemble des $n$–arrangements d'éléments de $E$ ;
– dans les deux cas, l'univers est muni de l'équiprobabilité.

La considération de la surjection canonique de $\Omega_2$ sur $\Omega_1$ (c'est-à-dire un raisonnement ou un calcul, au niveau des modèles) montre aisément que la probabilité de l'événement "on obtient $k$ boules noires et $n$-$k$ boules blanches" est la même dans les deux modèles. Mais, n'en déplaise à Blaise, *ceci n'est pas une évidence* a priori.

Le malentendu à propos du problème des cartes postales provient sans doute du fait que *les univers et les hypothèses n'ont pas été explicités* dans l'exposé des solutions de Pol LE GALL et de J. VERDIER. On retombe ici sur l'aspect didactique que tu évoques vers la fin de ton texte : la nécessité d'expliciter le modèle choisi pour rendre compte de l'expérience aléatoire étudiée, contrairement à ce que préconisent certains manuels qui estiment superflue la détermination explicite de l'univers dans lequel on se propose de travailler.

Que conclure, finalement ? Peut-être que, dans un modèle quel qu'il soit, *on ne peut trouver que ce qu'on y a mis*. Dans le cas présent, on ne peut contester –dans la mesure où les règles de traitement sont utilisées correctement– les résultats obtenus au sein d'un modèle, mais on peut contester le choix fait pour les divers modèles (c'est-à-dire, en fait, leur adéquation aux situations "concrètes" étudiées), ainsi que l'interprétation finale des résultats. Ce qui pose d'ailleurs une question débordant largement le cadre des probabilités (et dont la réponse n'est pas simple) : lorsqu'on fait une conjecture et que le modèle infirme cette conjecture, que peut-on en conclure ? Que la conjecture est fausse, ou que le modèle est inadéquat ?

### Cinquième acte : une conclusion agacée de Blaise, aimablement rapportée par Gilberte

Cette discussion sur la pertinence de la modélisation en probabilités et de son intérêt didactique eut le don d'agacer Blaise, qui sentait bien aussi que l'introduction "fréquentiste" de la notion de probabilité en classe de Première risque de faire écran à la beauté des purs raisonnements de "géométrie du hasard". Sans doute peu impressionné par la remarquable découverte du théorème d'or de Jacques BERNOULLI, prémisse à la loi des grands nombres, l'une des clés des applications des probabilités aux études statistiques, Blaise propose une métaphore de son point de vue sous la forme d'une élégante résolution d'un petit problème de géométrie, solution que Gilberte elle-même a du mal à comprendre. Mais Blaise n'éprouve pas le besoin de s'expliquer davantage, laissant à la sympathique plume de sa sœur le soin de conclure cette vivifiante polémique.

*Mademoiselle Gilberte Pascal*
*à*
*Monsieur Jacques Verdier*
*Responsable de la petite Publication Verte.*

*Très cher Monsieur,*

*Permettez-moi tout d'abord de vous remercier de la peine que vous avez bien voulu vous donner pour retranscrire ma lettre précédente dans votre petite publication verte numéro 44... Peut-être vous êtes-vous interrogé sur mon absence de réponse et sur le fait que je n'avais pas jugé bon de réagir à la lettre de ce bienveillant Monsieur Henry, mais il me faut malheureusement vous confier que ceci ne tenait non point tant à ma volonté qu'à celle de mon chenapan de frère Blaise, et que celui-ci n'avait pas cru opportun de me confier son sentiment sur la question jusqu'à présent.*

*Vous pensez bien qu'aussitôt reçu votre numéro 44 et la contribution de ce bon Monsieur Henry, je me faisais une joie de lui en lire la suave prose : "Mazette ! lui dis-je, et par un Franc-comtois ! quel honneur !" Il se pencha bien au départ avec* *une certaine curiosité sur ce texte, mais ce n'était finalement que pour me faire mieux sentir son désaccord. "Un Franc-comtois fréquentiste ! Quelle horreur !" grommela-t-il en guise de conclusion, tout en me rendant mon exemplaire si précieux de votre petite publication verte... Sentant alors mon teint s'empourprer quelque peu, je lui fis remarquer qu'il ne s'agissait pas encore, loin de là, de "fréquentation", et que, somme toute, la "proposition d'idylle" qui m'était subsidiairement adressée n'avait rien de contraire aux convenances relationnelles qui se doivent de gouverner les rapports intellectuels et platoniques entre personnes de bonne éducation... "Il s'agit bien de cela !" s'emporta-t-il comme si j'avais dit une chose complètement déplacée. Puis il s'enferma dans sa mauvaise humeur, maugréa encore quelques mots à propos "d'esprit de finesse" que ce Franc-comtois confondait aussi allègrement avec "l'esprit de géométrie", et il s'enfonça dans une de ces crises mystiques qui, vous le savez peut-être, le taraudent régulièrement. Inutile alors d'espérer de lui autre chose que des bribes de "pensées" et c'est ainsi que je n'ai rien eu à vous rapporter depuis qui vaille la peine d'un courrier.*

*Je lui en voulais évidemment un peu et n'osais plus aborder le sujet. C'est alors que votre numéro 45 me permit de renouer avec celui-ci grâce à la nouvelle lettre que vous y publiez... "Voilà de quoi faire avancer le schmilblick !", lui dis-je tout d'abord en m'efforçant de ne pas le brusquer... Il prit le texte que je lui tendais et le lut rapidement. "Il a l'air de sous-entendre que tu conclus un peu vite et que ce n'est pas une évidence a priori..." ajoutai-je finement pour l'intéresser un peu plus.*

*"Ah ! Parce que tu trouves qu'il fait vraiment avancer le schbilm... non, le schlimbik ! avec son latin résonnant ?" me rétorqua-t-il, sans doute piqué au vif. "D'abord je te ferai remarquer que ce n'est pas moi qui ai dit que c'était évident (au contraire, puisque j'ai modifié à mon profit la modélisation du problème), et que je t'ai simplement fait remarquer que les calculs ne servaient à rien puisque le résultat avait été postulé dans le modèle.*

*– Certes, répondis-je pour le pousser à bout, mais il n'a tout de même pas complètement tort quand il dit qu'il y a deux "univers"...*

*– La belle affaire ! Et si la secrétaire chargée des cartes réponses en avait jeté la moitié et avait remplacé les cartes manquantes par de vieux papiers gras avant le tirage, que ferait-il, à ton avis ton pousseur de schblimk ?*

*– Eh bien il inventerait un troisième univers à moitié rempli de papiers gras ; et je suppose qu'il calculerait alors la probabilité du "petit Blaise", comme ils disent !*

*– Voilà ! Et c'est là que j'ai dit que le calcul était inutile et insensé...*

*– Mais pourquoi donc ?*

*– C'est très simple : demande-lui, une fois qu'il aura péniblement calculé la probabilité de gagner du "petit Blaise" (comme ils disent), de te calculer la probabilité de gagner du "petit Pierre" qui, lui aussi, a envoyé sa réponse. Que crois-tu qu'il te répondra ?*

*– Mais que c'est la même chose !" m'écriai-je, car je venais enfin de comprendre que le modèle ne permettait pas d'autre estimation... Alors à quoi bon faire le calcul, puisque tout ce qu'il s'agissait de*

*soi-disant démontrer était l'équiprobabilité et qu'elle était postulée implicitement ?*

*"Mais, ajoutai-je, en essayant de masquer mon intérêt, crois-tu que cet aimable Monsieur Henry avait compris, lui ?". Il me regarda avec une lueur amusée dans les yeux... fit semblant de réfléchir profondément et dit : "Cela m'étonnerait ! Tu vois bien que tout se passe à ce qu'il appelle le "niveau 1"... S'il avait vu les choses clairement, qu'aurait-il eu besoin de les embrouiller avec ses trois niveaux complètement inutiles !... D'ailleurs, je te signale, ma chère sœur, car tu n'as pas l'air de le savoir, que lorsque l'on dit d'un enseignant des probabilités qu'il est "fréquentiste", cela ne signifie pas du tout ce que tu crois, mais simplement qu'il fait partie de ceux qui s'ingénient à compliquer les choses dans l'esprit des élèves...".*

*"Tiens, regarde, je vais t'expliquer..." poursuivit-il. Il me demanda alors de dessiner un hexagone régulier ABCDEF et de joindre le sommet A au milieu du côté BC, puis le sommet B au milieu du côté CD, et ainsi de suite de manière à obtenir à l'intérieur un nouvel hexagone. "Démontre-moi, que le petit hexagone est un hexagone régulier !" m'ordonna-t-il ensuite.*

*Je lui répondis que c'était évident puisque la figure était manifestement symétrique... Il fut un peu déçu que je trouve immédiatement la bonne réponse, mais il le cacha assez bien. Il ajouta : "Eh bien tu vois, eux (et moi avec avant de mettre mes calculs à la corbeille...), ils ne procèdent pas comme cela : ils calculent avec peine la longueur d'un côté et la mesure d'un angle et, pour montrer que l'hexagone est régulier, ils annoncent ensuite fièrement que le calcul donnera la même chose pour tous les angles et tous les côtés et qu'ils sont donc capables de démontrer la régularité de l'hexagone ! !... Mais attends, allons plus loin et analysons d'un peu plus près ce que font les "fréquentistes"..." Il reprit son hexagone, le coloria, le déforma, le découpa, le démultiplia sous mes yeux admiratifs. C'était fascinant et limpide, si bien que j'eus l'impression que tout ce qu'il me découvrait avait été frappé depuis longtemps du sceau de l'évidence et de la vérité...*

*Malheureusement, il retomba ensuite progressivement dans une de ces crises mathématiques qui, vous le savez peut-être, le taraudent régulièrement. Il déformait ses deux hexagones de manière à placer leurs sommets sur diverses courbes, mais je ne pouvais plus le suivre. Je m'attachai donc, pendant ce temps à reproduire toutes les si belles figures dont il avait émerveillé mon esprit... Et j'espère un peu avoir l'occasion de les faire admirer un jour à ce cher Monsieur Henry si nous avons le bonheur d'être enfin présentés...*

*Recevez donc, très cher Monsieur Verdier, l'expression de ma gratitude pour votre travail admirable (qui est sans nul doute à l'origine de cette magnifique petite publication verte) et transmettez, s'il vous plaît, l'expression de mes meilleurs sentiments à votre ami Franc-comtois si sympathique.*

*Votre dévouée*
*Gilberte Pascal.*